
Bulletin de l'Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

Physique non-linéaire et bifurcations

par Vincent BOURGES

Lycée Étienne Mimard - 32, rue Étienne Mimard
42021 Saint-Étienne Cedex 01

RÉSUMÉ

On s'occupe de plus en plus, et à juste titre, de physique non-linéaire. C'est en fait la physique préférée de la nature, mais elle n'admet que rarement de solutions analytiques, d'où sa mise à l'écart dont elle sort à peine. Et pourtant quelle richesse de comportements nous apporte-t-elle !

PHYSIQUE LINÉAIRE

On emploie le mot linéaire à propos de la physique en deux sens très différents :

- On peut l'employer d'abord dans le sens d'une application linéaire : y est fonction linéaire de x si y est proportionnel à x , ou, de façon plus générale, au sens du calcul algébrique linéaire, si le vecteur Y est obtenu à partir du vecteur X en le multipliant par une matrice A à coefficients constants, soit $Y = AX$; l'optique géométrique, qui constitue l'approximation linéaire de l'optique, peut être l'objet d'un traitement matriciel ; de même, on parle de milieux linéaires diélectriques ou magnétiques ; la loi d'Ohm locale qui est la loi constitutive d'un conducteur exprime la proportionnalité entre le vecteur densité de courant et le vecteur champ électrique ; la loi de Fourier du transfert thermique ou la loi de Fick de la diffusion sont également des relations de proportionnalité ; on pourrait multiplier les exemples.

• Mais il existe un autre sens au mot linéaire en physique, et c'est en général le sens employé lorsque l'on parle de «physique linéaire». C'est le *principe de superposition*, qui dit que la physique est linéaire si, *la solution 1 correspondant à la cause 1 et la solution 2 à la cause 2, la superposition des solutions 1 et 2 est la solution correspondant à la présence simultanée des causes 1 et 2.*

Les solutions satisfont alors à un système d'équations différentielles linéaires qui peut se mettre sous la forme générale :

$$\frac{dX}{dt} + A(t) X(t) = B(t),$$

où X , dX/dt et $B(t)$ sont des vecteurs à n dimensions et $A(t)$ une matrice $n \times n$, la cause extérieure étant contenue dans le terme $B(t)$;

si $X_1(t)$ est solution de la cause $B_1(t)$, on a :

$$\frac{dX_1}{dt} + A(t) X_1(t) = B_1(t),$$

si $X_2(t)$ est solution de la cause $B_2(t)$, on a :

$$\frac{dX_2}{dt} + A(t) X_2(t) = B_2(t),$$

alors $\frac{d(X_1 + X_2)}{dt} + A(t) (X_1 + X_2) = B_1(t) + B_2(t)$, ce qui signifie que $X_1 + X_2$ est solution lorsqu'il y a la somme des causes 1 et 2.

La physique d'une bonne partie de la mécanique de Newton est linéaire : si un corps est soumis à deux forces, son accélération est la somme des accélérations qu'il aurait eu séparément avec chacune des forces. C'est le cas également des équations de Maxwell de l'électromagnétisme et de l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique : c'est dire que c'est le cas d'une très grande partie de la physique que nous enseignons.

En fait, la physique est linéaire lorsque l'effet n'influe pas sur la cause. Quiconque a fait le TP sur la résonance d'un circuit RLC série s'est rendu compte qu'à la résonance, il y a une réaction du circuit qui change la valeur de la tension d'entrée et il faut ajuster celle-ci à chaque mesure ou mettre un amplificateur opérationnel suiveur qui va isoler l'alimentation du circuit ; l'étude de la réaction est en général du ressort de la physique non-linéaire.

LA PHYSIQUE NON-LINÉAIRE

Les phénomènes naturels sont le plus souvent irréguliers, chaotiques : citons les bruits, le mouvement Brownien, le climat, les cours de la bourse... C'est le domaine de la physique non-linéaire.

Là encore, deux sens sont donnés au terme non-linéaire :

- Soit il s'agit d'applications non-linéaires : les relations entre variables ne sont plus de simples relations de proportionnalité. Citons le frottement fluide du type $f = -\lambda v^2$, les milieux non-linéaires en optique ou en électromagnétisme, les dipôles non-linéaires du type diode ou thermistance en électrocinétique.
- Soit, dans le sens que l'on entend le plus souvent lorsque l'on parle de physique non-linéaire, les effets ne sont plus proportionnels aux causes. Il y a une réaction de la sortie sur l'entrée qui tend à augmenter ou diminuer les effets d'une cause donnée, et une petite cause peut avoir un grand effet.

Prenons l'effet Larsen du son diffusé par haut-parleur dont l'intensité augmente «en catastrophe» si le haut-parleur est près du microphone ; l'interprétation en est simple : le son sortant du haut-parleur est capté par le microphone et amplifié par le haut-parleur, puis capté à nouveau et amplifié plus fortement de sorte que l'on a un effet d'avalanche jusqu'à saturation du haut-parleur : on parlera de réaction positive.

Prenons comme autre exemple une réaction chimique autocatalytique : un des produits de la réaction est un catalyseur pour la réaction ; dans ces conditions, la réaction est lente au départ, puis elle accélère du fait de la production du catalyseur, et ce de plus en plus, jusqu'à ce que l'épuisement des réactifs ne la ralentisse. Là encore, on a une réaction positive, une influence du produit sur la vitesse. On peut avoir également des réactions négatives, comme les contre-réactions en électronique ; la réaction va en sens contraire du signal d'entrée et stabilise le système.

UNE PHYSIQUE DE SCÉNARIOS

Prenons un exemple simple : celui d'une bouteille que l'on vide. Si l'on penche un peu la bouteille, le liquide s'écoule de façon monotone, correspondant à un fonctionnement linéaire proche de l'équilibre. Si l'on augmente l'angle d'inclinaison, on passe à un régime non-linéaire oscillant où tantôt le liquide s'écoule, tantôt il s'arrête pour laisser entrer l'air dans la bouteille. Finalement, si l'on donne un mouvement de rotation au liquide avant d'incliner la bouteille, le liquide s'écoule de façon turbulente, donc chaotique. On distingue ainsi différents régimes suivant l'angle d'inclinaison qui joue le rôle de paramètre de contrôle et le système passe d'un régime à l'autre par une transition.

Comme on le voit dans l'exemple ci-dessus, le principal intérêt de la physique non-linéaire réside sans doute dans son aptitude à expliquer les scénarios *d'évolution* des problèmes complexes : un phénomène dépend le plus souvent d'un certain nombre de paramètres, appelés paramètres *de contrôle* qui, en variant, contrôlent l'évolution du système. Par variation des paramètres et du fait des non-linéarités, le système peut subir des *transitions*. En mathématiques, ce sont des *bifurcations*.

ESPACE DES PHASES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les lois de la physique sont formulées le plus souvent au moyen d'équations différentielles. On peut toujours se ramener à un système d'équations différentielles du premier ordre.

Prenons l'exemple d'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : il est soumis à la force de rappel du ressort et à un frottement proportionnel à la vitesse ; son équation différentielle est du type :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Posons $y = \dot{x}$; on a alors le système suivant : $\begin{cases} \dot{y} = -2\lambda y - \omega_0^2 x \\ \dot{x} = y \end{cases}$, de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -2\lambda & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'espace des phases est alors l'espace à deux dimensions avec la position en abscisse et la vitesse en ordonnée.

Si l'on prend un oscillateur forcé, son équation devient :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m \cos(\omega t)}{m}.$$

Le système différentiel devient alors, en posant $\Phi = t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = -2\lambda y - \omega_0^2 x - \frac{F_m \cos(\omega\Phi)}{m} \\ \dot{x} = y \\ \dot{\Phi} = 1 \end{array} \right.$$

l'espace de phase a pour dimension 3 avec $X = \begin{pmatrix} y \\ x \\ \Phi \end{pmatrix}$ et $\frac{dX}{dt} = f(X)$.

Une équation non autonome (où le temps intervient explicitement) se transforme donc en un système autonome (du type $\frac{dX}{dt} = f(X)$), mais son espace de phase a une dimension supplémentaire.

Dans l'espace des phases, une solution qui évolue au cours du temps est représentée par une courbe ; si l'espace des phases est à deux dimensions, deux courbes ne peuvent se couper en général ; en effet, si deux courbes se coupaient, alors on pourrait avoir deux évolutions différentes à partir des mêmes conditions initiales, ce qui est contraire au déterminisme de l'équation différentielle. Les solutions de l'équation différentielle ressemblent donc aux lignes d'écoulement d'un fluide qui ne peuvent se couper hors de points particuliers qui sont *les points critiques*.

LES POINTS CRITIQUES (OU POINTS SINGULIERS OU POINTS FIXES)

Pour un système autonome, du type $\frac{dX}{dt} = f(X)$, deux trajectoires ne peuvent se couper à un instant fini ; cependant, elles peuvent tendre vers la même position d'équilibre si les trajectoires aboutissent en un même point avec une vitesse nulle lorsque le temps tend vers l'infini. On a alors $\frac{dX}{dt} = f(X) = 0$ et X est un point critique. Pour un système linéaire, $f(X) = A X$ et si $f(X) = 0$, alors $X = 0$; le seul point critique possible est l'origine. Pour un système autonome non-linéaire, il peut y avoir plusieurs points critiques, mais, puisque $dX/dt = 0$, ces points critiques seront sur l'axe des abscisses.

Dans le cas du système linéaire, on peut diagonaliser la matrice A pour la mettre sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; la solution générale sera $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ et on va distinguer quatre sortes de points critiques suivant les valeurs de λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -3$$

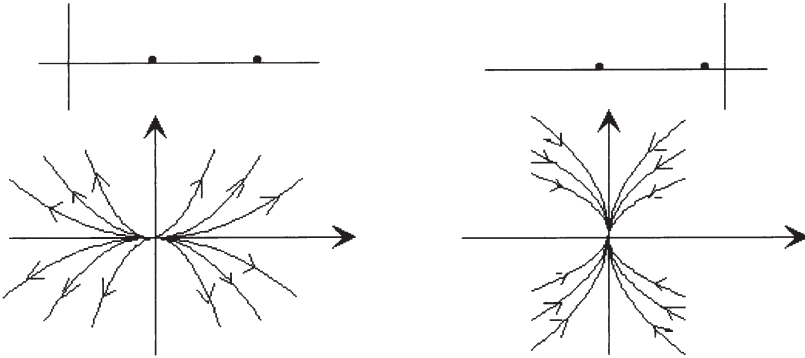
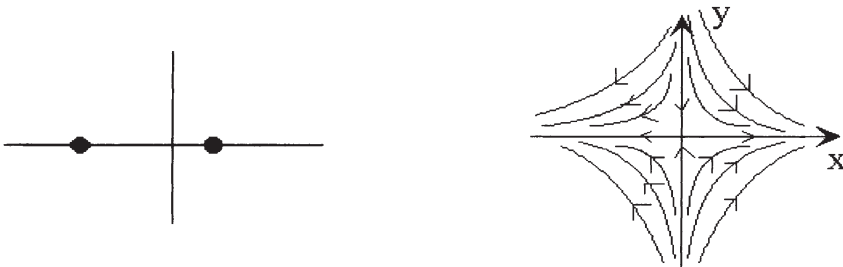


Figure 1

Si λ_1 et λ_2 sont réelles et de même signe, alors $|y| = c|x|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$, où c est une constante : le point fixe sera un **nœud** ; si λ_1 et $\lambda_2 > 0$, c'est un attracteur répulseur ou encore une source, et si λ_1 et $\lambda_2 < 0$, le nœud sera un attracteur positif ou encore un puits.

Figure 2 : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$.



Si les valeurs propres sont réelles mais de signe contraire, on aura un **point-col** (ou selle), stable sur un versant et instable sur l'autre. Un point-col sépare, dans l'espace de phase, deux domaines d'attraction.

Portrait de phase : oscillateur linéaire amorti.

Portrait de phase : oscillateur linéaire entretenu.

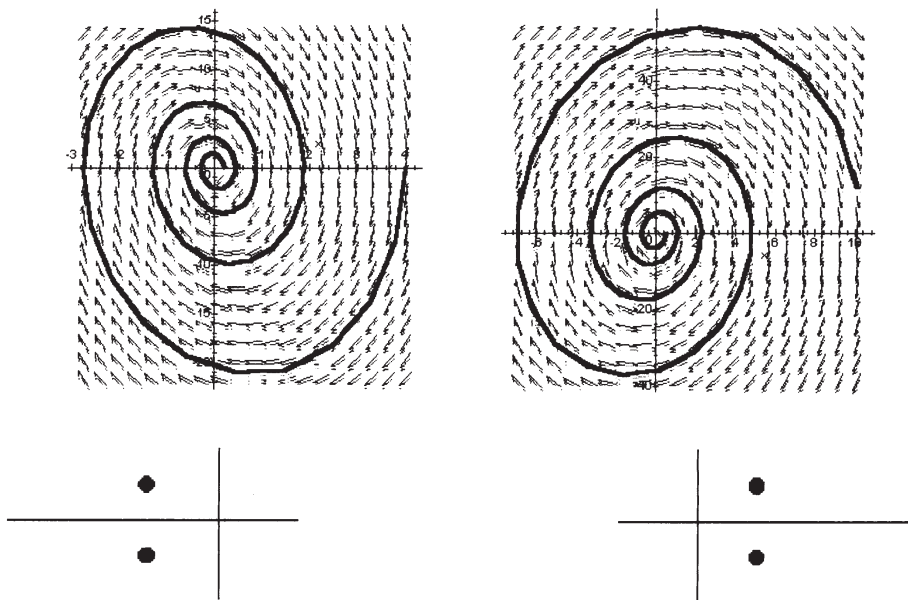


Figure 3

Si les valeurs propres sont complexes conjuguées, avec $\lambda = \mu \pm iw$, on aura un point fixe, qui sera un **foyer**, attracteur si $\mu < 0$, ou répulseur si $\mu > 0$. C'est le cas de l'oscillateur linéaire avec respectivement un amortissement ou un entretien.

On remarque sur la figure 3 qu'une droite passant par l'origine coupe la trajectoire de phase sous des angles égaux. Pour un système linéaire, les *isoclines* sont des droites passant par l'origine. On remarque également le sens de rotation qui est celui des aiguilles d'une montre ; en effet, si la vitesse est positive (demi-plan supérieur), le point se dirige vers la droite, et, si elle est négative, vers la gauche dans le demi-plan inférieur.

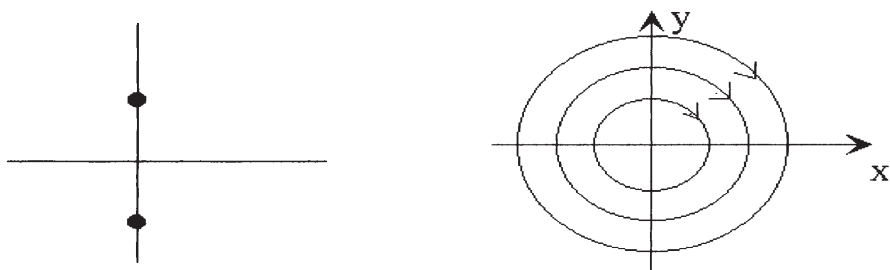


Figure 4

Enfin, si les valeurs propres sont imaginaires pures, on aura un **centre**. C'est le cas de l'oscillateur linéaire non amorti.

Si $+$ et $-$ correspondent aux signes des parties réelles de λ_1 et de λ_2 , un point attractif positif (nœud ou foyer) correspond à $(-, -)$, un attracteur négatif à $(+, +)$, un point-col à $(+, -)$, un centre à $(0, 0)$. Restent les cas $(-, 0)$ et $(+, 0)$ qui correspondent aux cycles limites, positif ou négatif. Ce sont les seuls cas possibles à deux dimensions, conformément au théorème de Poincaré-Bendixon. Comme exemple de cycle limite, prenons l'oscillateur de Van Der Pol.

OSCILLATEUR DE VAN DER POL

Les équations non-linéaires présentent des caractéristiques très intéressantes telles que l'existence de *solutions multiples*, la présence de *bifurcations*, le passage d'une solution à une autre par perte de *stabilité*...

Pourquoi alors le peu d'intérêt accordé dans l'enseignement à la physique non-linéaire ? La réponse en est simple : s'il est possible de trouver des solutions analytiques à beaucoup de problèmes linéaires, par contre les systèmes non-linéaires ne sont pas intégrables en général. On a étudié la physique linéaire parce qu'on savait le faire ! (et aussi parce que les machines fabriquées par l'homme fonctionnent souvent en régime linéaire). Et l'on a négligé les non-linéarités qui interviennent constamment dans la nature (voir le regain actuel d'intérêt pour le changement climatique et les cycles naturels) parce qu'on ne connaît pas de solution analytique aux problèmes non-linéaires. Pourtant on gagnerait beaucoup à les étudier.

Pour cerner quelques-uns des aspects des phénomènes non-linéaires, prenons l'équation de Van Der Pol, qui s'applique à un oscillateur entretenu du type pendule

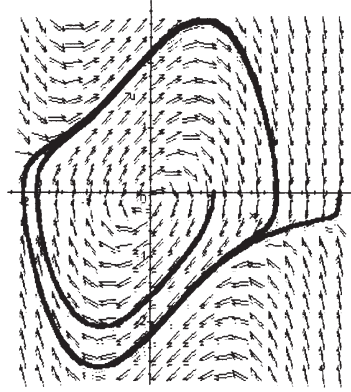


Figure 5 : Portrait de phase : oscillateur de Van Der Pol.

simple amorti d'amplitude faible auquel on injecte de l'énergie pour entretenir son mouvement.

Cette équation s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (h - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Elle diffère de l'équation différentielle linéaire de l'oscillateur amorti (avec $h < 0$) par la présence du terme non-linéaire $x^2 \frac{dx}{dt}$.

Si l'on part du voisinage de l'origine, on a x voisin de 0, et, si $h > 0$, x va augmenter en suivant une trajectoire dans l'espace des phases (x en abscisses et $\frac{dx}{dt}$ en ordonnée) qui va diverger en spirale.

D'autre part, si x est grand, le terme de frottement devient positif, il y a amortissement et x diminue en décrivant également une spirale ; on conçoit intuitivement que, sous l'influence contradictoire des deux termes, toute trajectoire dans l'espace des phases va tendre vers un cycle limite, qui est un attracteur périodique. Si h est petit, le cycle limite est pratiquement un cercle et les oscillations sont sinusoïdales ; si h devient plus grand, le cycle se déforme pour prendre une forme rectangulaire et les oscillations de-

viennent du type oscillations de relaxation avec variation brutale de l'amplitude suivi d'une phase lente.

Lorsque $h < 0$, l'origine est un point fixe stable, puisque le coefficient d'amortissement est < 0 quel que soit x ; lorsque h devient > 0 , le point origine devient instable puisqu'une petite perturbation fait passer l'oscillateur sur le cycle limite dont l'élongation augmente avec h . Pour $h = 0$, on a une *bifurcation*, correspondant à un changement de comportement de l'oscillateur, qui passe d'un point attracteur à un attracteur périodique.

OSCILLATEURS NON-LINÉAIRES - BIFURCATION NŒUD-COL

Voyons d'un peu plus près ce que sont les bifurcations sur l'exemple simple des oscillateurs non-linéaires à une dimension. Prenons pour commencer l'exemple d'un oscillateur amorti par frottement fluide et soumis à une force non-linéaire $f = \mu - x^2$; son équation est de la forme : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} - \mu + x^2 = 0$. La force dérive d'une énergie potentielle E_p telle que $f = -\frac{dE_p}{dx}$, soit $E_p = \mu x + \frac{x^3}{3}$ (en supposant $E_p = 0$ pour $x = 0$), qui possède des extrema pour $x = \pm\sqrt{\mu}$, à condition que $\mu \geq 0$, ce qui nous donne les deux courbes suivantes (voir figure 6).

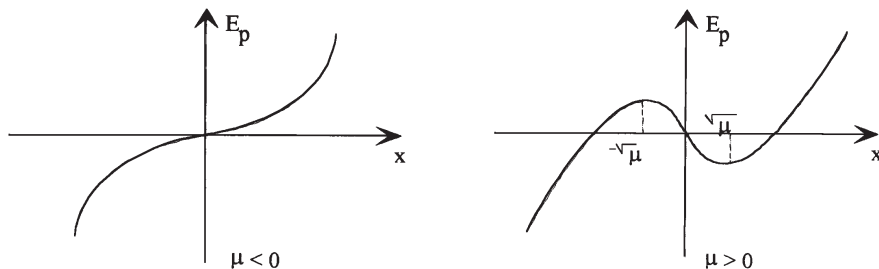


Figure 6

On peut tracer les portraits de phase correspondant, où figurent des flèches donnant le sens du champ et deux exemples de morceaux de trajectoires se dirigeant vers les attracteurs (voir figure 7).

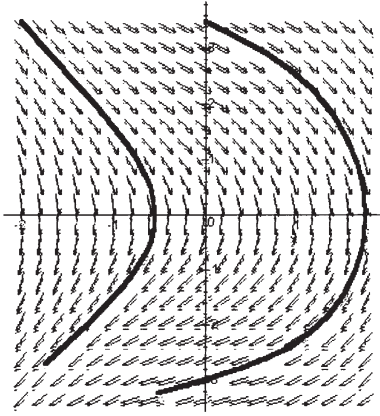
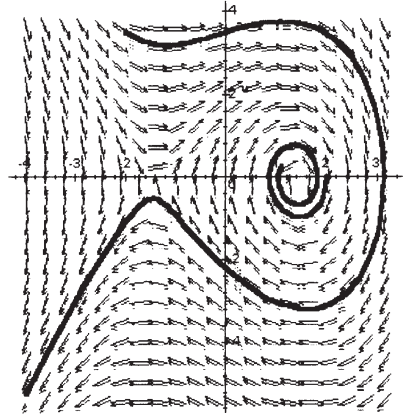
Portrait de phase : $f = -2 - x^2$ Portrait de phase : $f = 2 - x^2$ 

Figure 7

Du fait de l'amortissement, on voit d'après la courbe donnant l'énergie potentielle que le système terminera sa course au fond du creux (foyer attracteur), ou qu'il ira vers $x = -\infty$ avec une vitesse de plus en plus grande en valeur absolue, et négative.

Pour $\mu < 0$, il n'y a pas de position d'équilibre ; pour $\mu > 0$, on a deux positions d'équilibre, l'une stable, au centre du tourbillon (correspondant au foyer attracteur), l'autre instable (c'est le point-col).

Si l'on trace en fonction du paramètre de contrôle μ , l'abscisse des points critiques correspondant aux positions d'équilibre, stable (en trait gras) pour un minimum de l'énergie potentielle et instable (en pointillés) pour un maximum, on obtient le *diagramme de bifurcation* : $\mu = 0$ est le point de bifurcation d'où émergent deux branches, l'une stable et l'autre instable. A μ constant, au voisinage des positions d'équilibre, x se rapproche ou s'éloigne des positions d'équilibre en suivant les flèches. C'est un exemple de bifurcation *nœud-col* (ou selle-nœud) correspondant à un changement de régime de la solution.

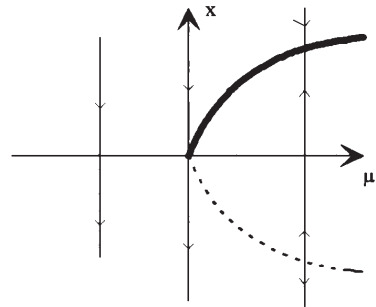


Figure 8

BIFURCATION AVEC ÉCHANGE DE STABILITÉ

Supposons maintenant que la force ait pour expression $f = \mu x - x^2$; l'équation différentielle de l'oscillateur devient $m\ddot{x} + kx - \mu x + x^2 = 0$ et l'énergie potentielle ($E_p = -\mu \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ constante d'intégration nulle), dont les extrema vérifient $x(\mu - x) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = \mu$, ce qui donne les deux courbes suivantes (voir figure 9).

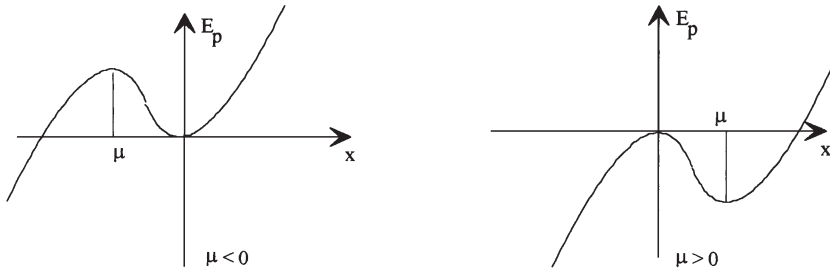


Figure 9

Pour $\mu < 0$, la position d'équilibre est stable pour $x = 0$, et instable pour $x = \mu$; pour $\mu > 0$, la position d'équilibre est instable pour $x = 0$, et stable pour $x = \mu$; il y a donc échange de stabilité, d'où le nom de bifurcation *avec échange de stabilité*.

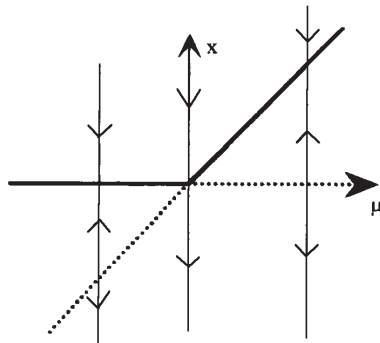


Figure 10

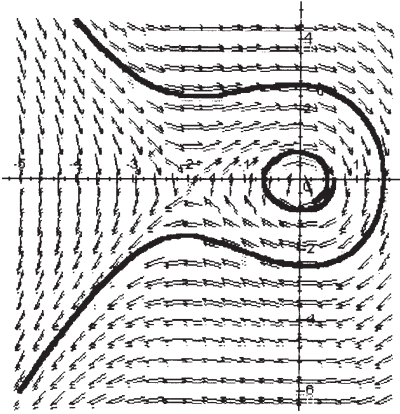
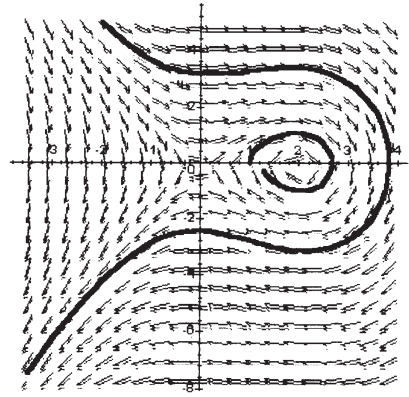
Portrait de phase : $f = -2x - x^2$ Portrait de phase : $f = 2x - x^2$ 

Figure 11

BIFURCATION FOURCHE

Continuons en prenant pour force $f = \mu x - x^3$, soit l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} + \lambda x - \mu x + x^3 = 0 ;$$

ce serait l'équation de l'oscillateur harmonique sans le terme en x^3 et avec $\mu < 0$. On a alors $E_p = -\mu \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ qui possède des extrema pour $x(\mu - x^2) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\mu}$ si $\mu \geq 0$; on a alors les deux courbes suivantes (voir figure 12).

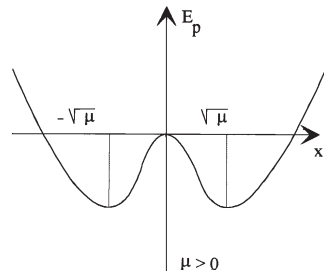
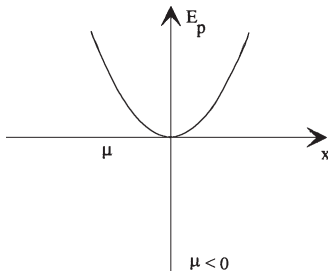
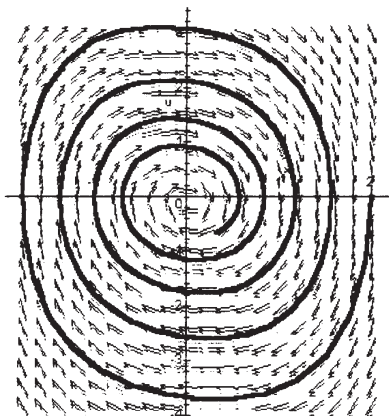


Figure 12

Le portrait de phase aura l'allure suivante : pour $\mu < 0$, il ressemble à celui de l'oscillateur linéaire avec $\lambda > 0$; lorsque μ devient positif, on a passage d'un à deux tourbillons tournant dans le même sens avec deux puits et un point-col.

Portrait de phase : $f = -2x - x \wedge 3$



Portrait de phase : $f = 2x - x \wedge 3$

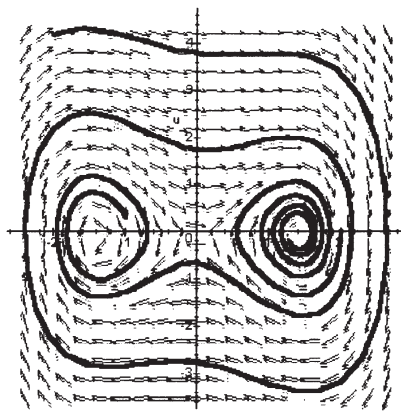


Figure 13

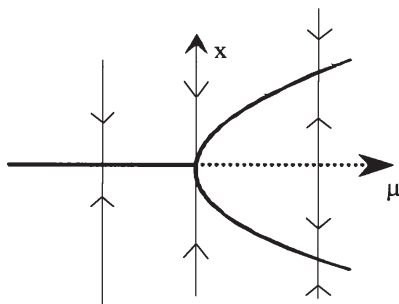


Figure 14

Si $\mu < 0$, on a un point fixe stable pour $x = 0$; pour $\mu > 0$, on a un point fixe instable (point-col) pour $x = 0$ et deux points fixes stables (puits) pour $x = \pm \sqrt{\mu}$. La bifurcation, vue sa forme, est appelée bifurcation *fourche*.

BIFURCATION DE HOPF

Il existe un équivalent à deux dimensions (ou en complexes) de la bifurcation fourche qui est la bifurcation de Hopf.

Considérons le système décrit par les deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \lambda\dot{x} - (\mu - (x^2 + y^2))x = 0 \\ m\ddot{y} + \lambda\dot{y} - (\mu - (x^2 + y^2))y = 0 \end{cases}$$

ou en complexes, $\ddot{z} + \lambda\dot{z} - (\mu - |z|^2)z = 0$.

La force dérive de l'énergie potentielle E_p telle que :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x} = (\mu - (x^2 + y^2))x,$$

et :
$$-\frac{\partial E_p}{\partial y} = (\mu - (x^2 + y^2))y,$$

soit :
$$E_p = -\frac{\mu(x^2 - y^2)}{2} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{4}.$$

Les extrema correspondent à $x(\mu - (x^2 + y^2)) = 0$ et $y(\mu - (x^2 + y^2)) = 0$, soit $x = y = 0$, et $x^2 + y^2 = \mu$ qui est l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{\mu}$ dans le cas $\mu > 0$. D'où les surfaces (voir figure 15).

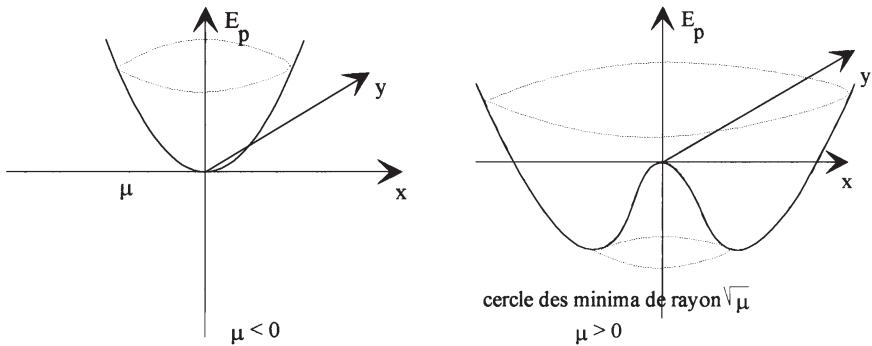


Figure 15

Si $\mu < 0$, $x = y = 0$ est un point fixe stable. Si $\mu > 0$, l'origine est devenue instable, et l'on a le cycle limite stable $x^2 + y^2 = \mu$. C'est une bifurcation de *Hopf*, que l'on retrouve par exemple dans l'oscillateur de Van Der Pol pour de faibles amplitudes du cycle limite.

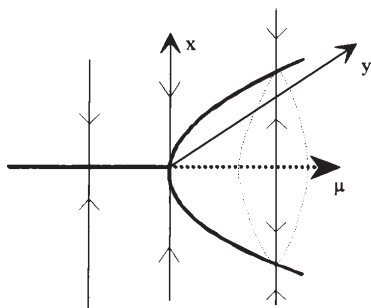


Figure 16

BIFURCATIONS SOUS-CRITIQUES

Les formes envisagées ci-dessus correspondent à des situations sur-critiques, ou normales.

Si on change le signe du terme non-linéaire d'ordre le plus bas, on retrouvera la même situation que précédemment en changeant le signe de μ et en échangeant la stabilité et l'instabilité ; on obtiendra alors des bifurcations *sous-critiques*.

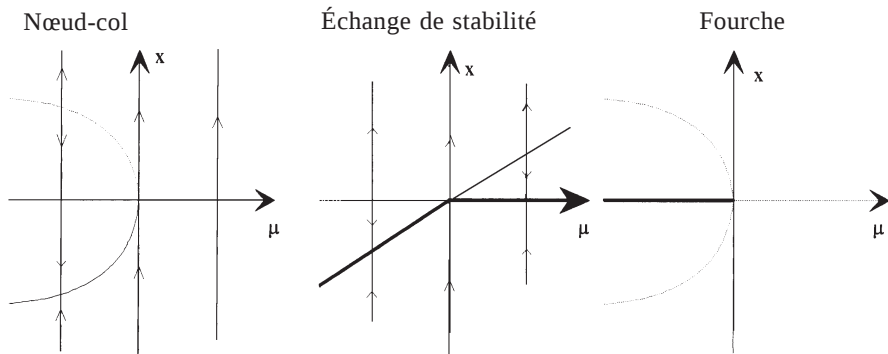


Figure 17

ITÉRATIONS

Il existe une autre façon de suivre l'évolution d'un système déterministe : c'est la *dynamique discrète*, au moyen d'une itération. On suit le système à intervalles de temps discrets, par exemple toutes les secondes, et l'itération est le procédé qui permet de passer d'un point au point suivant.

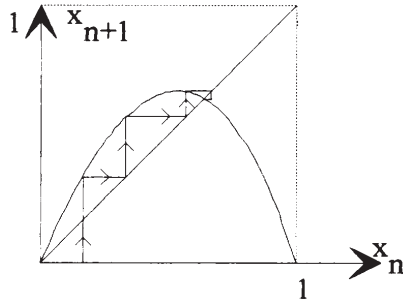


Figure 18

A une dimension, l'itération est susceptible d'une interprétation géométrique simple : étant donné un point sur la courbe donnant l'itération, il suffit de ramener par une horizontale le point sur la bissectrice $y = x$, puis revenir sur la courbe par une verticale pour avoir le point suivant : sur la figure 18, on prend pour exemple la célèbre application logistique : $kx_n(1 - x_n)$, où k est compris entre 0 et 4.

Avec cette interprétation géométrique, on peut voir les points critiques et les bifurcations directement à l'œuvre (voir figure 19).

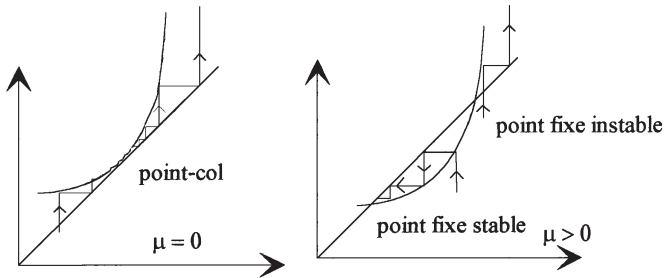


Figure 19 : Bifurcation nœud-col.

Supposons que la courbe descende lorsque le paramètre de contrôle augmente. On a alors une bifurcation nœud-col : le point-col, correspondant à la courbe tangente pour $\mu = 0$, se sépare en deux points fixes, l'un stable et l'autre instable, lorsque la courbe coupe la bissectrice.

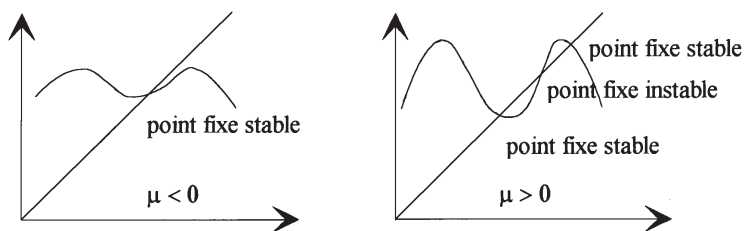


Figure 20 : Bifurcation fourche.

Dans la bifurcation fourche, le point fixe stable devient instable et donne naissance à deux points fixes stables lorsque le maximum et le minimum traversent la bissectrice.

APPLICATIONS PHYSIQUES

Citons pêle-mêle quelques bifurcations de systèmes physiques à deux dimensions :

- En mécanique, si un point peut glisser sans frottement sur un cercle vertical, et si l'on fait tourner le cercle autour de son diamètre vertical, le point reste à sa position d'équilibre initiale en bas du cercle tant que la vitesse de rotation du cercle n'atteint pas une valeur critique ω_c . Lorsque cette valeur est atteinte, le point s'écarte et prend une nouvelle position d'équilibre qui est un point fixe stable, l'origine devenant instable (voir [1]). Il s'agit là d'une bifurcation fourche, le système choisissant au hasard une branche ou l'autre du cercle. La symétrie initiale est *brisée* par le choix du système.
- En électronique, on peut simuler avec des composants appropriés à peu près n'importe quelle équation différentielle et donc observer les bifurcations (voir [2]).
- Le phénomène d'hystérésis résulte de deux bifurcations successives, par exemple une bifurcation fourche sous-critique et une bifurcation nœud-col. Dans un certain domaine du paramètre de contrôle, on a bistabilité, c'est-à-dire présence de deux points fixes stables ; le système emprunte un chemin en montant et un autre en descendant.
- Dans un espace des phases à trois dimensions, le théorème de Poincaré-Bendixon ne s'applique plus, car l'on n'a pas à trois dimensions les contraintes topologiques du plan ; en particulier, les courbes peuvent se croiser sans se couper en passant à côté, et ceci entraîne une nouvelle possibilité qui n'existe pas dans un espace des phases à deux dimensions : c'est l'existence d'*attracteurs étranges*, générateurs de *chaos*. Ils

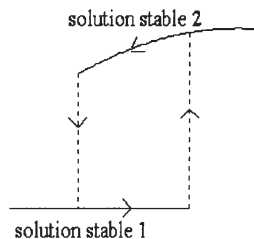


Figure 21

correspondent au cas $(+, 0, -)$. Un des scénarios possibles lors du passage d'un mouvement régulier à un mouvement chaotique est la «cascade sous-harmonique», observée par exemple dans la convection de Rayleigh-Bénard ou les réactions chimiques oscillantes de Belousov-Zhabotinsky. Il s'agit d'une suite de bifurcations fourche qui double à chaque étape, de plus en plus rapprochée, le nombre de points fixes.

CONCLUSION

La physique linéaire est un modèle très utile pour la compréhension de nombreux phénomènes dont les effets sont proportionnels aux causes. Mais elle est loin d'épuiser la physique et même le ressort, qui est l'exemple type du linéaire, se comporte non-linéairement si l'on tire trop fort !

Tous les phénomènes complexes, avec leurs multiples interactions, participent au non-linéaire, dont l'étude commence à deux dimensions avec les points critiques et les bifurcations et se continue avec un comportement beaucoup plus riche à trois dimensions ou plus. On peut parier sans gros risque de se tromper, que ce sera un des principaux axes de recherche dans les années à venir.

NB : Les portraits de phase ont été tracés sous MAPLE avec la commande phase-portrait [3].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Daniel BERNARD : «*Mécanique 2*» - Masson (collection SUP Maruani) p. 115.
- [2] Bulletin de l'Union des Physiciens - M. KROB : «Exemple d'oscillateurs non-linéaires» - Cahier enseignement supérieur 1996, p.131.
- [3] Bulletin de l'Union des Physiciens - V. BOURGES : «*Utilisation de Maple en simulation*» - décembre 1997, p. 2125.
- [4] Ferdinand VERHULST : «*Nonlinear differential equations and dynamical systems*» (Springer, 1990, 1996).
- [5] Mécanique I (Hachette, collection prépa., première année, MPSI, PCSI, PTSI 1996).
- [6] BERGÉ, POMEAU et VIDAL : «*L'ordre dans le chaos*» - Hermann, 1988, 1992.
- [7] PEITGEN, JÜRGENS et SAUPE : «*Fractals for the classroom*» - Springer-Verlag, 1992.