

# Modulation et démodulation spatiales en optique cohérente

par José-Philippe PÉREZ  
OMP - 31400 Toulouse

---

## RÉSUMÉ

*On propose d'illustrer les concepts de modulation et démodulation, familiers en électronique, par des expériences d'optique cohérente où les signaux monochromatiques dépendent de l'espace. Les expériences décrites peuvent être réalisées avec un matériel optique standard.*

## 1. INTRODUCTION

En électronique, la modulation d'un signal et sa démodulation sont des techniques importantes et bien connues dans le domaine de la transmission des informations par voie hertzienne.

On sait que l'optique prolonge souvent l'électronique : c'est ainsi que l'on parle de signaux optiques modulés par des signaux informationnels grâce à des systèmes électro-optiques [1], lesquels s'appuient sur des phénomènes physiques tels que l'effet Kerr, l'effet Faraday, l'effet acousto-optique, etc.

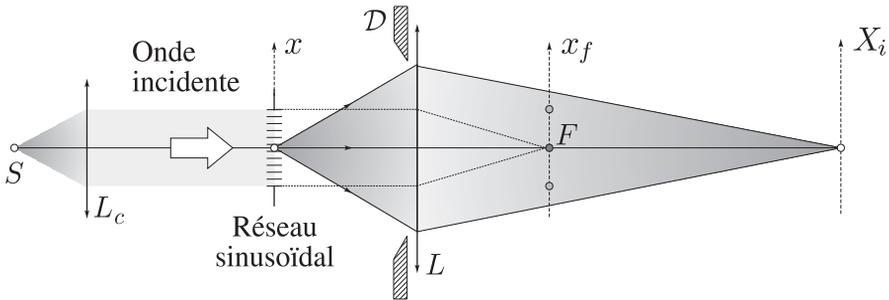
En optique de Fourier [2], où les fréquences intéressantes sont *spatiales* et non temporelles, on réalise aussi la modulation et la démodulation, en amplitude et en angle (fréquence et phase).

Nous proposons d'illustrer simplement, dans le cadre de l'optique cohérente, la modulation et la démodulation spatiales, en amplitude et en angle. Nous supposons connus les résultats essentiels sur la diffraction et sur son rôle dans la formation des images [3].

Les expériences simples, décrites dans la suite, pourraient être exigées dans un montage de physique pour des étudiants de licence. L'interprétation est évidemment facilitée par l'utilisation de la transformation de Fourier.

**2. MODULATION ET DÉMODULATION D'AMPLITUDE**

Considérons le montage optique de la formation de l'image d'un objet en éclairage *cohérent*, spatialement (source ponctuelle  $S$ , placée par exemple au foyer objet d'une lentille collimatrice  $L_c$ ) et temporellement (longueur d'onde déterminée  $\lambda$ ) (figure 1). Pour simplifier ce qui n'est pas essentiel, nous réduisons l'instrument à une lentille mince convergente, de distance focale  $f$ .



**Figure 1**

La fonction objet est caractérisée par sa transmittance, c'est-à-dire le rapport de l'amplitude complexe de l'onde lumineuse à la sortie de l'objet sur son amplitude à l'entrée du plan contenant l'objet. Désignons-la par  $m(x)$ . Dans le plan de front passant par l'image de la source  $S$ , qui est dans ce cas le plan focal de la lentille  $L$ , on observe, le carré du module de son spectre, c'est-à-dire de sa transformée de Fourier (TF), notée  $\hat{m}(u)$  (lire *m* chapeau), qui est centré au foyer image principal  $F$ .

**2.1. Modulation**

Plaçons, contre l'objet, un réseau d'amplitude, de pas  $a$  et de motif élémentaire  $f_0(x)$ . Ce nouvel objet est caractérisé par l'amplitude complexe :

$$f(x) = m(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(x - na)$$

On voit que  $f(x)$  est obtenu en *multipliant* la fonction modulante  $m(x)$  par la fonction réseau. En optique, cette multiplication, caractéristique de la modulation en amplitude, est équivalente à celle réalisée en électronique par un multiplieur.

En décomposant le signal périodique en série de Fourier, on obtient :

$$f(x) = m(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(x - na) = m(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{a} x\right)$$

avec :

$$c_n = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f_0(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{a} x\right) dx$$

Comme  $m(x)$  est une fonction lente de  $x$ , comparée aux fonctions  $\exp(i2\pi nx/a)$ , le signal  $f(x)$  se présente sous la forme d'une superposition de plusieurs *porteuses*, également modulées en amplitude par  $m(x)$  :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(x) c_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{a} x\right)$$

L'intérêt pédagogique de l'optique cohérente est d'exhiber une information sur le spectre  $\hat{f}(u)$  de l'objet dans le plan focal de la lentille. On a :

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi ux) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{m}(u) * c_n \delta\left(u - \frac{n}{a}\right)$$

où \* désigne l'opération de convolution et  $\delta$  la distribution de Dirac. Il en résulte, d'après les propriétés de la convolution :

$$\hat{f}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \hat{m}\left(u - \frac{n}{a}\right)$$

Ainsi, le spectre  $\hat{f}(u)$  est constitué d'une répétition périodique du spectre  $\hat{m}(u)$ , centré autour des fréquences spatiales porteuses suivantes (figure 2) :

$$u_n = nu_1$$

avec :

$$u_1 = \frac{1}{a}$$

$n$  étant nul, un entier positif ou un entier négatif. Le cas du spectre entourant la fréquence spatiale  $n = 0$  correspond à l'absence de porteuse ; c'est la *modulation sans porteuse à bande latérale double*.

La *transposition fréquentielle ou hétérodynage*, bien connue en électronique, par exemple en radiodiffusion, peut être facilement réalisée en changeant de porteuse, ici en changeant de spot dans le plan spectral.

On pourrait aussi agir sur les éléments physiques du montage, par exemple la position de la source  $S$  dans son plan de front ; en effet, si on déplace latéralement  $S$  dans ce plan, l'ensemble du spectre suit son image géométrique située dans ce cas dans le plan focal de  $L$ .

## 2.2. Démodulation

Pour démoduler, il suffit de filtrer l'entourage fréquentiel d'un seul des spots, ce que l'on peut réaliser simplement à l'aide d'une fente (figure 2a). On illustre ainsi la technique du champ sombre largement utilisée en microscopie électronique, lorsqu'on veut visualiser les défauts à moyenne résolution d'un matériau cristallin [4]. Cette technique est distincte de la strioscopie, laquelle consiste à travailler en champ sombre en supprimant la composante continue d'un objet non périodique, souvent de phase faible.

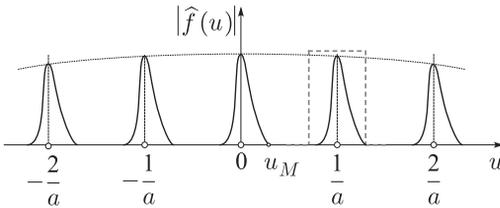


Figure 2a

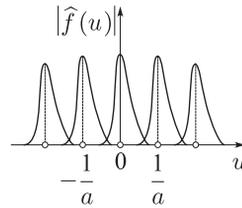


Figure 2b

## 3. ÉCHANTILLONNAGE

La multiplicité du spectre de  $m(x)$  dans  $\hat{f}(u)$  rappelle celle induite par l'échantillonnage périodique du signal  $m(x)$ . On peut considérer en effet que le réseau réalise naturellement l'échantillonnage de  $m(x)$  avec une fréquence spatiale caractéristique  $u_e = 1/a$ . Si les fentes du réseau sont suffisamment minces, l'échantillonnage est idéal.

Il est possible de vérifier expérimentalement le théorème de Shannon [5], selon lequel la fréquence optimale d'échantillonnage d'un signal  $m(x)$  est égale au double de la fréquence maximale significative  $u_M$  du spectre  $\hat{m}(u)$  :  $u_e = 2 u_M$ . À l'aide de la figure 2a, on voit en effet qu'un échantillonnage plus serré ( $1/a$  plus grand), bien que plus coûteux, n'apporterait aucun gain informationnel. En revanche, un échantillonnage moins serré ( $1/a < 2 u_M$ ) provoquerait un chevauchement des spectres (figure 2b), appelé repliement de spectre (aliasing en anglais) ; il en résulterait une distorsion dans la restitution du signal initial à partir du filtrage de l'un des spectres  $\hat{m}(u)$ .

#### 4. MODULATION ET DÉMODULATION D'ANGLE

L'holographie, qui consiste à restituer, par une méthode interférentielle, l'amplitude *complexe* caractérisant un objet, fournit un exemple intéressant de modulation et de démodulation spatiales. Comme nous allons le voir, la phase d'enregistrement de l'hologramme sur un film photographique correspond à une modulation, celle de la restitution à une démodulation.

##### 4.1. Enregistrement d'un hologramme ou modulation

Considérons le montage classique de Leith et Upatnieks [6], dit à référence inclinée, représenté sur la figure 3. Une onde plane tombe pour une partie sur un objet transparent, caractérisé par la fonction transmittance complexe  $\underline{t}(x)$ , et pour une autre sur un prisme à petit angle.

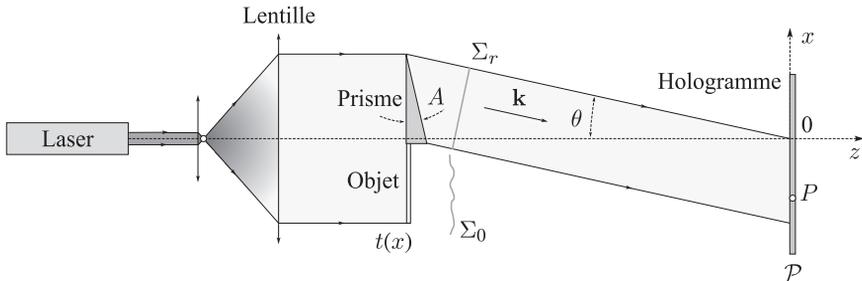


Figure 3

À la sortie du prisme, l'onde de référence, d'amplitude complexe  $\underline{\psi}_r(x)$ , est inclinée de l'angle  $\theta = (n - 1) A$ ,  $n$  étant l'indice du prisme et  $A$  son angle au sommet. Elle interfère avec l'onde issue de l'objet d'amplitude complexe  $\underline{m}(x)$  dans le plan de détection où on a placé un film photographique. Notons que la relation entre la transmittance  $\underline{t}(x)$  de l'objet et  $\underline{m}(x)$  est caractéristique de la diffraction à distance finie ou diffraction de Fresnel [3]. On en déduit l'amplitude complexe de l'onde résultante :

$$\underline{\psi}(x) = \underline{\psi}_r(x) + \underline{m}(x)$$

avec :

$$\underline{m}(x) = A_m \exp(i\phi_m)$$

et :

$$\underline{\psi}_r(x) = A_r \exp(i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})$$

$\mathbf{k}_r$  étant le vecteur d'onde, de norme  $2\pi/\lambda$  et  $\mathbf{r}$  le vecteur position dans le plan d'enregistrement  $Oxy$ . Comme le vecteur  $\mathbf{k}_r$ , de norme  $k_r = 2\pi/\lambda$ , est incliné de l'angle  $\theta$  par rapport à l'axe optique  $Oz$ , il vient :

$$\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$$

et :

$$\underline{\Psi}_r(x) = A_r \exp(-i2\pi u_p x)$$

avec :

$$u_p = \frac{\sin \theta}{\lambda}$$

*Ordre de grandeur* : Pour  $\theta = 15^\circ$  et  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ , on trouve  $u_p = 409 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ , alors qu'une fréquence spatiale typique du signal modulant est  $4 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ .

L'intensité détectée s'écrit donc :

$$I(x) = \underline{\Psi} \underline{\Psi}^* = [\underline{\Psi}_r(x) + \underline{m}(x)][\underline{\Psi}_r^*(x) + \underline{m}^*(x)] = A_r^2 + A_m^2(x) + 2 \operatorname{Re} \{ \underline{\Psi}_r^*(x) \underline{m}(x) \}$$

avec :

$$\underline{\Psi}_r^*(x) \underline{m}(x) = A_m(x) A_r \exp[i[2\pi u_p x + \phi_m(x)]]$$

Ainsi :

$$I(x) = A_r^2 + A_m^2(x) + 2A_m(x) A_r \cos [2\pi u_p x + \phi_m(x)]$$

soit :

$$I(x) \approx A_r^2 + 2A_r A_m(x) \cos [2\pi u_p x + \phi_m(x)]$$

si on suppose que  $A_r \gg A_m$ , ce qui est généralement le cas. On en déduit la variation de l'intensité autour de la valeur moyenne  $I_r = A_r^2$  :

$$\Delta I(x) = I(x) - I_r \approx 2A_r A_m(x) \cos [2\pi u_p x + \phi_m(x)]$$

Cette variation de l'intensité  $\Delta I(x)$  est enregistrée sur un film photographique. On obtient alors un hologramme.

(1) Si les variations de la phase de  $m(x)$  sont négligeables,  $\phi_m(x) \approx \text{Cte} = \phi_0$ , la répartition de  $\Delta I(x)$  est caractéristique d'un signal *modulé en amplitude* :

$$\Delta I(x) \approx 2A_r A_m(x) \cos [2\pi u_p x + \phi_0]$$

(2) Si les variations de l'amplitude sont négligeables,  $A_m(x) \approx \text{Cte} = A_0$ , la répartition de  $\Delta I(x)$  est caractéristique d'un signal *modulé en phase* :

$$\Delta I(x) \approx 2A_r A_0 \cos [2\pi u_p x + \phi_m(x)]$$

(3) Évidemment, si  $m(x)$  est quelconque, la modulation concerne à la fois l'amplitude et la phase.

#### 4.2. Restitution ou démodulation

Éclairons l'hologramme précédent avec l'onde porteuse de référence (figure 4).

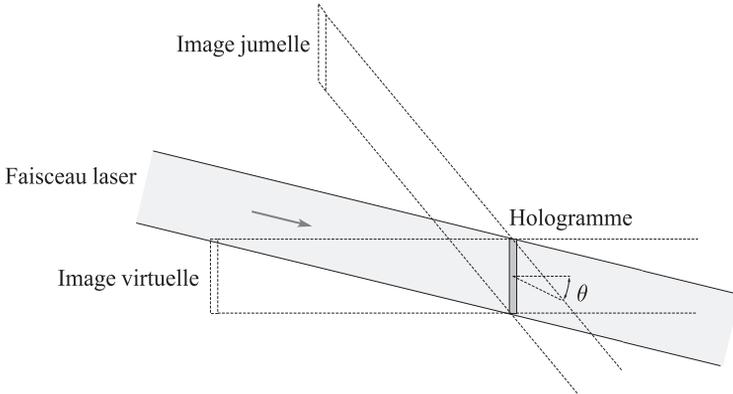


Figure 4

On en déduit l'amplitude complexe de l'onde émergente :

$$\begin{aligned} \tau(x) \underline{\psi}_r(x) &= [\alpha + b\Delta I(x)] \underline{\psi}_r(x) \\ &= \left\{ \alpha + 2bA_r A_m(x) \cos [2\pi u_p x + \phi_m(x)] \right\} A_r \exp(-i2\pi u_p x) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi, en exprimant le cosinus en fonction d'exponentielles :

$$\alpha A_r \exp(-i2\pi u_p x) + bI_r A_m(x) \exp[i\phi_m(x)] + bI_r A_m(x) \exp[-i\phi_m(x)] \exp(-i4\pi u_p x)$$

Ces trois termes représentent les amplitudes complexes de trois ondes, respectivement :

- une onde porteuse, de fréquence spatiale  $u_p$ , directement transmise,
- une onde *démodulée*, puisque proportionnelle au signal modulant  $\underline{m}(x)$ ,
- une onde porteuse, de fréquence spatiale  $2u_p$ , se propageant dans une direction faisant l'angle  $2\theta$  par rapport à la normale à l'hologramme, et modulée par un signal qui est le *conjugué en phase* de  $\underline{m}(x)$  ; c'est l'*onde jumelle*.

Si l'angle d'inclinaison  $\theta$  n'est pas trop faible, on sépare sans difficulté l'onde démodulée des deux autres.

## CONCLUSION

Ainsi, les expériences bien connues d'optique cohérente peuvent être interprétées à l'aide des concepts de modulation et de démodulation largement utilisés en électronique. Il ne s'agit pas d'un simple remplacement des signaux hertziens par des signaux optiques, et donc d'un changement de fréquence avec la technologie adaptée, mais d'une analogie très forte entre signaux temporels et signaux spatiaux.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. VAN der LUGT : «*Optical signal processing*» - Wiley series in pure and applied optics, J.W. Goodman, Editor, p. 149 (1991).
- [2] J.W. GOODMAN : «*Introduction to Fourier Optics*» - Mc Graw Hill, p. 101 (1968).
- [3] J.-Ph. PÉREZ : «*Optique, fondements et applications*» - 5<sup>e</sup> édition, Masson, p. 346 (1996).
- [4] A. LANNES et J.-Ph. PÉREZ : «*Optique de Fourier en microscopie électronique*» - Masson, p. 115 (1983).
- [5] C. SHANNON : «*The mathematical theory of communication*» - University of Illinois Press, Urbana, p. 29 (1949).
- [6] E.N. LEITH and J. UPATNIEKS : «*Wavefront Reconstruction with diffused illumination and Three-dimensional objects*» - J. Opt. Soc. Am. 52, p. 1123 (1962).