92e Année - N° 805 Publication Mensuelle Juin 1998

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

Grandeurs qui se conservent et grandeurs conservatives

par José-Philippe PÉREZ
OMP - 31400 Toulouse

RÉSUMÉ

On se propose de préciser ce que l'on entend généralement par lois de conservation en mécanique, en distinguant les grandeurs qui se conservent occasionnellement de celles qui sont conservatives, c'est-à-dire de celles pour lesquelles le terme de production est toujours nul.

1. INTRODUCTION

Dans l'enseignement de la physique, on recommande de plus en plus, de s'appuyer sur les lois de conservation de grandeurs physiques. Non seulement cette démarche est souhaitable sur le plan fondamental, mais elle l'est aussi sur le plan technique (efficacité, rapidité, etc.). Cependant, il convient, me semble-t-il, de distinguer ce qui relève de chacun de ces deux plans, sinon on risquerait de compromettre l'intérêt même de la démarche. En bref, il est indispensable de distinguer ce qui est occasionnel de ce qui est universel, dans l'état actuel de la physique.

Le problème ainsi posé est bien illustré par le concept d'*énergie mécanique*. Voilà une grandeur qui ne se conserve qu'occasionnellement, mais qui rend de précieux services lorsqu'on veut résoudre simplement et rapidement les problèmes concrets de mécanique à un seul degré de liberté. Ce n'est cependant pas un concept fondamental, puisqu'il a fallu le généraliser en énergie totale, pour le seul motif qu'il ne présentait pas de caractère conservatif : l'énergie mécanique peut être produite contrairement à l'énergie totale. Cette généralisation constitue précisément le premier principe de la thermodynamique [1].

Dans cet article, nous proposons de revisiter successivement les concepts de base de la mécanique, quantité de mouvement $\mathbf{P}$, moment cinétique $\mathbf{L}$ et énergie cinétique $\mathcal{E}_k$, en distinguant soigneusement leur conservation occasionnelle de leur caractère conservatif éventuel.

Notons que, dans le langage de la mécanique analytique, les lois de conservation sont issues des équations de Hamilton établies dans le cas où toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle. Ces lois traduisent la conservation automatique de certaines grandeurs mécaniques liée à l'absence de variable dite conjuguée dans l'expression de l'hamiltonien $\mathcal{H}$ [2]. Ainsi, lorsque la variable spatiale z est absente de $\mathcal{H}$, la composante suivant z du moment conjugué p_z, ou quantité de mouvement suivant z, se conserve ; de même, l'absence de la variable angulaire φ exprime la conservation du moment conjugué p_φ, ou moment cinétique, selon un axe perpendiculaire au plan dans lequel est défini φ ; enfin, l'absence de la variable temps t dans $\mathcal{H}$ exprime la conservation de l'énergie.

2. QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Rappelons le théorème de la quantité de mouvement d'un système matériel fermé, c'est-à-dire n'échangeant pas de matière avec le milieu extérieur, soumis à la somme $\mathbf{S}_{ex}$ des forces extérieures. La quantité de mouvement d'un système matériel, qui est la somme des quantités de mouvement des particules qui le forment, satisfait à l'équation vectorielle : $\mathrm{d}\mathbf{P} / \mathrm{d}t = \mathbf{S}_{ex}$.

Pour un système *ouvert*, c'est-à-dire pouvant échanger aussi de la matière à travers une surface, dite de contrôle, qui le délimite, fixe et indéformable, on montre que l'équation vectorielle précédente devient [3] :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{S}_{ex} + (q_m \mathbf{v})_s^e$$

$\mathbf{v}$ étant la vitesse avec laquelle une quantité de matière traverse la surface de contrôle soit en entrant (indice e), soit en sortant (indice s). Ce bilan est relatif au référentiel $\mathcal{R}$ lié à la surface de contrôle. Si $\mathcal{R}$ n'est pas galiléen, il faut ajouter, aux forces dues à la présence d'autres corps, les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2.1. Quantité de mouvement d'un système isolé

Si le système est isolé, c'est-à-dire n'échange, ni énergie, ni masse avec le milieu extérieur, alors sa quantité de mouvement se conserve :

$$\mathbf{S}_{ex} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad q_m = 0$$

donnent :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$$

soit :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Cte}$$

2.2. Écriture en terme de bilan de quantité de mouvement

Le théorème de la quantité de mouvement peut être exprimé en terme de bilan d'une grandeur. En effet, on peut écrire, entre deux instants infiniment voisins t et t + dt :

$$\mathrm{d}\mathbf{P} = \delta\mathbf{P}^p + \delta\mathbf{P}^p$$

avec :

$$\delta\mathbf{P}^p = \mathbf{S}_{ex}\mathrm{d}t + (q_m\mathbf{v})_s^e \, \mathrm{d}t$$

et :

$$\delta\mathbf{P}^p = \mathbf{0}$$

Le premier terme représente l'*échange* de quantité de mouvement avec le milieu extérieur, à la fois par les forces extérieures et par le transfert de matière. Le second, qui traduirait une éventuelle *production* de quantité de mouvement, est nul. C'est là précisément une caractéristique universelle de la quantité de mouvement qu'il convient de distinguer de sa conservation occasionnelle.

2.3. Application à la dynamique des chocs

La dynamique des chocs des systèmes fermés utilise largement le langage des bilans. On écrit, en effet, dans ce cas :

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}^r = \int_{t_1}^{t_1 + \tau} \mathbf{S}_{ex}\mathrm{d}t$$

t_1 étant l'instant du début du choc et τ sa durée, supposée très faible devant toute durée caractéristique du phénomène, par définition même du choc. Ce bilan d'une grandeur conservative fait apparaître naturellement le terme d'échange, appelé aussi percussion associée à $\mathbf{S}_{ex}$:

$$\mathbf{P}^r = \int_{t_1}^{t_1 + \tau} \mathbf{S}_{ex}\mathrm{d}t$$

Notons que si la force et le moment sont des grandeurs finies, c'est-à-dire si la norme de $\mathbf{S}_{ex}$ est finie, le terme d'échange correspondant est négligeable. En effet remplaçant la norme de $\mathbf{S}_{ex}$ par une valeur majorante F_m, on obtient :

$$\left\| \int_{t_1}^{t_1 + \tau} \mathbf{S}_{ex} \mathrm{d}t \right\| \leq F_m \int_{t_1}^{t_1 + \tau} \mathrm{d}t = F_m \tau \approx 0$$

puisque τ est très faible. C'est le cas de la plupart des forces, telles que le poids, à l'exclusion des forces de réaction entre solides : ce dernier cas est illustré par la percussion qu'exerce l'axe matériel de rotation sur un pendule balistique.

On retrouve la conservation de **P** lorsque le système est isolé, ou pseudo isolé si les actions extérieures existent mais sont telles que $\mathbf{S}_{ex} = \mathbf{0}$. Notons qu'en dynamique des chocs la condition d'isolement du système est peu restrictive, puisque seules les percussions associées aux forces de réaction ne sont pas négligeables.

3. MOMENT CINÉTIQUE

Le moment cinétique a des propriétés analogues à celles de la quantité de mouvement. C'est une grandeur qui se conserve lorsque le système est isolé ou pseudo isolé, et qui est conservative, c'est-à-dire que le terme de production du moment cinétique est toujours nul. Le théorème du moment cinétique pour un système ouvert s'écrit, en effet [3] :

$$\mathrm{d}\mathbf{L}_O = \delta\mathbf{L}_O^r + \delta\mathbf{L}_O^p$$

avec :

$$\delta\mathbf{L}_O^r = \mathbf{M}_{O,\ ex}\mathrm{d}t + (q_m\ \mathbf{OA} \times \mathbf{v})_s^c\ \mathrm{d}t$$

et :

$$\delta\mathbf{L}_O^p = \mathbf{0}$$

où O est un point fixe du référentiel d'analyse, $\mathbf{M}_{O,\ ex}$ le moment en O *des* actions extérieures. A un point générique par lequel le système échange de la masse avec l'extérieur.

En dynamique des chocs des systèmes fermés, on a, pour le moment cinétique :

$$\Delta\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_O^r = \int_{t_1}^{t_1 + \tau} \mathbf{M}_{O,\ ex}\mathrm{d}t$$

4. ÉNERGIE CINÉTIQUE, ÉNERGIE MÉCANIQUE

Pour un système *ouvert*, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit [3] :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{ex} + \mathcal{P}_{in} + \frac{1}{2}\,(q_m v^2)_s^e$$

soit :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \delta W_{ex} + \delta W_{in} + \frac{1}{2}\,(q_m v^2)_s^e \mathrm{d}t$$

si $\delta W_{ex} = \mathcal{P}_{ex}\mathrm{d}t$ et $\delta W_{in} = \mathcal{P}_{in}\,\mathrm{d}t$ représentent les travaux élémentaires des forces, extérieures et intérieures, reçus par le système, entre les instant infiniment voisins t et $t + \mathrm{d}t$, et $(q_m v^2 / 2)_s^e \mathrm{d}t$ la variation d'énergie cinétique associée au transfert de masse.

On en déduit le théorème de l'énergie mécanique en distinguant les forces qui dérivent d'une énergie potentielle extérieure ou intérieure :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{ex}^{nc} + \mathcal{P}_{in}^{nc} - \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\ ex}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\ in}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\,(q_m v^2)_s^e$$

l'exposant *nc* caractérisant les forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle. Il vient, en introduisant l'énergie mécanique du système : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{p,\ ex} + \mathcal{E}_{p,\ in}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{ex}^{nc} + \mathcal{P}_{in}^{nc} + \frac{1}{2}\,(q_m v^2)_s^e$$

ou :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{ex}^{nc} + \delta W_{in}^{nc} + \frac{1}{2}\,(q_m v^2)_s^e \mathrm{d}t$$

Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter évidemment la contribution des forces d'inertie d'entraînement, celle de Coriolis étant nulle.

4.1. Cas d'un système isolé

Lorsque le système est isolé, c'est-à-dire lorsqu'il n'échange ni énergie ni masse avec le milieu extérieur, on a :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \delta W_m$$

ou :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{in}^{nc}$$

Ainsi, dans le cas général, ni l'énergie cinétique, ni l'énergie mécanique d'un système isolé ne se conservent. La deuxième équation est très souvent utilisée en mécanique car, pour de nombreux systèmes, la puissance des forces intérieures qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle est nulle.

4.2. Écriture en terme de bilan d'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique peut être réécrit en terme de bilan. En effet :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \delta\mathcal{E}_k^r + \delta\mathcal{E}_k^p$$

avec :

$$\delta\mathcal{E}_k^r = \delta W_{ex} + \frac{1}{2}\,(q_m v^2)_s^e \mathrm{d}t$$

et :

$$\delta\mathcal{E}_k^p = \delta W_{in}$$

Le premier terme représente l'*échange* d'énergie cinétique avec le milieu extérieur, à la fois par les forces extérieures et par le transfert de matière ; le second traduit une *production* d'énergie cinétique. Par conséquent, l'énergie cinétique n'est pas une grandeur conservative, précisément en raison du terme δW_{in}. De même, l'énergie mécanique n'est pas une grandeur conservative à cause du terme de production δW_{in}^{nc}. Seule l'énergie totale introduite en thermodynamique l'est.

4.3. Application à l'énergétique des chocs

Un tel bilan est généralement effectué dans l'étude des systèmes fermés subissant un choc. L'intégration de l'équation précédente, sur la durée τ du choc, donne :

$$\Delta\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k^r + \mathcal{E}_k^p$$

Dans la liste de ces travaux, le travail des forces finies est négligeable puisque les déplacements le sont au cours d'un choc : $\mathcal{E}_k^r = W_{ex} \approx 0$. Par conséquent, le système peut être considéré comme pseudo-isolé. En ce qui concerne le travail des forces de contact, il est généralement négatif, car, même si les forces de frottement sont nulles, le système subit une déformation locale et donc consomme une partie de l'énergie cinétique.

Ainsi, la diminution d'énergie cinétique d'un système, au cours d'un choc, n'est pas uniquement liée aux forces de frottement : une partie sert à le déformer :

$$\Delta\mathcal{E}_k = W_{in} \leq 0$$

Ce résultat est à l'origine de la distinction entre chocs élastiques et inélastiques. Un choc entre deux systèmes, formant un ensemble isolé ou pseudo-isolé, est *élastique* lorsque l'énergie cinétique totale du système est conservée : $\Delta\mathcal{E}_k = 0$. Dans tous les autres cas, le choc est *inélastique* : l'énergie cinétique perdue permet de modifier la nature des systèmes en les déformant, en les brisant en morceaux ou en augmentant leur température. Il est alors naturel de caractériser un choc inélastique par le *facteur de restitu-*

tion en énergie, c'est-à-dire le rapport de l'énergie cinétique *après* le choc sur l'énergie cinétique *avant* :

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{E}_{k,\ av}}{\mathcal{E}_{k,\ ap}}$$

avec : $$0 \le \varepsilon \le 1$$

La limite supérieure $\varepsilon = 1$ correspond à un choc élastique ($\mathcal{E}_{k,\ ap} = \mathcal{E}_{k,\ av}$), alors que la limite inférieure $\varepsilon = 0$ traduit la disparition totale de l'énergie cinétique disponible ; un tel choc est *parfaitement inélastique*.

CONCLUSION

Résumons ce qui nous semble être l'essentiel.

Certaines grandeurs en mécanique se conservent au cours du mouvement. Ce résultat est occasionnel comme le prouve le simple rappel des théorèmes de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie cinétique pour tout système matériel. Cependant, on constate une différence importante entre les deux premiers concepts et l'énergie cinétique ; alors que **P** et **L** sont des constantes pour un système isolé, $\mathcal{E}_k$ varie selon le travail des forces intérieures W_{in}. Cette différence s'exprime autrement en terme de bilan : dans les deux premiers cas, le terme de production est nul, alors que, dans le troisième, il s'identifie à W_{in}. La recherche d'une grandeur énergétique conservative est précisément à l'origine du concept d'énergie mécanique ; cependant le terme de production de cette dernière quantité est lui aussi non nul, puisqu'il s'identifie au travail W_{in}^{nc} des forces intérieures qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle. Cette recherche est précisément à l'origine du concept d'énergie totale introduit par R. MAYER dans l'énoncé du premier principe de la thermodynamique [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-Ph. PÉREZ : «*Thermodynamique, fondements et applications*» - 2^{e} édition - Masson - p. 84 (1997).

[2] H. GOLDSTEIN : «Mécanique classique» - PUF - p. 239 (1964).

[3] J.-Ph. PÉREZ : «*Mécanique, fondements et applications*» - 5^{e} édition - Masson - p. 322 (1997).