

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

CORRIGÉ

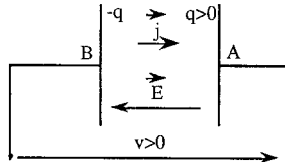
par René MOREAU
et les membres du jury

Etude préliminaire

1.a. $q = C v$.

Le vecteur champ électrique a pour sens celui qui va des charges positives vers les charges négatives. Pour $v > 0$, la relation précédente montre que la charge q de la plaque A est positive. La composante E du vecteur $\vec{E}$ sur l'axe Ox est donc négative (fig.1).

Figure 1



Comme l'épaisseur e est positive, le produit $E \cdot e$ est donc négatif ; on a donc $E \cdot e = -v$.

1.b. $dW = v dq$ or $q = C v$ et donc $dq = C dv$; donc $dW = C v dv$.

On a donc $\frac{dW}{dv} = C v$. W est la primitive de $C v$ qui s'annule pour $v = 0$, donc $W = \frac{1}{2} C v^2$.

2.a. Avec les conventions choisies :

$$i = \frac{dq}{dt} = c \frac{dv}{dt} = -C V \omega \sin(\omega t) = -\frac{V}{X(\omega)} \sin(\omega t) \text{ avec } X(\omega) = -\frac{1}{C \omega}.$$

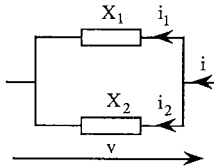
$i = C V \omega \cos(\omega t + \pi/2)$: i est en quadrature avancée sur $v = V \cos(\omega t)$.

$$\text{2.b. } v = L \frac{di}{dt} \Rightarrow i = \frac{V}{L \omega} \sin(\omega t) = \frac{V}{L \omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Dans ce cas, $X(\omega) = L \omega$ et i est en retard de $\pi/2$ sur v .

3.a. Posons comme précédemment $v = V \cos(\omega t)$; d'après la figure 2, $i = i_1 + i_2$;

Figure 2



CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

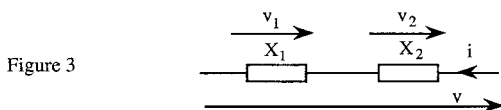
$$i_1 = \frac{V}{X_1} \sin(\omega t); i_2 = \frac{V}{X_2} \sin(\omega t) \Rightarrow i = V \left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} \right) \sin(\omega t).$$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{X_p} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}.$$

Pour que X_p soit infinie, il faut que son inverse soit nulle. Cela se produit soit lorsque X_1 et X_2 sont toutes deux infinies (sans être opposées), soit lorsque l'on a $X_1 = -X_2$.

3.b. Nous nous rapportons à la figure 3 :

$$\text{Posons } i = I \sin(\omega t) : v_1 = X_1 I \cos(\omega t); v_2 = X_2 I \cos(\omega t); v = v_1 + v_2;$$



$$\text{On a donc } v = (X_1 + X_2) I \cos(\omega t) = V \cos(\omega t).$$

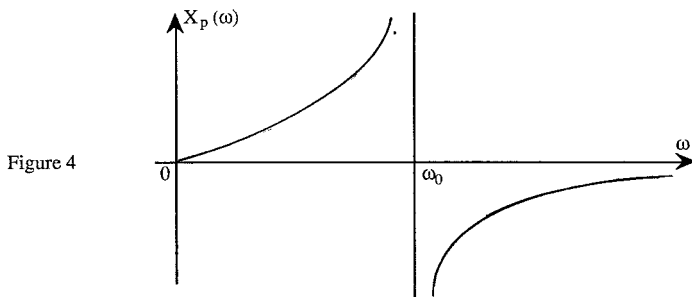
$$\frac{V}{I} = X_s = X_1 + X_2.$$

3.c. Pour un condensateur nous avons vu que $X_1 = -1/C\omega$; de même, pour une bobine parfaite d'inductance L , nous savons que $X_2 = L\omega$.

Appliquons le résultat général établi à la question 3.a :

$$\frac{1}{X_p} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} \Rightarrow X_p = \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}, \text{ soit, avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, X_p = \frac{L\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Lorsque ω varie de 0 à l'infini, X_p , comme toute réactance, est une fonction toujours croissante de ω . Elle n'est pas définie en ω_0 , tend vers $+\infty$ lorsque ω tend vers ω_0 par valeurs inférieures et vers $-\infty$ lorsque ω tend vers ω_0 par valeurs supérieures, comme le montre la figure 4.



CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

I. Les relations électromécaniques du “quartz”

1.a. Si l'échantillon est dans l'état (F, s) et si F passe de F à $F + dF$, alors s passe de s à $s + ds$.

$$dW_f = F ds = k s ds.$$

Comme précédemment (question préliminaire 1.b), on en déduit : $W_F = \frac{1}{2} k s^2$.

1.b. D'après la relation $E_e = -v$, on a, successivement :

$$E_1 = -\frac{v}{e} = -\frac{C v}{C e} = -\frac{q_i}{C e} = -\frac{\eta \Sigma s}{C e^2}, \text{ et puisque } C = \frac{\epsilon \Sigma}{e}, E_1 = -\frac{\eta s}{\epsilon e}.$$

$$\text{De la relation } E_1 = -\frac{\eta s}{\epsilon e}, \text{ on tire } v = \frac{\eta s}{\epsilon} = \alpha s.$$

La piézoélectricité apparaît dans les cristaux ioniques dépourvus de centre de symétrie. Elle suppose l'existence de deux sous réseaux : l'un d'ions positifs (les ions Si^{4+} dans le quartz), l'autre d'ions négatifs (O^{2-} dans le quartz). Quand on exerce une action mécanique sur un cristal piézoélectrique, ces deux sous-réseaux se déforment de manière inégale et des charges liées à chacun d'eux apparaissent aux extrémités.

2.a. $W_m = 0$ puisque $s = \text{constante}$.

2.b. L'apparition des charges q et $-q$ accroît de δv la différence de potentiel entre les armatures :

$$E_2 = -\frac{\delta v}{e} = -\frac{C \delta v}{C e} = -\frac{q}{C e} = -\frac{q}{\epsilon \Sigma}.$$

$$E_t = E_1 + E_2 = -\left(\frac{\eta s}{\epsilon e} + \frac{q}{\epsilon \Sigma} \right);$$

$$v = -E_t e = \frac{\eta}{\epsilon} s + \frac{e}{\epsilon \Sigma} q = \alpha s + \frac{q}{C}.$$

Cette relation peut encore s'écrire : $q + C \alpha s = C v$, or :

$$C \alpha s = \frac{\epsilon \Sigma}{e} \cdot \frac{\eta}{\epsilon} s = \frac{\eta \Sigma}{e} s = q_i \text{ (par définition)};$$

On a donc bien : $q + q_i = C v$.

2.c. De l'état $(s, 0)$ à l'état (s, q) , la tension v passe de αs à $\alpha s + q/C$:

$$W_e = \frac{1}{2} C \left[\left(\alpha s + \frac{q}{C} \right)^2 - (\alpha s)^2 \right] = \alpha s q + \frac{q^2}{2C}.$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

3.a. D'après la définition de E_p , $E_p(s, q) = W_F + W_m + W_e$, avec $W_m = 0$, soit :

$$E_p(s, q) = \frac{1}{2} k s^2 + \alpha s q + \frac{q^2}{2C}.$$

Le premier terme est le terme mécanique ; le dernier est le terme électrique ; le terme $\alpha s q$ est le terme électromécanique : électrique par la présence de q , mécanique par celle de s .

3.b. En appliquant la définition donnée dans le texte { $F =$ dérivée de $E_p(s)$ } ; on trouve : $F = k s + \alpha q$.

4.a. Le court-circuit impose $v = 0$; la relation $q + q_i = C v$ entraîne alors $q = -q_i$.

En combinant la relation générale $F = k s + \alpha q$ avec la relation particulière $q = -C \alpha s$, on trouve successivement, dans le cas où $v = 0$:

$$F = k s - C \alpha^2 s = s \left(k - C \alpha^2 \right) \Rightarrow s = \frac{F}{k - C \alpha^2} ; q = -\frac{C \alpha F}{k - C \alpha^2}.$$

4.b. Dans le cas où F est nulle, la relation générale $v = \alpha s + q / C$ doit être combinée avec la relation particulière $q = -k s / \alpha$. On obtient ainsi, successivement :

$$s = -\frac{C \alpha v}{k - C \alpha^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{k C v}{k - C \alpha^2}.$$

4.c. On remarque que c'est le même facteur qui permet de passer de F à q lorsque $v = 0$ et de v à s lorsque $F = 0$:

$$\left(\frac{s}{v} \right)_{F=0} = \left(\frac{q}{F} \right)_{v=0} = -\frac{C \alpha}{k - C \alpha^2} = -2,0 \cdot 10^{-12} \text{ m.V}^{-1}.$$

On en déduit que si $F = 0$ et si l'on applique une tension de 10 kV à l'échantillon, celui-ci se contracte de $s = 20 \text{ nm}$.

De la relation $q = -\frac{C \alpha F}{k - C \alpha^2}$ établie à la question 4.a lorsque $v = 0$, on tire :

$$\frac{C \alpha}{k - C \alpha^2} = 2,0 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}, \text{ donc } k - C \alpha^2 = \left(\frac{C \alpha}{2 \cdot 10^{-12}} \right) \text{ N.m}^{-1} = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ N.m}^{-1}.$$

Comme la quantité $C \alpha^2$ est égale à $2,0 \cdot 10^7 \text{ N.m}^{-1}$, elle est négligeable devant k et l'on prendra :

$$k = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ N.m}^{-1}.$$

4.d. Pour $s = 0$, $F = \alpha q = \alpha C v \Rightarrow$ si $v = 1,0 \cdot 10^2 \text{ V}$, alors $F = 2,0 \text{ N}$.

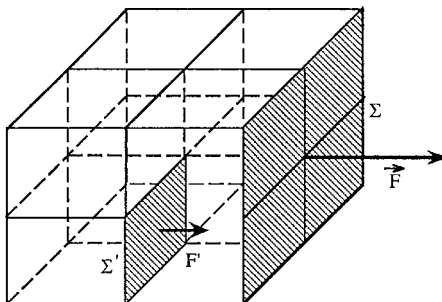
C'est le poids de 200 g au voisinage de la Terre.

Il faut appliquer une force positive : l'échantillon a donc tendance à se contracter.

4.e. Pour faire apparaître ce qui se passe lorsque toutes les dimensions de l'échantillon sont divisées par deux, supposons celui-ci parallélépipédique (fig.5) :

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

Figure 5



Notons F' la force qui s'exerce sur la section $\Sigma' = \Sigma / 4$: $F' = F / 4$;

Le déplacement s' de la face avant du nouvel échantillon est tel que $s' = s / 2$.

$$k' = \frac{F'}{s'} = \frac{k}{2} ; C' = \frac{\epsilon \Sigma'}{e'} = \frac{\epsilon \Sigma}{2e} = \frac{C}{2} .$$

La grandeur α apparaît comme le quotient du coefficient η , indépendant de la taille de l'échantillon et caractérisant le matériau qui le constitue, par la permittivité ϵ qui, elle aussi, ne dépend que du matériau constituant l'échantillon.

Cette grandeur caractérise donc le quartz dans les conditions particulières de son utilisation (direction de la contrainte F par rapport aux axes du cristal) et, comme η et ϵ , ne dépend donc pas de la taille de l'échantillon considéré.

4.f. Les ions du cristal sont porteurs de charges multiples de la charge élémentaire e (4 e pour les ions Si^{4+} , - 2 e pour les ions O^{2-} qui sont, en fait, regroupés deux par deux).

La maille élémentaire (dite trigonale) du cristal de quartz piézoélectrique a des arêtes dont la longueur d est voisine de 0,5 nm. Le champ électrique typique que l'on peut obtenir dans ces conditions a pour intensité :

$$E_{\text{typ}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \times \frac{4 e}{d^2} = 23 \cdot 10^9 \text{ V.m}^{-1} .$$

La valeur de α est bien inférieure à un tel champ électrique. Il est vrai qu'elle s'obtient à partir du produit de celui-ci par un coefficient de la forme $(k_1 - k_2) / (k_1 + k_2)$, k_1 et k_2 étant les "raideurs" des "ressorts" élémentaires liant entre eux les ions Si^{4+} et O^{2-} . Un tel coefficient est inférieur à l'unité.

II. Comportement mécanique du quartz en régime sinusoïdal forcé

1.a. Pour maintenir le quartz dans l'état (s, q) , il faut exercer la force F ; en réaction, le quartz exerce $F' = -F$ sur l'extérieur (ici la masse M) quand il est dans cet état.

$$F' = - (k s + \alpha q) , \text{ avec } q = C (v - \alpha s) .$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

1.b. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au mouvement de la masse M :

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = F' = - \left[k s + C \alpha (v - \alpha s) \right] = - k s + C \alpha^2 s - C \alpha v .$$

Cette équation a bien la forme proposée, avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k - C \alpha^2}{M} \quad \text{et} \quad \beta = - \frac{C \alpha}{M} .$$

1.c. Pour $M = 10 \text{ g} = 10^{-2} \text{ kg}$, $\omega_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad/s} \Rightarrow v_0 = 0,16 \text{ MHz}$.

1.d. La réponse d'un oscillateur à une sollicitation extérieure peut être considérée comme la superposition d'un régime "permanent" et d'un "régime transitoire" dont la durée dépend beaucoup de l'amortissement de l'oscillateur. Ayant négligé les phénomènes dissipatifs (très faibles) qui accompagnent le mouvement du quartz, notre mise en équation ne fait pas apparaître de terme d'amortissement. Dans ces conditions, le modèle étudié aurait un régime transitoire de durée infinie et l'appareil de mesure qui l'utiliserait aurait un temps de réponse infini lui aussi, ce qui n'est évidemment pas souhaitable.

En réalité, un "quartz" de qualité moyenne (dont le facteur de qualité, qui peut aller jusqu'à $0,5 \cdot 10^6$, serait égal à $2 \cdot 10^4$) et de fréquence caractéristique $v_0 = 160 \text{ kHz}$, répond en un dixième de seconde.

1.e. En l'absence de couplage mécanique, $\alpha = 0$:

$$\text{L'équation différentielle se réduit à : } \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{k}{M} s = 0 : \text{c'est celle que l'on obtient en ne}$$

prenant en compte que la seule élasticité de l'échantillon.

2.a. En reportant l'expression proposée pour $s(t)$ dans l'équation différentielle établie à la question 1.b ci-dessus, on trouve :

$$S_0(\omega) = - \frac{C \alpha V_0}{M \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)} .$$

2.b. Si $\omega = \omega_0$, l'amplitude S_0 de s devient théoriquement infinie : en fait il s'agit simplement du phénomène de résonance pour lequel la valeur $S_0(\omega_0)$ n'est limitée que par les phénomènes dissipatifs dont nous n'avons pas tenu compte. Le modèle considéré n'est donc pas valable au voisinage immédiat de ω_0 .

3.a. Lorsque ω tend vers zéro, l'amplitude S_0 tend vers la valeur $S_0(0)$ telle que :

$$S_0(0) = - \frac{C \alpha V_0}{M \omega_0^2} ; \text{ on a donc, pour les fréquences très faibles : } s \approx - \frac{C \alpha}{k - C \alpha^2} v ;$$

C'est l'expression que nous avons trouvée à la question 4.b relative au régime statique dans le cas où $F = 0$.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

$$\text{Lorsque } \omega \rightarrow \infty, S_0 \approx \frac{C \alpha V_0}{2} \rightarrow 0.$$

3.b. On peut prévoir, effectivement, les résultats précédents : à très basse fréquence l'accélération $\frac{d^2 s}{dt^2}$ de la masse M tend vers 0. La force $F = -M \frac{d^2 s}{dt^2} \rightarrow 0$.

Par ailleurs, tout système présentant de l'inertie a une réponse spatiale nulle à très haute fréquence.

4. Pour se propager d'un côté à l'autre de l'échantillon, une onde mécanique a besoin de $t = 0,2 \mu s$. Cette durée est faible en comparaison de la période d'oscillation correspondant à la fréquence ν_0 , soit $T_0 = 6,2 \mu s$. Cependant elle n'est pas tout à fait négligeable. Il n'est donc pas tout à fait légitime de négliger les phénomènes de propagation.

Autre raisonnement : la longueur d'onde de l'onde mécanique, égale à 3 cm, étant très supérieure à e , on peut, en première approximation, négliger l'effet de propagation.

III. Comportement électrique du quartz en régime sinusoïdal forcé.

1.a. Il suffit d'appliquer les résultats déjà trouvés :

$$\text{Avec } q = C (v - \alpha s), i = \frac{dq}{dt} = C \left(\frac{dv}{dt} - \alpha \frac{ds}{dt} \right);$$

En remplaçant dans cette expression, la tension v par $V_0 \cos(\omega t)$ et le déplacement s

$$\text{par } s(t) = -\frac{C \alpha V_0}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t), \text{ on trouve :}$$

$$i = -C \omega V_0 \frac{M(\omega_0^2 - \omega^2) + C \alpha^2}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t).$$

En posant alors, successivement :

$$A = \frac{M \omega_0^2}{C(M \omega_0^2 + C \alpha^2)} = \frac{k - C \alpha^2}{k C} = \frac{1}{C} \cdot \left(1 - \frac{C \alpha^2}{k} \right),$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{k - C \alpha^2}{M} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{C \alpha^2}{M} = \frac{k}{M},$$

on constate bien que l'on peut écrire :

$$i(t) = \frac{V_0}{X(\omega)} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad X(\omega) = -\frac{A}{\omega} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2}$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

1.b. A la précision demandée, $C \alpha^2$ est négligeable devant k et l'on a :

$$A \approx \frac{1}{C} = 5,0 \cdot 10^{10} \text{ F}^{-1}.$$

La pulsation ω_1 est égale à la pulsation de résonance électromécanique déterminée à la question II.1.c, on a donc $\omega_1 = \omega_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

D'après les résultats précédents, on a par ailleurs : $\omega_2^2 - \omega_1^2 = C \alpha^2 / M$.

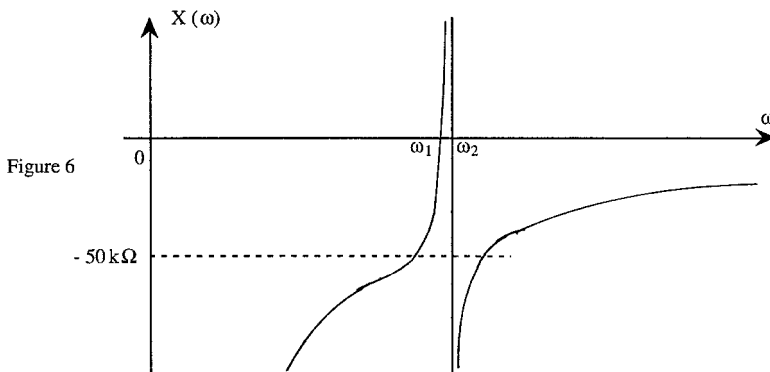
Or $\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1) \approx \Delta\omega (2 \omega_1)$; on a donc :

$$\Delta\omega = \frac{C \alpha^2}{2 M \omega_1} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$\Delta\omega$ correspond à une bande de fréquence de largeur $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 0,16 \text{ kHz}$.

1.c. Q a un comportement inductif à l'intérieur de la bande (ω_1, ω_2) ; en dehors de cette bande et de son voisinage immédiat, la réactance $X(\omega)$ est assimilable à celle d'une capacité de valeur C : $X(\omega) \approx -1 / C\omega$.

La figure 6 donne l'allure de $X(\omega)$. Cette fonction, non définie pour $\omega = \omega_1$, est toujours croissante dans son domaine de définition.



1.d. En l'absence de couplage électromécanique, c'est à dire pour une valeur nulle de α ,

$$A = \frac{1}{C} ; \omega_2 = \omega_1 ; X(\omega) = -\frac{1}{C\omega} ;$$

le quartz, mécaniquement inerte, se comporte pour toute fréquence, comme un simple condensateur.

2.a. Appliquons les résultats de l'étude préliminaire :

Réactance de la branche L , C' : $X_L = L\omega - 1 / C'\omega$.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

$$\text{Réactance de } C_q : X_2 = - \frac{1}{C_q \omega}.$$

$$\text{Mise en parallèle : } \frac{1}{X_p} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} = - \left(\frac{C' \omega}{1 - L C' \omega^2} + C_q \omega \right), \text{ soit :}$$

$$X_p(\omega) = - \frac{1}{(C' + C_q) \omega} \cdot \frac{1 - L C' \omega^2}{1 - L \left(\frac{C' C_q}{C' + C_q} \right) \omega^2}.$$

Cette réactance a bien la même forme que $X(\omega)$.

2.b. Pour que $X_p(\omega)$ et $X(\omega)$ soient identiques, il faut que :

$$A = - \frac{1}{C} \frac{k - C \alpha^2}{k} = \frac{1}{C' + C_q} \Rightarrow \frac{k - C \alpha^2}{k} = \frac{C}{C' + C_q} \quad (1);$$

$$\omega_1^2 = \frac{k - C \alpha^2}{M} = \frac{1}{L C'}; \quad \omega_2^2 = \frac{k}{M} = \frac{1}{L C'} \cdot \frac{C' + C_q}{C_q}.$$

De cette dernière ligne d'équations on tire :

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{k - C \alpha^2}{k} = \frac{C_q}{C' + C_q}; \text{ comparant cette dernière égalité à l'équation (1), on voit que } C_q = C.$$

De l'équation (1), où l'on remplace C_q par C , on tire alors :

$$C' = C \frac{C \alpha^2}{k - C \alpha^2}, \text{ soit, numériquement : } C' = 20 \text{ pF} \times 2 \cdot 10^{-3} = 4,0 \cdot 10^{-14} \text{ F}.$$

$$\text{De l'égalité } L C' = \frac{M}{k - C \alpha^2} \approx \frac{M}{k} \text{ on déduit enfin la valeur de } L :$$

$$L \approx \frac{M}{k C'} = 25 \text{ H}.$$

• $L = 25 \text{ H}$ est une très grande inductance. Avec des éléments classiques, on pourrait, certes, à l'aide d'un noyau magnétique de fer ou de ferrite et d'une grande quantité de fil de cuivre, obtenir une bobine présentant une telle inductance. Mais cette bobine serait volumineuse, aurait une résistance importante (sa qualité serait donc faible), et présenterait une importante capacité parasite la rendant totalement impropre à un fonctionnement à 160 kHz.

• $C = 4 \cdot 10^{-14} \text{ F} = 0,04 \text{ pF}$, est une capacité extrêmement faible, difficilement maîtrisable avec des éléments classiques où les capacités parasites atteignent vite 1 pF.

2.c. Nous avons déjà exprimé, un peu plus haut, non le rapport demandé, mais le carré de son inverse :

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{C_q + C'}{C_q} = 1 + \frac{C'}{C_q} = 1 + x \text{ avec } x \ll 1; \text{ puisque } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \text{ on a bien :}$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{C'}{C_q}} \approx 1 + \frac{C'}{2C_q}, \text{ soit } \omega_2 - \omega_1 \approx \omega_1 \cdot \frac{C'}{2C_q}.$$

2.d. C_p vient se placer en parallèle sur la capacité C_q du modèle électrique de Q.

Le nouveau dipôle D' s'obtient ainsi à partir du précédent en remplaçant seulement la capacité $C_q = 20 \text{ pF}$ par la somme $C_e = C_q + C_p = 10^{-10} \text{ F} = 0,10 \text{ nF}$.

Sa réactance X' a évidemment la même forme que $X(\omega)$.

Ses éléments caractéristiques sont tels que :

$$A' \approx \frac{1}{C_e} = 10^{10} \text{ F}^{-1}; \omega'_1 = \omega_1 = \omega_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1} \text{ puisque } L C' \omega'_1{}^2 = 1.$$

$$\text{Enfin } \Delta\omega' = \omega'_2 - \omega'_1 \approx \omega'_1 \cdot \frac{C'}{2C_e} = 200 \text{ rad.s}^{-1}, \text{ soit } \Delta\nu' = 32 \text{ Hz.}$$

2.e. Pour $\omega = \omega'_1$, $X'(\omega) = 0$.

$$\text{Au voisinage de } \omega'_1, \frac{A'}{\omega} \approx \frac{A'}{\omega'_1} = 10^4 \Omega.$$

$$\text{Avec les notations et les conventions de l'énoncé : } x = \frac{\delta\omega}{\omega'_1} = 10^{-6} \delta\omega \text{ et } y \approx 2 \cdot 10^{-4};$$

$$\text{On en déduit : } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega'_1} \right)^2 \approx -2x = -2 \cdot 10^{-6} \delta\omega; \text{ de même } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega'_2} \right)^2 \approx 2y = 4 \cdot 10^{-4}.$$

$$\text{Par conséquent, avec les conventions du texte : } \delta X'(\omega) = 10^4 x \frac{2 \cdot 10^{-6} \delta\omega}{4 \cdot 10^{-4}} = 50 \delta\omega.$$

Cette approximation est valable tant que $\delta\omega$ est faible devant $\Delta\omega'$, c'est à dire pour $\delta\omega \leq 20 \text{ rad.s}^{-1}$. Par la suite, nous l'utiliserons cependant à la limite de son domaine de validité, ce qui ne changera pas les ordres de grandeur.

IV. Oscillateur stabilisé en fréquence à l'aide d'un "quartz"

1.a. Le courant d'intensité i_D , passant dans la bobine B_1 , provoque un flux magnétique variable de valeur $M i_D$ à travers la bobine B_2 . A ce flux magnétique, d'après la loi de Faraday,

correspond une fém induite $e(t) = - \frac{d\Phi_{B_1 \rightarrow B_2}}{dt}$, soit une force contre-électromotrice $M \frac{di_D}{dt}$.

1.b. L'égalité $v_{Gs} = u_{L0} + r_0 i_0$ s'écrit encore :

$$v_{Gs} = L_0 \frac{di_0}{dt} + M \frac{di_D}{dt} + r_0 i_0.$$

Mais C_0 est, avec la convention récepteur habituelle, traversée par l'intensité $-i_0$.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

Donc $i_0 = -C_0 \frac{d v_{Gs}}{dt}$, et, puisque $i_D = g v_{Gs}$, l'équation précédente devient :

$$v_{Gs} = -L_0 C_0 \frac{d^2 v_{Gs}}{dt^2} + M g \frac{d v_{Gs}}{dt} - r_0 C_0 \frac{d v_{Gs}}{dt}, \text{ soit :}$$

$$\frac{d^2 v_{Gs}}{dt^2} + \frac{r_0 C_0 - M g}{L_0 C_0} \cdot \frac{d v_{Gs}}{dt} + \frac{v_{Gs}}{L_0 C_0} = 0.$$

1.c. Pour que cette équation admette une solution parfaitement sinusoïdale, il faut que le terme central (dit terme d'amortissement ou d'entretien) soit nul.

$$\text{On doit donc avoir : } M g = r_0 C_0, \text{ soit : } M_c = \frac{r_0 C_0}{g}.$$

Si cette condition est réalisée, la pulsation Ω_0 de la solution sinusoïdale $v_{Gs}(t)$ de cette équation doit satisfaire à la condition : $L_0 C_0 \Omega_0^2 = 1$, soit $\Omega_0 = (L_0 C_0)^{-1/2}$.

Avec $L_0 = 1,0 \text{ mH}$, pour obtenir $\Omega_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (ou $N_0 = 0,16 \text{ MHz}$), il faut prendre $C_0 = 1,0 \text{ nF}$.

1.d. Quand $M = M_c$, le transistor injecte dans le circuit (r_0, L_0, C_0), par l'intermédiaire du couplage magnétique, juste autant d'énergie qu'il en est consommé dans r_0 .

1.e. L'égalité parfaite est impossible à réaliser. Même si, à un moment donné, elle était réalisée, les inévitables dérives la détruiraient.

Pour $M < M_c$, s'il y a des oscillations, elles s'atténuent ; s'il n'y en a pas, l'oscillateur reste au repos.

Pour $M > M_c$, l'amplitude des oscillations croît pendant la phase transitoire : dans la mesure où le coefficient g est constant, le transistor fonctionne alors en régime linéaire. Ensuite, on atteint périodiquement la saturation. Pendant chaque période, il y a alors des phases de fonctionnement linéaire du transistor où la quantité $M g - r_0 C_0$ est positive : le circuit (r_0, L_0, C_0) reçoit alors plus d'énergie qu'il n'en consomme. Ces phases alternent avec d'autres où le circuit consomme plus d'énergie qu'il n'en reçoit du transistor saturé.

Pendant ces dernières, la relation $i_D = g v_{Gs}$ n'est plus assurée.

$$\mathbf{2.a.} \text{ Si } v_{Gs} = V_0 \cos(\Omega t), \text{ l'intensité } i_D \text{ vaut : } i_D(t) = (V_0 / X') \sin(\Omega t).$$

$$\text{Comme } i_0 = -i_D, \text{ on a : } i_0 = -\frac{V_0}{X'} \sin(\Omega t).$$

En reportant cette valeur dans l'expression de la tension $v_{Gs}(t)$ obtenue au début de la question 1.b, on trouve :

$$V_0 \cos(\Omega t) = -V_0 \frac{L_0 \Omega}{X'} \cos(\Omega t) - V_0 \sin(\Omega t) \left(\frac{r_0}{X'} + M g \Omega \right).$$

Cette écriture n'a de sens que si :

$$\bullet X' = -L_0 \Omega ;$$

$$\bullet \frac{r_0}{X'} + M g \Omega = 0, \text{ soit } M g \Omega = -\frac{r_0}{X'}.$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

2.b. C'est la première des conditions qui fixe la fréquence de l'oscillation.

A la question IV.1.c, on avait $X' = -\frac{1}{C_0 \Omega}$, la condition $X' = -L_0 \Omega$ donne bien :

$$L_0 C_0 \Omega^2 = 1.$$

De même, en remplaçant X' par $-\frac{1}{C_0 \Omega}$, la deuxième condition s'écrit bien :

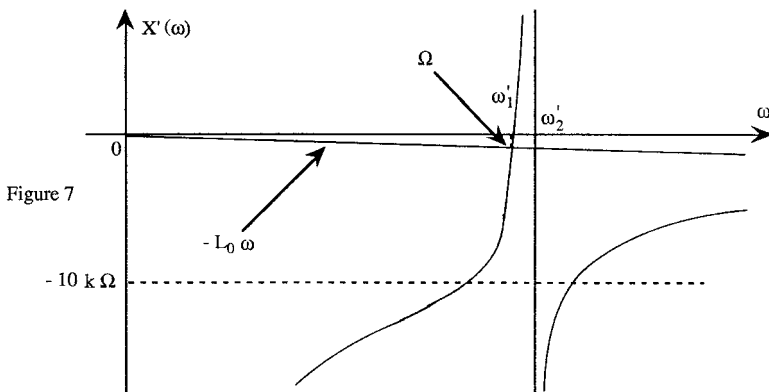
$$M_c g = r_0 C_0.$$

En combinant les deux relations, on trouve : $M_c = \frac{r_0}{g L_0 \Omega^2}$.

3.a. La pulsation Ω d'oscillation est fixée par la condition : $X'(\Omega) = -L_0 \Omega$;

La figure 7 montre que cette pulsation est légèrement inférieure à $\omega'_1 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$.

3.b. Nous avons vu qu'au voisinage de la pulsation ω'_1 , la réactance $X'(\omega)$ varie de 50 ohms par rad.s^{-1} . Comme au voisinage de ω'_1 , la réactance $L_0 \omega$ est proche de 1,0 k Ω , l'écart $\omega'_1 - \Omega$ est de l'ordre de 20 rad.s^{-1} . L'écart $\Delta \nu$ de fréquence correspondant est de 3,2 Hz.



Remarque : selon les types d'oscillateurs dans lesquels ils sont utilisés, certains "quartz" oscillent au voisinage de la pulsation ω_1 , dite de résonance série, ou au voisinage de ω_2 (résonance parallèle). Nous avons vu qu'en plaçant un petit condensateur en parallèle avec le "quartz", on modifie la valeur de ω_2 (qui se rapproche de ω_1) ; de même, en montant en série avec le "quartz" un petit condensateur, on modifie légèrement la pulsation ω_1 pour laquelle sa réactance s'annule (ω_1 se

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

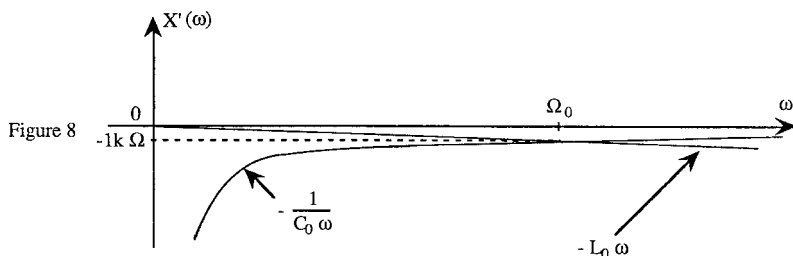
rapproche de ω_2). Il est donc toujours possible de faire osciller un “quartz” à la fréquence nominale inscrite sur son boîtier.

3.c. Nous avons montré à la question IV.2.b que la valeur M_c de M qui permet d’obtenir des oscillations quasi-sinusoïdales peut s’exprimer en fonction de r_0 , g , L_0 et de la fréquence d’oscillation du montage. Puisque l’oscillateur “à quartz” de la figure 8 du texte a même fréquence que l’oscillateur classique de la figure 6 de l’énoncé, c’est la même valeur de M qui conviendra : en remplaçant la capacité C_0 par le quartz Q (en parallèle avec $C_p \ll C_0$), il n’est pas nécessaire de retoucher au couplage des bobines.

3.d. Si L_0 augmente de 10^{-3} en valeur relative, sa réactance à 0,16 MHz augmente de 1 ohm. Pour que la condition $X'(\Omega) = -L_0 \Omega$ soit assurée, il faut que la pulsation Ω diminue de $1/50^{\text{ième}}$ de radian par seconde ; on aura donc $\delta N \approx -3 \cdot 10^{-3}$ Hz.

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{\delta \Omega}{\Omega} = \frac{1}{50 \cdot 10^6} = 2,0 \cdot 10^{-8} : \text{en un an } (3,2 \cdot 10^7 \text{ s}), \text{ l'horloge retardera de } 0,6 \text{ s.}$$

3.e. La figure 8, sur laquelle ont été tracées la droite représentant $-L_0 \omega$ et la réactance $X' = -\frac{1}{C_0 \omega}$ du condensateur de capacité C_0 , montre que l’angle sous lequel se coupent ces deux courbes est très faible (alors qu’il est proche de 90° dans le cas de l’oscillateur à “quartz”).



Une même variation δL_0 entraîne de ce fait une variation δN_0 de la fréquence d’oscillation très supérieure à δN ; en fait, $L_0 C_0 \Omega_0^2 = 1$, donc $\frac{\delta L_0}{L_0} = -2 \frac{\delta \Omega_0}{\Omega_0} \Rightarrow \frac{\delta \Omega_0}{\Omega_0} = -0,5 \cdot 10^{-3}$.

On en déduit la valeur de $\delta \Omega_0$, soit $\delta \Omega_0 = -500 \text{ rad.s}^{-1}$ ou $\delta N_0 = -80 \text{ Hz}$.

En un jour, l’oscillateur, dont la fréquence aura décréu, au lieu de compter $8,6 \cdot 10^4 \text{ s}$, en comptera moins et retardera de $8,6 \cdot 10^4 \text{ s} \times 0,5 \cdot 10^{-3} = 43 \text{ s}$.

Le “quartz” a donc pour effet de transformer un retard de 43 secondes par jour, retard courant avec une horloge classique, en un retard d’une seconde par an.