

La décharge du condensateur revisitée

par Charles de IZARRA et Olivier VALLÉE

Centre Universitaire de Bourges

Faculté des Sciences,

Université d'Orléans - LASEP

Rue G. Berger - BP 4043 - 18028 Bourges Cedex

mél : Charles.De_Izarra@univ-orleans.fr

RÉSUMÉ

Dans cet article, on présente une étude à la fois théorique et expérimentale de la décharge d'un condensateur dans une résistance pure. On montre qu'il est nécessaire de tenir compte de la très faible valeur de l'inductance du circuit afin de décrire convenablement la réalité. Des mesures de l'intensité du courant de décharge en fonction du temps sont réalisées en utilisant un thyristor pour déclencher la décharge du condensateur.

1. INTRODUCTION

Le condensateur utilisé en courant continu ou en courant alternatif apparaît toujours dans les cours de physique de base. On l'utilise généralement comme exemple d'application des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants. Enfin, les condensateurs sont très largement utilisés pour générer des plasmas, et dans ce cas, le courant peut atteindre plusieurs dizaines de kA. Des idées d'expériences utilisant des condensateurs peuvent être obtenues sur Internet [1].

La décharge d'un condensateur dans une résistance pure est largement traitée dans de nombreux manuels de physique de base. La plupart du temps, il est expliqué que l'intensité du courant traversant la résistance est nulle avant la décharge, et ceci jusqu'au temps $t = 0^-$, puis atteint instantanément une valeur finie pour $t = 0^+$ [2]. Dans ce papier, nous montrons que l'image classique de la décharge du condensateur donnée par une simple fonction exponentielle en fonction du temps est physiquement incorrecte.

2. THÉORIE

Considérons le schéma de la figure 1. Le condensateur de capacité C est chargé sous la tension V_0 avec la charge Q_0 et la résistance R est *supposée* idéale : elle n'a ni inductance propre, ni capacité parasite. L'interrupteur S est fermé à $t = 0$, et permet la décharge du condensateur dans la résistance.

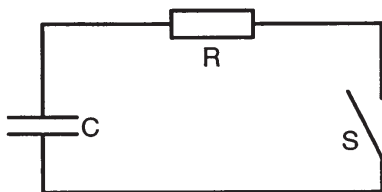


Figure 1 : Schéma du circuit permettant la décharge d'un condensateur dans une résistance.

L'équation différentielle linéaire du premier ordre qui décrit l'évolution temporelle de l'intensité i du courant dans la résistance est :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (1)$$

Une intégration directe de l'équation (1) donne le courant i en fonction du temps t :

$$i(t) = Ae^{-t/RC}, \quad (2)$$

où A est une constante d'intégration. Comme le courant i_0 est nul à $t = 0$, la constante d'intégration $A = i_0 = 0$, et par conséquent le courant est toujours nul ! Physiquement, il est clair qu'il y a décharge du condensateur, et que l'intensité du courant passe d'une valeur nulle à une valeur finie, puis décroît ensuite vers zéro.

Dans le but de prendre en compte le caractère «inertiel» du circuit, il convient de considérer la très faible inductance L du circuit, due aux fils de connections. L'équation (1) doit être modifiée de la manière suivante :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (3)$$

En introduisant les paramètres sans dimension ε et τ définis par :

$$\varepsilon = L / (R^2C) \quad ; \quad \tau = t / (RC), \quad (4)$$

l'équation (3) peut être écrite :

$$\varepsilon \frac{d^2i}{d\tau^2} + \frac{di}{d\tau} + i = 0. \quad (5)$$

Le polynôme caractéristique de l'équation (5) $\varepsilon s^2 + s + 1 = 0$ a deux solutions s_1 et s_2 données par $(-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}) / (2\varepsilon)$ et $(-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}) / (2\varepsilon)$, respectivement. En pre-

nant la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ (i.e. $L \rightarrow 0$), on obtient $s_1 = -1$ et $s_2 = 1 - 1/\varepsilon$. Une solution générale de l'équation (3) est alors :

$$i(\tau) = A_1 e^{-\tau} + A_2 e^{\tau - \tau/\varepsilon}, \quad (6)$$

où A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration que l'on peut déterminer en utilisant une condition initiale, et une condition asymptotique. Tout d'abord, en considérant $\tau = 0$ et en prenant ε petit (mais non nul), on obtient :

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0,$$

qui donne $A_1 = -A_2$. Il est intéressant de remarquer que l'expression du courant donnée par (6) est mathématiquement non uniforme pour $(\varepsilon, \tau) \rightarrow 0$ [3]. En effet, une première expression du courant est donnée par la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{\tau \rightarrow 0} i(t) \right) = A_1 + A_2, \quad (7)$$

et une deuxième expression par la limite :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i(t) \right) = A_1. \quad (8)$$

Les deux limites (relations (7) et (8)) sont différentes mais un critère physique permet de faire un choix : ε (c'est-à-dire L) n'est jamais strictement nul, et l'expression (7) doit être conservée.

Enfin, la détermination de la constante A_1 peut être faite en considérant le courant i pour des temps suffisamment grands, c'est-à-dire de l'ordre de $\tau = 1$ (ou de l'ordre $t = RC$). On a alors $i(\tau = 1) = Q_0 / (RCe)$, car le courant est alors donné par une simple exponentielle décroissante. On a :

$$A_1 (e^{-1} - e^{1-1/\varepsilon}) = Q_0 / (RCe). \quad (9)$$

Dans notre cas, nous avons déterminé les constantes d'intégration à l'aide d'une condition initiale et d'une condition asymptotique, alors qu'elles sont la plupart du temps obtenues à l'aide de deux conditions initiales : le courant et sa dérivée en $t = 0$. Finalement, l'expression du courant en fonction du temps est donnée par :

$$i(t) = K \frac{Q_0}{RC} (e^{-t/(RC)} - e^{t/(RC)} e^{-t/(L/R)}), \quad (10)$$

avec $K = (1 - e^{-1/\varepsilon})^{-1}$. On peut remarquer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K = 1$. La figure 2 donne le graphe

de la fonction $f(x) = e^{-x} - e^{x-x/\varepsilon}$ en fonction de x pour deux valeurs de ε ($\varepsilon = 0.1$ et

$\varepsilon = 0.01$). Il est évident que la solution donnée par la relation (10) n'est acceptable que pour $\varepsilon \ll 1$, ce qui correspond dans la pratique à $(L/R) \ll RC$.

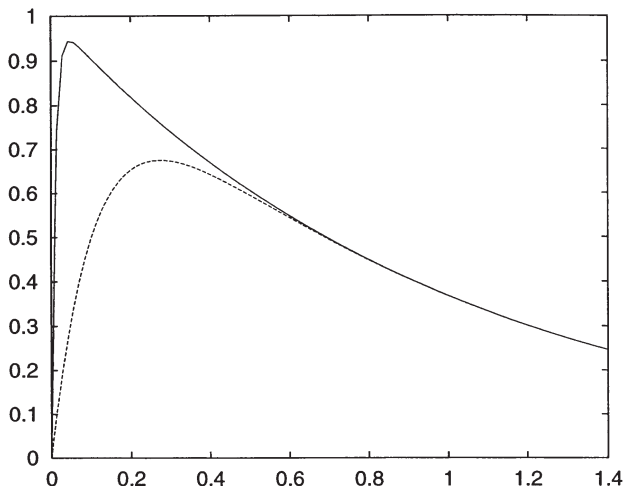


Figure 2 : Graphe de la fonction $f(x) = e^{-x} - e^{x-x/\tau}$ en fonction de x pour deux valeurs de ε ($\varepsilon = 0.1$: trait pointillé et $\varepsilon = 0.01$: trait continu). Comme on peut le voir sur la figure, pour $x = 1$ (correspondant au temps $\tau \approx RC$), la condition asymptotique conduisant à la relation (9) est atteinte.

Il est possible d'extraire deux temps typiques τ_1 et τ_2 pour le phénomène de décharge du condensateur. Le temps $\tau_2 = L/R$ représente le temps de montée du courant jusqu'à sa valeur maximum, tandis que le temps $\tau_1 = RC$ est typique de sa décroissance exponentielle depuis sa valeur maximum jusqu'à zéro.

3. EXPÉRIENCE ET RÉSULTATS

L'expérience de la décharge d'un condensateur dans une résistance peut être réalisée avec un banc de forte capacité, mais dans ce cas, l'intensité du courant de décharge peut atteindre des valeurs très élevées, difficilement mesurables. De plus, de telles expériences ne sont pas dénuées de risque, et c'est la principale raison pour laquelle nous avons utilisé un condensateur de faible valeur chargé sous une tension de quelques dizaines de volts.

3.1. Montage

Le montage est donné sur la figure 3. Le condensateur chimique choisi a une capacité de valeur $C = 4700 \mu F$ et une tension de polarisation maximum de 60 V. La tension de charge typique est de l'ordre de $V_0 = 30 V$. L'intensité du courant de décharge est me-

surée en enregistrant la chute de tension aux bornes d'une résistance connue, et de faible valeur ($R_m = 0.5 \Omega$).

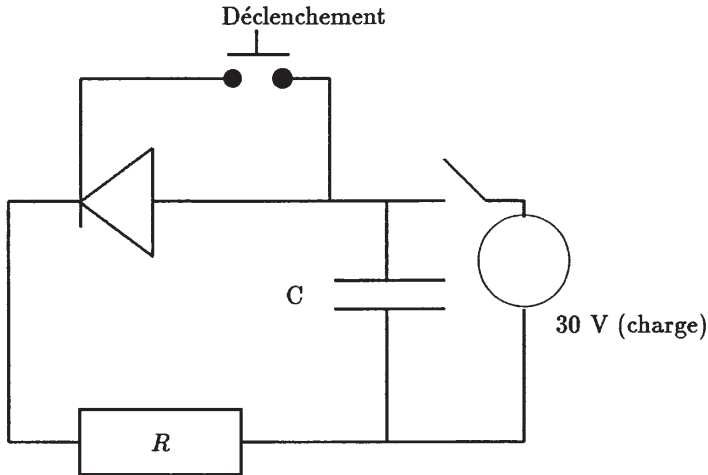


Figure 3 : Montage utilisé pour étudier la décharge d'un condensateur dans une résistance.

Pour déclencher la décharge, on utilise un thyristor avec un courant pic de 45 A. Cette valeur n'est pas du tout critique, car lors de nos essais, avec des courants de l'ordre de 1,5 kA, le thyristor ne fut jamais détruit. Un relais commandé par une tension continue de 6 V, placé dans le circuit gâchette du thyristor initialise la décharge. Ajoutons pour information, que d'autres types de déclencheurs tous aussi exotiques les uns que les autres ont été essayés : tapettes à souris... Nos différents essais ont montré que le thyristor constituait le meilleur interrupteur dans notre gamme de courant. Ajoutons enfin qu'il est nécessaire de limiter le courant de gâchette du thyristor à l'aide d'une résistance appropriée.

La chute de tension aux bornes de la résistance R_m est échantillonnée en fonction du temps avec un oscilloscope à mémoire numérique (LECROY 9314) possédant une bande passante de 350 MHz. Les données sont alors stockées sur mémoire de masse, puis traitées numériquement.

3.2. Résultats

Pour étudier le comportement du courant en fonction du temps, il est nécessaire de considérer deux bases de temps pour effectuer l'échantillonnage : une base de temps

faible avec une fréquence d'échantillonnage de 200 MHz, et une base de temps plus longue avec une fréquence d'échantillonnage de 0,2 MHz. L'intensité du courant en fonction du temps est donnée sur les figures 4 et figure 5.

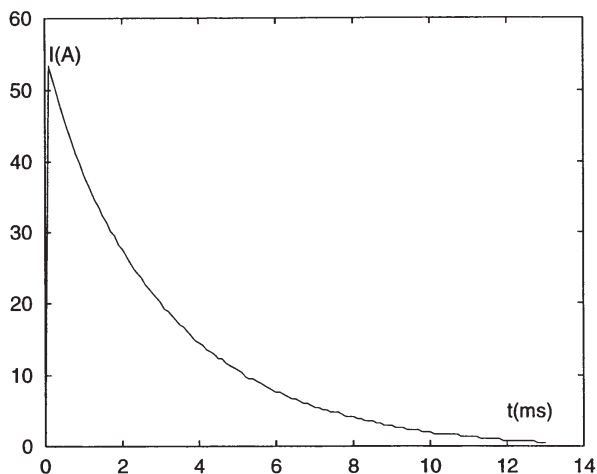


Figure 4 : Intensité du courant de décharge obtenu pour des temps longs, i.e. de l'ordre de RC.

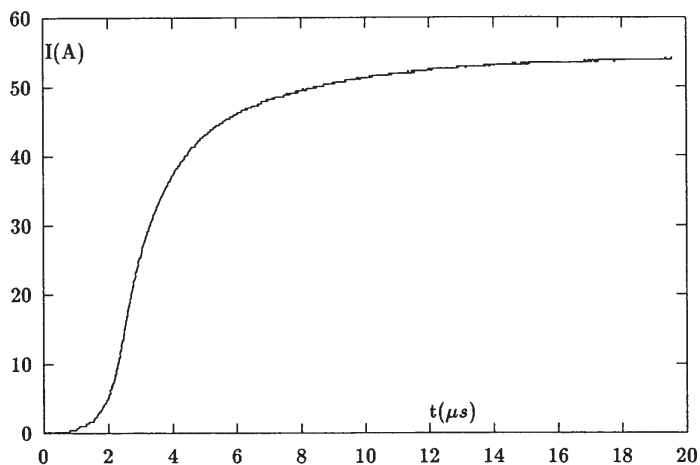


Figure 5 : Intensité du courant de décharge obtenu pour des temps courts, inférieurs à RC.

L'analyse de l'évolution du courant en fonction du temps montre une évolution rapide jusqu'à une valeur maximum de 55 A, avec un temps de l'ordre de 10 μs . Pour des temps supérieurs, on reconnaît la courbe exponentielle bien connue de la décharge du condensateur. En prenant le logarithme népérien des données enregistrées, il est possible de vérifier la validité de l'équation (10) à la fois pour les temps courts, et les temps élevés. Une procédure d'ajustement par les moindres carrés de $\ln(i)$ en fonction du temps est résumée dans le tableau 1.

Temps	0 – 25 μs	1 ms – 10 ms
Ajustage	$\ln(i) = -2,5 + 2,1057 t$ (t en μs)	$\ln(i) = 3,994 + 0,3287 t$ (t en ms)
Exploitation	$1 / (L / R) = 2.1057 \mu\text{s}^{-1}$	$1 / (RC) = 0.3287 \text{ ms}^{-1}$

Tableau 1 : Résultat de la procédure d'ajustage par les moindres carrés appliquée à $\ln(i)$ en fonction du temps t pour les temps courts et les temps longs. Il est possible de déterminer les valeurs de $1 / (L / R)$ et de $1 / (RC)$.

Comme la valeur de C est connue, on peut calculer les valeurs R et L en utilisant les données issues du tableau 1. On obtient $R = 0,647 \Omega$ (cette valeur inclut la valeur de la résistance R_m utilisée pour mesurer l'intensité du courant) et $L = 0,3 \mu\text{H}$.

Cette valeur de l'inductance propre L du circuit peut être comparée à une valeur théorique obtenue en considérant un circuit circulaire de rayon b fait avec des fils de rayon a . L est alors donnée par [4] :

$$L = \mu_0 b \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right). \quad (11)$$

Une évaluation grossière de b , en négligeant le thyristor est $b = 0,1 \text{ m}$ et le rayon des fils utilisés est $a = 0,002 \text{ m}$. L'équation (11) donne $L = 0,5 \mu\text{H}$, qui est en bon accord avec la valeur de L déterminée expérimentalement. La charge totale Q_0 mise en jeu lors de l'expérience peut être déterminée de deux façons. D'abord, en intégrant l'équation (9) entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$, et en négligeant le temps très court correspondant à la montée du courant, on obtient $Q_0 = I_0 RC$, où I_0 représente la valeur maximum de l'intensité du courant. Numériquement, on obtient $Q_0 = 0,1654 \text{ C}$. Ensuite, on peut appliquer la relation $Q_0 = VC$ avec $V = 39,5 \text{ V}$, ce qui donne $Q_0 = 0,185 \text{ C}$.

Les deux valeurs de Q_0 obtenues sont en bon accord, avec une précision relative de 10 %.

CONCLUSION

Dans cette étude, il est clairement montré le caractère uniforme de l'intensité du courant lors de la décharge d'un condensateur dans une résistance, qui s'oppose au schéma classique montrant une discontinuité en $t = 0$. D'un point de vue pratique, comme en physique des plasmas [5] par exemple, l'intensité du courant a presque toujours l'allure présentée sur la figure 2 avec $\varepsilon = 0,1$, à cause de l'inductance intrinsèque élevée des bancs de condensateurs utilisés.

BIBLIOGRAPHE

- [1] <http://www.eskimo.com/billb/amateur/capexpt.html>
(ce site présente des expériences utilisant des condensateurs).
- [2] A M PURCELL : «*Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course*» - vol. 2 (McGraw-Hill) - 1965 - pp. 138-139.
- [3] A H NAYFEH : «*Perturbation Methods, Pure and Applied Mathematics*» (John Wiley and Sons, New York) 1973 - pp. 31-33.
- [4] L D LANDAU and E M LIFCHITZ : «*Electrodynamics of Continuous Media, Course of Theoretical Physics*» - vol. 8 (Pergamon Press, New York) 1960 - pp. 136-139.
- [5] R H LOVBERG : «*Plasma Problems in Electrical Propulsion, Methods of Experimental Physics*» - vol. 9 - Part B (Academic Press, New York) - 1971 - pp. 272-273.