Étude du circuit R, L, C série, au moyen du diagramme d'Argand de la tension aux bornes d'un des éléments

par Serge DERIBLE
Enseignant-chercheur
Université du Havre
25, rue Ph. Lebon - 76600 Le Havre

RÉSUMÉ

Depuis toujours, le circuit R, L, C série a inspiré de nombreux collègues, tant pour les séances de travaux pratiques que pour les exercices ou les épreuves de baccalauréat. Plus récemment, l'utilisation de l'ordinateur a rendu possible une meilleure illustration de nombreux points qui sinon, n'auraient été abordés que sur le plan théorique ou bien complètement oubliés. Dans la perspective d'une meilleure exploitation de l'ordinateur en sciences physiques, il est développé ici, un aspect qui ne semble pas avoir été utilisé comme il paraît le mériter.

CIRCUIT R, L, C SÉRIE EN RÉGIME FORCÉ SINUSOÏDAL PERMANENT.

Rappels

Soit une f.é.m. de valeur efficace E et de pulsation ω alimentant une bobine (inductance : L, résistance : r), en série avec un condensateur (capacité : C) et une résistance R. Il est bien connu que la tension aux bornes de la résistance R peut s'écrire sous la forme complexe :

$$\underline{U_R}\,(\omega) = \frac{R}{R+r}\,\frac{E}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}. \qquad (1)$$

La pulsation de résonance et le facteur de qualité vérifient les relations classiques :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{(R+r)\,C\omega_0} \qquad \text{et} \qquad LC\omega_0^2 = 1.$$

L'usage le plus répandu est d'étudier la tension efficace aux bornes de R et son déphasage par rapport à la tension d'alimentation. Ces grandeurs sont bien sûr le module et l'argument de $\underline{U_R}(\omega)$:

$$U_R(\omega) = \frac{R}{(R+r)} \cdot \frac{E}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \tag{2}$$

$$\varphi(\omega) = Arc\ \tan\left(-Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right). \tag{3}$$

Ces expressions, bien vérifiées par l'expérience, font l'objet de travaux pratiques. La tension efficace aux bornes de R atteint son maximum : $U = \frac{R}{R+r}E$ à la pulsation de résonance. On détermine les pulsations, ω_+ *et* ω_-, pour lesquelles $U_R(\omega) = \frac{U}{\sqrt{2}}$ ou $\varphi(\omega) = \mp\frac{\pi}{4}$, et qui s'écrivent :

$$\omega_\pm = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q}\right).$$

On obtient alors :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \tag{4}$$

qui sert parfois de définition du facteur de qualité du circuit.

DIAGRAMME D'ARGAND DE $\underline{U_R}$ (ω)

On désigne ainsi la représentation dans le plan complexe (plan d'Argand) de la tension $\underline{U_R}(\omega)$ paramétrée en ω. En remarquant que : $\underline{U_R}(\omega) = \frac{U}{1 - j\ \tan\left(\varphi\ (\omega)\right)}$, on a alors :

$$\underline{U_R}(\omega) = \frac{U}{2}\left(I + \exp\ (2j\varphi\ (\omega))\right). \tag{5}$$

En conséquence, les parties réelle et imaginaire de $\underline{U_R}(\omega)$ s'écrivent :

$$re(\omega) = \frac{U}{2}\left(1 + \cos\ (2\varphi\ (\omega))\right), \tag{6}$$

$$im(\omega) = \frac{U}{2} \sin \; (2\varphi \; (\omega)). \qquad (7)$$

La relation (5) met bien en évidence que le diagramme d'Argand de $\underline{U_R}(\omega)$ est un cercle de rayon $\frac{U}{2}$ et de centre positionné sur l'axe réel en $\frac{U}{2}$. A titre d'exemple, la figure 1 présente le sens de parcours à pulsation croissante et les positions de ω_-, ω_0 et ω_+. Par une simple lecture des pulsations sur le cercle, on peut donc retrouver les valeurs caractéristiques du circuit, ω_0 et Q.

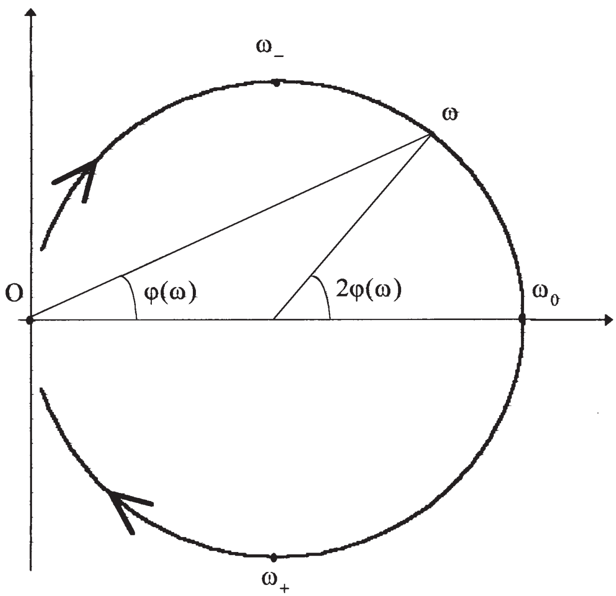


Figure 1 : Diagramme d'Argand de $\underline{U_R}(\omega)$.

Le tracé point par point (théorique ou expérimental) du diagramme d'Argand met en évidence que pour un pas de pulsation donné, la distance entre deux points consécutifs n'est pas constante. Il est donc intéressant d'exprimer le taux de croissance de l'abscisse curviligne (notée s) à une pulsation *ω* quelconque :

$$\frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\left(\frac{dre(\omega)}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{\dim(\omega)}{d\omega}\right)^2} = U \left|\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\right| = U \frac{Q}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2}\right). \qquad (8)$$

L'expression obtenue passe par un maximum à $\omega = \omega_0$ et ce maximum vaut :

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)_{\max} = U\,\frac{2Q}{\omega_0}. \tag{9}$$

On en conclut que Q peut être déterminé sans l'aide de ω_- et ω_+, mais uniquement à partir des points voisins de la résonance par la relation :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\,U}\left(\frac{ds}{d\omega}\right)_{\max}. \tag{10}$$

Cette propriété du diagramme d'Argand peut faire l'objet d'une détermination expérimentale. Il suffit de relever les pulsations pour lesquelles la tension efficace aux bornes de R passe par son maximum et pour lesquelles son déphasage par rapport à la tension d'alimentation change de signe. La détermination se fait aisément avec le matériel habituel de TP (générateur basse fréquence et oscilloscope cathodique). Il est à noter que dès que ω_0 est déterminé (déphasage nul), seuls deux points de part et d'autre de ω_0 suffisent à l'obtention de Q à partir de la relation (10).

Le diagramme d'Argand de la tension aux bornes de la résistance du circuit R, L, C permet donc de retrouver toutes les propriétés habituellement exploitées. Mais il permet, en plus, une détermination «locale» du facteur de qualité, c'est-à-dire uniquement avec les points les plus voisins de la résonance.

CIRCUIT R, L, C SÉRIE EN RÉGIME LIBRE

Ce sujet fait lui aussi l'objet d'une abondante publication. On se propose d'en faire une analyse spectrale au moyen du diagramme d'Argand de la tension aux bornes du condensateur. L'étude est réalisée avec les éléments précédents. Le condensateur, chargé sous une tension continue E, est déchargé à partir de t = 0, dans la bobine en série avec la résistance R. On procède à l'enregistrement du signal temporel $u_C(t)$ qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2\,u_C(t) = 0. \tag{11}$$

On étudie le régime oscillatoire amorti de pseudo-pulsation Ω_0 vérifiant $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$:

$$\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \tag{12}$$

La solution de l'équation (11) s'écrit :

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\, t\right) \cos\,(\Omega_0 t). \tag{13}$$

La technique de détermination de ω_0 et Q à partir de l'expression (13) est connue (mesure de la pseudo-période et du décrément logarithmique).

On peut accéder aux valeurs de ω_0 et Q par une étude en fonction de la pulsation. En effet, la transformation de Fourier, restreinte aux pulsations positives, appliquée à $u_C(t)$, permet d'obtenir l'expression complexe suivante :

$$\underline{U_C}(\omega) = KE\, \frac{Q}{\omega_0}\, \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{\omega - \Omega_0}{\dfrac{\omega_0}{2Q}}\right)}. \tag{14}$$

K est un facteur constant, dépendant de la définition de la transformation de Fourier utilisée (valeur disponible dans la documentation du logiciel). On peut extraire le module $U_C(t)$ et l'argument $\varphi(\omega)$:

$$U_C(\omega) = KE\, \frac{Q}{\omega_0}\, \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega - \Omega_0}{2Q}\right)^2}}, \tag{15}$$

$$\varphi(\omega) = -Arc\,\tan\left(\frac{\omega - \Omega_0}{\dfrac{\omega_0}{2Q}}\right). \tag{16}$$

Par une démarche analogue au paragraphe précédent, on obtient :

$$\underline{U_C}(\omega) = \frac{1}{2}\, KE\, \frac{Q}{\omega_0}\, \big(1 + \exp\,(2j\varphi(\omega))\big). \tag{17}$$

Le diagramme d'Argand de cette expression est un cercle passant par l'origine (figure 2), son centre est situé sur l'axe réel et son diamètre vaut :

$$D = KE\,\frac{Q}{\omega_0}. \qquad (18)$$

Le cercle est décrit à pulsation croissante dans le sens anti-trigonométrique. Dans certains cas traités en annexes, il est possible d'obtenir des représentations différentes.

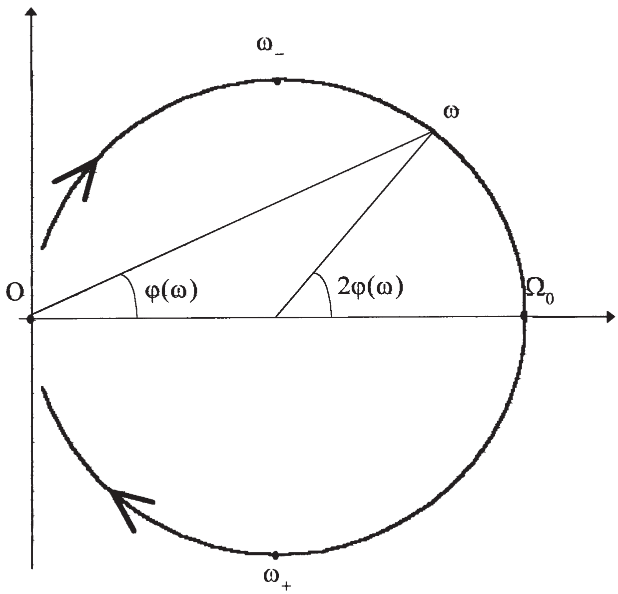


Figure 2 : Diagramme d'Argand de $\underline{U}_C(\omega)$.

Trois points jouent un rôle important permettant la détermination de ω_0 et Q. Tout d'abord, la pulsation Ω_0 correspond au point du cercle de valeur réelle maximale. Les deux points situés un quart de tour avant, et après ce point, ont pour pulsation ω_- et ω_+ vérifiant pour le régime libre $\left(\tan\ (\varphi\ (\omega_\mp)) = \mp\ 1\right)$:

$$\omega_\pm = \omega_0 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \right). \qquad (19)$$

On retrouve la possibilité d'exprimer Q selon la relation (4), bien que les valeurs des pulsations, positionnées de la même manière sur le cercle, ne vérifient pas des expressions identiques. La pulsation ω_0, caractéristique du circuit est alors issue de la relation (12).

L'abscisse curviligne sur le cercle jouit de propriétés similaires (mais non rigoureusement identiques) à celles mises en évidence au paragraphe précédent. En effet, il vient :

$$\frac{ds}{d\omega} = KE\,\frac{Q}{\omega_0}\left|\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\right| = 2\,KE\left(\frac{Q}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\Omega_0}{\dfrac{\omega_0}{2Q}}\right)^2}. \qquad (20)$$

Cette expression atteint un maximum à la fréquence Ω_0, de valeur :

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)_{\max} = 2\,KE\left(\frac{Q}{\omega_0}\right)^2. \qquad (21)$$

Cette relation permet une détermination «locale» de Q et de ω_0, car une fois obtenue Ω_0 vérifiant la relation (12), la mesure sur le cercle de $\left(\dfrac{ds}{d\omega}\right)_{\max}$ à la résonance, permet d'obtenir l'équation supplémentaire nécessaire.

Comme on vient de le voir, l'étude d'un sujet très classique avec de nouveaux outils, permet de retrouver les possibilités habituelles et de mettre en évidence des propriétés peu ou pas exploitées. Les similitudes entre l'étude en régime harmonique forcé et par la transformation de Fourier de la réponse libre sont retrouvées.

Le lecteur intéressé trouvera dans de nombreux bulletins des propositions émanant de collègues pour procéder à l'acquisition informatique et à l'exploitation des résultats expérimentaux. Les fournisseurs offrent d'ailleurs des outils de plus en plus performants et faciles à mettre en œuvre.

Annexe 1

SIGNE UTILISÉ POUR LE CALCUL DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Le signe utilisé pour calculer la transformée de Fourier d'un signal temporel dépend de la façon retenue pour écrire les signaux réels et du choix conventionnel de ne parler que de pulsations positives. Soit la réponse libre d'un système enregistrée à partir de t = 0 ; elle s'écrit :

$$f(t) = A \exp(-\mu t) \cos(\omega_0 t)\, h(t)$$

où *h(t)* est la fonction de Heaviside valant 0 pour t < 0 et 1 autrement. La transformée de Fourier provient du calcul :

$$F(\omega) = K \int_0^{\infty} f(t) \exp(\varepsilon j \omega t)\, dt$$

et donne après avoir exprimé le cosinus en fonction d'exponentielles complexes :

$$F(\omega) = \frac{1}{2} KA \left(\frac{-1}{-\mu + j(\omega_0 + \varepsilon\omega)} \right) + \frac{1}{2} KA \frac{-1}{-\mu + j(\omega_0 + \varepsilon\omega)}.$$

On sait que la résonance se traduit par l'annulation de la partie imaginaire du dénominateur. Soit :

$$(\omega_0 + \varepsilon\omega) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (-\omega_0 + \varepsilon\omega) = 0.$$

Seules, les pulsations positives ont une signification physique. Aussi, ces expressions ne pourront être satisfaites simultanément et une seule d'entre elles interviendra quand ε sera fixé. En conséquence, dans l'expression $F(\omega)$, étudiée pour $\omega > 0$, un des termes de la somme est toujours prépondérant. On vérifiera alors que selon la valeur de ε, les diagrammes d'Argand de $F(\omega)$ sont des cercles géométriquement identiques mais décrits en sens contraires à pulsation croissante. Les propriétés mises en évidence pour déterminer les caractéristiques du circuit, sont applicables quel que soit le cercle obtenu.

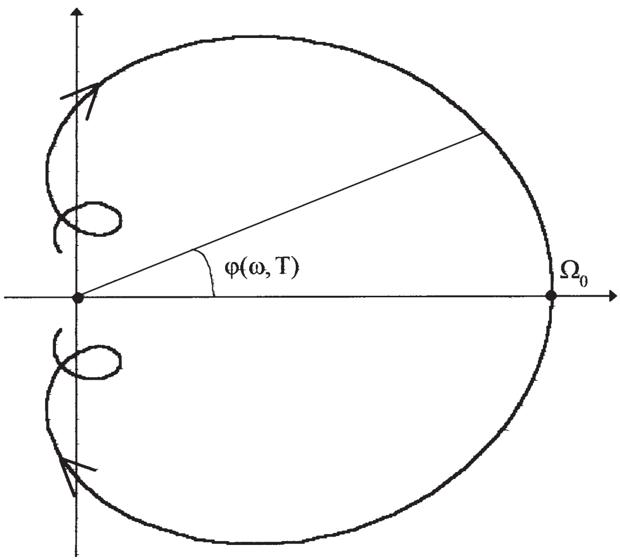
Annexe 2

TRANSFORMATION DE FOURIER D'UNE RÉPONSE LIBRE TRONQUÉE

Il faut prendre garde de calculer la transformée de Fourier de la totalité de la réponse libre, c'est-à-dire en prenant les échantillons jusqu'à ce qu'ils soient les plus voisins de 0. Si la réponse *f(t)* précédente est enregistrée pendant la durée *T*, sa transformation de Fourier vaudra :

$$F(\omega) = K \int_0^T f(t) \exp(-j\omega t)\, dt = \frac{1}{2} KA \, \frac{\exp(\mu T) \exp\big(j(\Omega_0 - \omega) T\big) - 1}{-\mu + j(\Omega_0 - \omega)}.$$

Le diagramme d'Argand n'est plus un cercle mais a la forme présentée ci-dessous.



Seule la détermination de Ω_0 peut se faire selon la méthode exposée plus haut. L'abscisse curviligne passe par un maximum à la résonance et le point correspondant est toujours le maximum obtenu sur l'axe réel. Par contre, les déterminations de ω_+ et ω_- qui ne correspondent plus à des points particuliers, sont beaucoup plus délicates. Dans le cas d'un signal temporel tronqué, l'obtention de *Q*, néanmoins possible, doit passer par un traitement mathématique numérique qui ne sera pas développé ici.