
CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

Concours Général

Session de 1997 - Classe de terminale S

PHYSIQUE-CHIMIE

Durée : 5 heures

ÉNONCÉ

Etude d'un "quartz" piézoélectrique

Présentation de l'épreuve

Ce problème propose l'étude d'un échantillon de quartz piézoélectrique et aborde l'une des applications les plus importantes d'un tel dispositif : la stabilisation de fréquence d'un oscillateur électrique.

Après avoir dégagé quelques résultats préliminaires, on établit, dans une première partie, les équations électromécaniques relatives à l'échantillon considéré.

L'aspect mécanique du comportement de cet échantillon en régime sinusoïdal, puis son aspect électrique sous l'influence d'une telle excitation, sont étudiés dans les deux parties suivantes.

La dernière partie permet de mettre en évidence l'influence du "quartz" sur un oscillateur électrique.

Dans tout le problème, on considère un échantillon cylindrique Q de quartz, de section Σ et d'épaisseur e , limité par deux faces planes A et B perpendiculaires à l'axe horizontal Ox (figure 1). Cet échantillon est supposé parfaitement élastique, la raideur du ressort équivalent étant notée k .

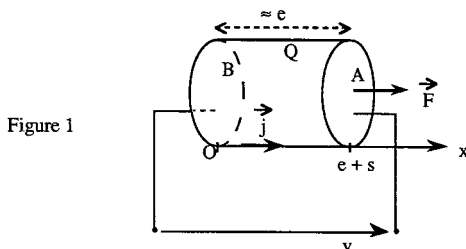
On note $\vec{j}$ le vecteur unitaire, sans dimension, de Ox ; le sens de $\vec{j}$ est celui de B vers A.

La face B est maintenue fixe ; l'origine O se trouve sur cette face.

Sur A, on exerce éventuellement une force caractérisée par le vecteur-force $\vec{F} = F \vec{j}$.

Cette force, de traction si son intensité F est positive et de compression si F est négative, provoque un déplacement de A dont on note s la mesure algébrique selon Ox .

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS



De plus les deux faces A et B sont métallisées, formant ainsi un condensateur plan, dont on néglige les effets de bord et dont on note la capacité C. La valeur absolue de s restant très inférieure à e et les variations de la section Σ étant de ce fait négligeables, la capacité C sera considérée comme constante et l'on posera $C = \frac{\epsilon \Sigma}{e}$.

Dans cette expression, ϵ est une constante appelée permittivité du quartz : on rappelle que la permittivité du vide, ϵ_0 , est telle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9,0 \cdot 10^9 \text{ u.S.I.}$

On désigne par v la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre les deux faces et par q et $-q$ les charges apportées de l'extérieur par un générateur, respectivement sur les faces A et B.

Le quartz, cristal ionique, est un matériau piézoélectrique :

- si on applique une force F en l'absence de différence de potentiel imposée par l'extérieur, le matériau se polarise (les charges **intérieures** qu'il contient se réorganisent) et ceci entraîne l'apparition d'une différence de potentiel entre les plaques ;
- inversement, si on impose une différence de potentiel v entre A et B, en l'absence de force extérieure, ceci entraîne un déplacement s de la face A.

Les phénomènes électriques et mécaniques sont donc couplés.

Note : L'état de l'échantillon Q de la figure 1 est caractérisé par la donnée du déplacement s et de la charge q . L'énergie potentielle E_p qu'il possède dans un état donné (s, q) ne dépend que de la valeur de ces deux variables : $E_p = E_p(s, q)$.

Pour $s = 0$ et $q = 0$, on choisit de prendre $E_p(0, 0) = 0$.

Pour un état (s, q) quelconque, on admet que E_p est égale au travail (ou à l'énergie) que l'on doit lui fournir, de l'extérieur, pour faire passer le quartz de l'état $(s = 0, q = 0)$, à l'état (s, q) . L'énergie potentielle E_p étant connue, on accède à la force F qui doit être exercée par l'extérieur dans l'état (s, q) par l'expression :

$$F(s, q) = \frac{dE_p}{ds}$$

F est donc la dérivée de E_p par rapport à s obtenue en supposant que, dans l'expression de $E_p(s, q)$, la charge q est constante.

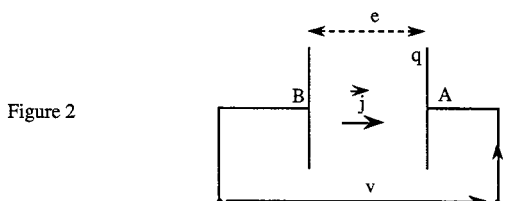
CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

Etude préliminaire

1) On considère un condensateur de capacité C , constitué d'un matériau diélectrique de permittivité ϵ en forme de cylindre, dont les deux faces opposées sont métallisées et constituent des plaques A et B distantes de e .

Lorsque la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre ses bornes est égale à v , la charge de la plaque A (fig. 2), est égale à q .

On désigne par $\vec{j}$ un vecteur unitaire, perpendiculaire aux plaques du condensateur.



1.a. Donner la relation entre v et q .

Pour $v > 0$, représenter le vecteur champ électrique $\vec{E} = E \vec{j}$ entre les plaques.

Les grandeurs E , e et v sont liées par la relation : $|E \cdot e| = |v|$. Préciser cette relation.

1.b. Le générateur extérieur qui impose la tension v doit fournir le travail élémentaire $dW = v dq$ pour faire passer la charge de la plaque A de q à $q + dq$ lorsque la variation de charge dq est infiniment petite. En déduire le travail électrique total que doit fournir le générateur pour porter la charge du condensateur de 0 à q .

2.a. On impose au condensateur la différence de potentiel $v(t) = V \cos(\omega t)$.

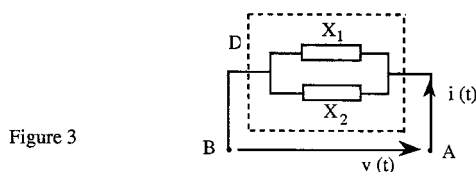
Calculer l'intensité $i(t)$ du courant qui, en régime permanent, arrive sur la plaque A (fig.2) et la mettre sous la forme :

$$i(t) = \frac{V}{X(\omega)} \sin(\omega t)$$

$X(\omega)$ est la réactance du dipôle formé par le condensateur ; préciser sa valeur.

L'intensité $i(t)$ est-elle en retard ou en avance sur la tension $v(t)$?

2.b. Les sens positifs respectifs de v et de i étant toujours ceux qu'indique la figure 2, reprendre les questions ci-dessus (2.a) en supposant que l'on impose la même tension sinusoïdale $v(t)$ à une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.



CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

3.a. On associe en parallèle deux dipôles purement réactifs (ne comportant pas d'élément dissipatif comme une résistance) et de réactances respectives X_1 et X_2 pour former un dipôle unique D de bornes A et B (figure 3).

Calculer la réactance X_p de D. A quelle(s) condition(s) X_p est-elle infinie ?

3.b. Calculer de même la réactance X_s du dipôle obtenu en associant en série les dipôles de réactances X_1 et X_2 .

3.c. Déterminer la réactance $X_p(\omega)$ du dipôle formé en associant en parallèle un condensateur parfait de capacité C et une bobine parfaite d'inductance L.

Représenter l'allure de la variation de $X_p(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à l'infini.

I. Les relations électromécaniques du "quartz"

1.a. Les faces A et B (figure 1), sont initialement isolées et non chargées ; rien n'est imposé de l'extérieur : $s = 0$, $q = 0$.

On applique alors progressivement à A la force $\vec{F} = F \vec{j}$ qui produit le déplacement $s = \frac{F}{k}$.

Calculer le travail mécanique W_F que l'on doit fournir pour obtenir ce déplacement s.

1.b. Le déplacement s engendre à son tour une polarisation du matériau : des charges intérieures, q_i et $-q_i$, dues à la réorganisation des charges qui sont liées au quartz, apparaissent sur les faces A et B (figure 4).

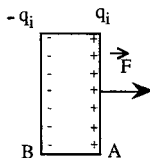


Figure 4

La charge intérieure q_i est proportionnelle au déplacement s et à la surface Σ ; elle est inversement proportionnelle à l'épaisseur e de l'échantillon :

$$q_i = \frac{\eta \Sigma}{e} s, \text{ où } \eta \text{ est une constante caractéristique du matériau.}$$

Déterminer le champ électrique E_1 , créé à l'intérieur du matériau, en fonction de s et des coefficients ϵ et η . En déduire la valeur de la différence de potentiel correspondante $v_1 = V_A - V_B$

que l'on exprimera en utilisant le coefficient $\alpha = \frac{\eta}{\epsilon}$.

Proposer une interprétation de la polarisation du matériau lorsqu'on applique une force F.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

2. Grâce à un générateur extérieur, préalablement réglé sur la tension $v = v_1$, on apporte alors de l'extérieur, en faisant varier la tension v , les charges extérieures $+q$ et $-q$, respectivement, sur les faces A et B. Il se crée un champ électrique supplémentaire E_2 dans le matériau alors que le déplacement s est maintenu constant, en faisant pour cela, au besoin, varier la force F appliquée sur A.

2.a. Déterminer le travail mécanique qu'il faut fournir dans cette opération effectuée en maintenant s constant.

2.b. Exprimer E_2 en fonction de q . En déduire l'expression du champ total E_t existant dans le quartz lorsqu'il se trouve dans l'état (s, q) . Exprimer ensuite la différence de potentiel $v(s, q)$ existant entre les plaques dans l'état (s, q) en fonction de α , s , C et q .

Montrer que la relation obtenue est équivalente à : $q + q_i = C v$.

2.c. Calculer l'énergie électrique totale que doit fournir le générateur pour charger le condensateur de l'état $(s, 0)$ à l'état (s, q) . On notera cette énergie W_e .

3.a. Déduire de ce qui précède l'énergie potentielle $E_p(s, q)$ de l'échantillon de quartz, que l'on exprimera en fonction de s , q , k , α et C .

Mettre en évidence dans $E_p(s, q)$ un terme mécanique, un terme électrique et un terme de couplage électromécanique.

3.b. Montrer que dans l'état (s, q) , la force extérieure exercée est :

$$F(s, q) = k s + \alpha q$$

4.a. Les faces métallisées A et B sont reliées par un court-circuit : comparer la charge extérieure q et la charge intérieure q_i ; calculer s et q en fonction de F .

4.b. Lorsque F est nulle, calculer s et q en fonction de v .

4.c. On donne $C = 2,0 \cdot 10^{-11} \text{ F}$ et $\alpha = 1,0 \cdot 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Lorsque les faces sont mises en court-circuit, une force de $1,0 \text{ N}$ fait apparaître une charge $q = -2,0 \cdot 10^{-12} \text{ C}$. En déduire le déplacement s produit par une différence de potentiel $v = 1,0 \cdot 10^4 \text{ V}$ en l'absence de force appliquée et calculer numériquement la valeur de k (dans tout le problème, les résultats numériques seront donnés avec 2 chiffres significatifs).

4.d. Quelle force faut-il exercer pour maintenir l'épaisseur de l'échantillon constante et de valeur e (de manière telle que $s = 0$) lorsqu'on applique la tension $v = 100 \text{ V}$?

L'échantillon a-t-il dans ce cas tendance à se contracter ou à s'allonger ?

4.e. Que deviendraient k , C et α si toutes les dimensions de l'échantillon de quartz étaient divisées par 2 ? Commenter brièvement le cas de α .

4.f. Tous les cristaux ioniques n'étant pas piézoélectriques, la valeur du coefficient α , qui a la dimension d'un champ électrique, doit être inférieure à celle du champ électrique typique qui peut régner dans un tel cristal. En proposant une évaluation à une puissance de dix près, montrer que c'est bien le cas. (On rappelle que la charge élémentaire a pour valeur $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$).

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

II. Comportement mécanique du “quartz” en régime sinusoïdal forcé

Dans cette partie et la suivante, on colle sur la face A une plaque rigide de masse M très supérieure à celle de l'échantillon et on oriente Ox horizontalement de façon à ce que les poids n'interviennent pas.

On établit à l'aide d'un générateur une différence de potentiel variable $v(t)$ entre A et B. Aucune force supplémentaire n'est exercée de l'extérieur.

1.a. Caractériser la force $\vec{F}$ qu'exerce le quartz sur la masse M .

1.b. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ qui caractérise le mouvement de la plaque en présence de $v(t)$ est de la forme :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = \beta \cdot v(t)$$

Dans cette expression, $\frac{d^2 s}{dt^2}$ désigne la dérivée seconde de s par rapport à t .

Exprimer ω_0 et β en fonction de α , k , C et M .

1.c. Calculer ω_0 pour $M = 10$ g ainsi que la fréquence ν_0 correspondante.

1.d. Que peut-on dire du régime transitoire d'un tel oscillateur ? Est-ce réaliste ?

Est-ce souhaitable si le “quartz” est utilisé dans un appareil de mesure ?

1.e. Que devient l'équation différentielle en l'absence de couplage électromécanique ?

Quel phénomène connu retrouve-t-on alors ?

2. On suppose dans la suite que $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$. On cherche une solution de l'équation différentielle sous la forme : $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$.

2.a. Déterminer S_0 en fonction de ω .

2.b. Que se passe-t-il si $\omega = \omega_0$? Le modèle considéré jusqu'alors reste-t-il valable ? De quoi faudrait-il tenir compte ?

3.a. Vers quelles valeurs limites tend S_0 lorsque $\omega \rightarrow 0$ et lorsque $\omega \rightarrow \infty$?

3.b. Les deux résultats précédents étaient-ils prévisibles ? Si oui, pourquoi ?

4. Sachant que la vitesse de propagation des ondes sonores dans le matériau piézoélectrique est de l'ordre de $5 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$, est-il légitime de négliger les phénomènes de propagation pour des fréquences voisines de $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$? (On prendra $e \approx 1 \text{ mm}$).

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

III. Comportement électrique du “quartz” en régime sinusoïdal forcé

On considère le même système que dans la partie II, avec $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

1.a. Montrer que si l'on note $X(\omega)$ la réactance de l'échantillon Q de quartz, l'intensité du courant arrivant sur la plaque A est de la forme :

$$i(t) = \frac{V_0}{X(\omega)} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad X(\omega) = -\frac{A}{\omega} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

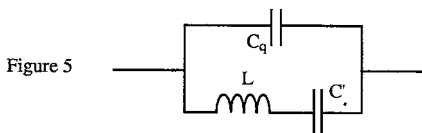
Exprimer les paramètres caractéristiques A , ω_1 et ω_2 en fonction de k , α , C et M .

1.b. Calculer numériquement A , la pulsation ω_1 et la différence $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

1.c. Représenter l'allure de $X(\omega)$ et préciser les domaines de pulsation où le système Q a un comportement inductif ou capacitif.

1.d. Que devient la réactance $X(\omega)$ en l'absence de couplage électromécanique ?

2. L'échantillon Q présente un équivalent électrique que l'on se propose d'expliciter.



2.a. On considère le dipôle de la figure 5. Déterminer sa réactance $X_p(\omega)$ et montrer qu'elle a la même forme que $X(\omega)$ trouvée en III.1.a.

On choisit L , C_q et C' pour que ce dipôle se comporte électriquement comme Q.

2.b. Montrer que $C_q = C$; exprimer L et C' en fonction de k , α , C et M et calculer ces grandeurs. Pour la suite du problème, on prendra $L = 25 \text{ H}$ et $C' = 4,0 \cdot 10^{-14} \text{ F}$.

Ces valeurs de L et C' sont-elles des valeurs usuelles d'inductance et de capacité ?

2.c. Etablir la relation approchée : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 + \frac{C'}{2C_q}$.

2.d. On place en parallèle avec le système Q un condensateur de capacité $C_p = 80 \text{ pF}$ (on pourra poser $C_e = C_p + C_q$). Montrer que la réactance $X'(\omega)$ du nouveau dipôle $D' = (Q, C_p)$ obtenu a encore la même forme que $X(\omega)$. Par analogie avec ceux de $X(\omega)$, on note A' , ω'_1 et ω'_2 les paramètres caractéristiques de $X'(\omega)$. Calculer A' , ω'_1 et $\Delta\omega' = \omega'_2 - \omega'_1$.

2.e. Montrer qu'au voisinage de ω'_1 , pour une variation $\delta\omega$ de ω (en rad/s), la variation correspondante $\delta X'$ de X' , exprimée en ohms, peut s'écrire de manière approchée : $\delta X' = 50 \delta\omega$. On pourra, pour cela, poser $\omega = \omega'_1 + \delta\omega = \omega'_1(1 + x) \approx \omega'_2 - \Delta\omega' = \omega'_2(1 - y)$.

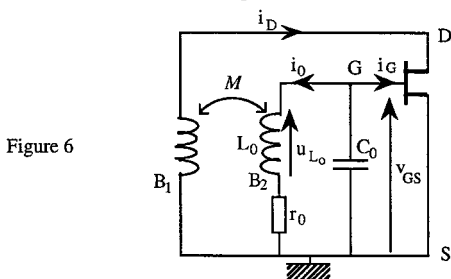
CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

IV Oscillateur stabilisé en fréquence à l'aide d'un "quartz"

1. On considère le montage de la figure 6 comportant un transistor à effet de champ (F E T) et deux bobines B_1 et B_2 , couplées magnétiquement. Ce couplage, réglable par la position relative des bobines, est caractérisé par leur coefficient M d'inductance mutuelle.

Les trois bornes du transistor sont notées D (drain), G (grille) et S (source). Le dispositif permettant de l'alimenter à l'aide d'une tension continue V_{cc} n'est pas représenté sur le schéma. Ce transistor est tel qu'on peut négliger i_G devant i_0 : on prendra $i_G = 0$.

L'intensité i_D du courant de drain est liée à la tension v_{GS} par la relation : $i_D = g v_{GS}$, où g est une constante positive, caractéristique du transistor fonctionnant en régime linéaire.



1.a. Le couplage magnétique des deux bobines se traduit notamment par l'expression de la tension u_{L_0} aux bornes de la bobine d'inductance L_0 :

$$u_{L_0} = L_0 \frac{di_0}{dt} + M \frac{di_D}{dt}$$

Proposer une interprétation pour le terme supplémentaire faisant intervenir le coefficient M d'inductance mutuelle.

1.b. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $v_{GS}(t)$.

1.c. Quelle valeur M_c devrait prendre M pour que $v_{GS}(t)$ puisse être parfaitement sinusoïdale ? En supposant cette condition réalisée et $v_{GS}(t)$ sinusoïdale, exprimer sa pulsation Ω_0 en fonction des données. Calculer C_0 pour avoir $\Omega_0 = 1,0 \cdot 10^6$ rad/s sachant que $L_0 = 1,0$ mH.

1.d. Que se passe-t-il dans le circuit, sur le plan énergétique, lorsque $M = M_c$?

1.e. Le cas où $M = M_c$ n'est pas physique ; pourquoi ?

Que se passe-t-il pour $M < M_c$?

Lorsque $M > M_c$, en régime permanent, les oscillations de $v_{GS}(t)$ ne sont plus sinusoïdales et leur fréquence s'éloigne de la valeur $N_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ lorsque M croît.

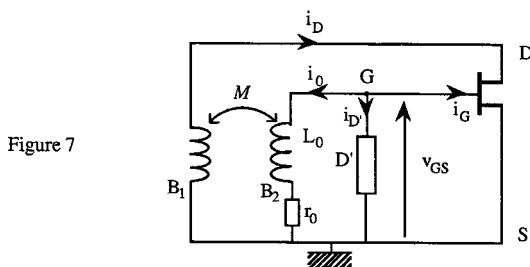
Pourquoi, dans ce cas, le modèle utilisé n'est-il plus valable en permanence ? Quelle est la relation qui, pour certaines phases des oscillations, doit être modifiée ?

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

2. On reprend le montage de la figure 6 en conservant le transistor à effet de champ de "pente" g ($i_D = g v_{GS}$) et le système de deux bobines B_1 et B_2 couplées magnétiquement par leur inductance mutuelle de coefficient M .

En revanche, le condensateur de capacité C_0 est remplacé (figure 7) par un dipôle D' sans perte, caractérisé par sa réactance $X'(\omega)$. On a toujours $i_G = 0$.

On suppose que le montage ainsi obtenu constitue, après réglage de M , un oscillateur sinusoïdal dont la fréquence d'oscillation est N . On pose $\Omega = 2\pi N$ et $v_{GS} = V_0 \cos(\Omega t)$.



2.a. Exprimer l'intensité $i_0(t)$ en fonction de V_0 et de $X'(\Omega)$.

En déduire une deuxième expression de $v_{GS}(t)$ en considérant la branche contenant l'inductance L_0 et la résistance r_0 .

Cette deuxième expression de $v_{GS}(t)$ n'est compatible avec l'écriture $v_{GS} = V_0 \cos(\Omega t)$ qu'à deux conditions que l'on exprimera.

2.b. L'une de ces conditions fixe la fréquence N de l'oscillateur ; vérifier qu'elle donne bien la valeur Ω_0 de la question IV.1.c.

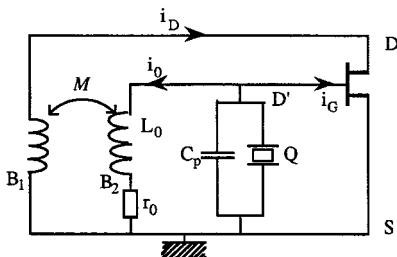
L'autre condition fixe la valeur de M qui permet d'obtenir des oscillations sinusoïdales. Vérifier que dans le cas particulier de la question IV.1.c, elle donne bien la valeur M_c .

Exprimer M en fonction de r_0 , g , L_0 et Ω .

3. Le dipôle D' de la figure 7 est maintenant constitué, comme le montre la figure 8, de l'ensemble formé par la mise en parallèle du "quartz" Q étudié dans les trois premières parties de l'épreuve et d'un condensateur de capacité $C_p = 80$ pF. Les propriétés de la réactance $X'(\omega)$ de ce dipôle, dont les paramètres caractéristiques ont été notés A' , ω'_1 et ω'_2 ont été établies lors des questions III.2.d et III.2.e.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

Figure 8



3.a. Tracer, dans le même système d'axes, le graphe de $X'(\omega)$ et celui de la quantité $-L_0 \omega$. Déterminer qualitativement, à l'aide du graphique ainsi obtenu, la pulsation Ω de l'oscillateur à "quartz" de la figure 8, en ne retenant que la plus petite des deux pulsations possibles (on peut procéder de manière telle que le système "choisisse" effectivement cette pulsation).

3.b. En utilisant le résultat de la question III.2.e estimer l'écart $\omega'_1 - \Omega$. Quel est l'écart de fréquence $\delta\nu$ correspondant ?

3.c. Le couplage entre les bobines B_1 et B_2 doit-il être beaucoup modifié pour passer de l'oscillateur sinusoïdal de la figure 6 à celui de la figure 8 ?

3.d. Les variations de l'environnement magnétique peuvent modifier la valeur de L_0 . Le vieillissement agit également sur L_0 et sur C_p . La variation de la tension d'alimentation V_{cc} du transistor à effet de champ modifie aussi certains paramètres de ce composant qui interviennent légèrement dans la détermination de la fréquence de l'oscillateur.

L'utilisation du "quartz" Q permet de rendre la fréquence N de l'oscillateur obtenu pratiquement indépendante de ces variations : supposons par exemple que l'inductance L_0

subisse, seule, une variation δL_0 telle que : $\frac{\delta L_0}{L_0} = 10^{-3}$.

Déterminer l'ordre de grandeur de la variation δN de la fréquence N de l'oscillateur à "quartz" représenté sur la figure 8 correspondant à δL_0 .

On suppose que cet oscillateur est utilisé dans une horloge : déterminer, en secondes par an, l'erreur - retard ou avance - de l'horloge provoquée par δL_0 . On prendra : $1 \text{ an} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$.

3.e. En utilisant, pour l'oscillateur classique de la figure 6, un mode de détermination graphique de la pulsation Ω_0 de même nature que celui de la question IV.3.a ci dessus, montrer que pour la même valeur de δL_0 , la variation δN_0 de sa fréquence est très supérieure à δN .

Avec les valeurs numériques de la question IV.1.c. calculer δN_0 . Préciser, en secondes par jour, l'erreur correspondante - retard ou avance - d'une horloge utilisant cet oscillateur.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

CORRIGÉ

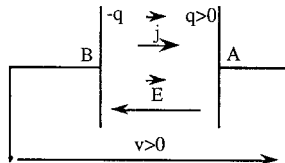
par René MOREAU
et les membres du jury

Etude préliminaire

1.a. $q = C v$.

Le vecteur champ électrique a pour sens celui qui va des charges positives vers les charges négatives. Pour $v > 0$, la relation précédente montre que la charge q de la plaque A est positive. La composante E du vecteur $\vec{E}$ sur l'axe Ox est donc négative (fig.1).

Figure 1



Comme l'épaisseur e est positive, le produit $E \cdot e$ est donc négatif ; on a donc $E \cdot e = -v$.

1.b. $dW = v dq$ or $q = C v$ et donc $dq = C dv$; donc $dW = C v dv$.

On a donc $\frac{dW}{dv} = C v$. W est la primitive de $C v$ qui s'annule pour $v = 0$, donc $W = \frac{1}{2} C v^2$.

2.a. Avec les conventions choisies :

$$i = \frac{dq}{dt} = c \frac{dv}{dt} = -C V \omega \sin(\omega t) = -\frac{V}{X(\omega)} \sin(\omega t) \text{ avec } X(\omega) = -\frac{1}{C \omega}.$$

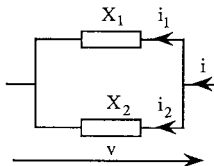
$i = C V \omega \cos(\omega t + \pi/2)$: i est en quadrature avancée sur $v = V \cos(\omega t)$.

$$\text{2.b. } v = L \frac{di}{dt} \Rightarrow i = \frac{V}{L \omega} \sin(\omega t) = \frac{V}{L \omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Dans ce cas, $X(\omega) = L \omega$ et i est en retard de $\pi/2$ sur v .

3.a. Posons comme précédemment $v = V \cos(\omega t)$; d'après la figure 2, $i = i_1 + i_2$;

Figure 2



CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

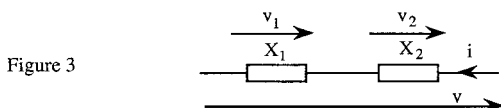
$$i_1 = \frac{V}{X_1} \sin(\omega t); i_2 = \frac{V}{X_2} \sin(\omega t) \Rightarrow i = V \left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} \right) \sin(\omega t).$$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{X_p} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}.$$

Pour que X_p soit infinie, il faut que son inverse soit nulle. Cela se produit soit lorsque X_1 et X_2 sont toutes deux infinies (sans être opposées), soit lorsque l'on a $X_1 = -X_2$.

3.b. Nous nous rapportons à la figure 3 :

$$\text{Posons } i = I \sin(\omega t) : v_1 = X_1 I \cos(\omega t); v_2 = X_2 I \cos(\omega t); v = v_1 + v_2;$$



$$\text{On a donc } v = (X_1 + X_2) I \cos(\omega t) = V \cos(\omega t).$$

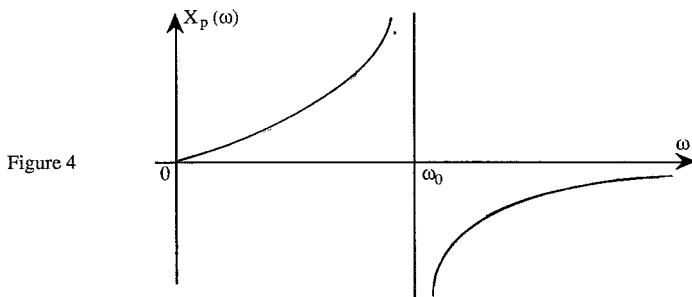
$$\frac{V}{I} = X_s = X_1 + X_2.$$

3.c. Pour un condensateur nous avons vu que $X_1 = -1/C\omega$; de même, pour une bobine parfaite d'inductance L , nous savons que $X_2 = L\omega$.

Appliquons le résultat général établi à la question 3.a :

$$\frac{1}{X_p} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} \Rightarrow X_p = \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}, \text{ soit, avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, X_p = \frac{L\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Lorsque ω varie de 0 à l'infini, X_p , comme toute réactance, est une fonction toujours croissante de ω . Elle n'est pas définie en ω_0 , tend vers $+\infty$ lorsque ω tend vers ω_0 par valeurs inférieures et vers $-\infty$ lorsque ω tend vers ω_0 par valeurs supérieures, comme le montre la figure 4.



CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

I. Les relations électromécaniques du “quartz”

1.a. Si l'échantillon est dans l'état (F, s) et si F passe de F à $F + dF$, alors s passe de s à $s + ds$.

$$dW_f = F ds = k s ds.$$

Comme précédemment (question préliminaire 1.b), on en déduit : $W_F = \frac{1}{2} k s^2$.

1.b. D'après la relation $E_e = -v$, on a, successivement :

$$E_1 = -\frac{v}{e} = -\frac{C v}{C e} = -\frac{q_i}{C e} = -\frac{\eta \Sigma s}{C e^2}, \text{ et puisque } C = \frac{\epsilon \Sigma}{e}, E_1 = -\frac{\eta s}{\epsilon e}.$$

$$\text{De la relation } E_1 = -\frac{\eta s}{\epsilon e}, \text{ on tire } v = \frac{\eta s}{\epsilon} = \alpha s.$$

La piézoélectricité apparaît dans les cristaux ioniques dépourvus de centre de symétrie. Elle suppose l'existence de deux sous réseaux : l'un d'ions positifs (les ions Si^{4+} dans le quartz), l'autre d'ions négatifs (O^{2-} dans le quartz). Quand on exerce une action mécanique sur un cristal piézoélectrique, ces deux sous-réseaux se déforment de manière inégale et des charges liées à chacun d'eux apparaissent aux extrémités.

2.a. $W_m = 0$ puisque $s = \text{constante}$.

2.b. L'apparition des charges q et $-q$ accroît de δv la différence de potentiel entre les armatures :

$$E_2 = -\frac{\delta v}{e} = -\frac{C \delta v}{C e} = -\frac{q}{C e} = -\frac{q}{\epsilon \Sigma}.$$

$$E_t = E_1 + E_2 = -\left(\frac{\eta s}{\epsilon e} + \frac{q}{\epsilon \Sigma} \right);$$

$$v = -E_t e = \frac{\eta}{\epsilon} s + \frac{e}{\epsilon \Sigma} q = \alpha s + \frac{q}{C}.$$

Cette relation peut encore s'écrire : $q + C \alpha s = C v$, or :

$$C \alpha s = \frac{\epsilon \Sigma}{e} \cdot \frac{\eta}{\epsilon} \cdot s = \frac{\eta \Sigma}{e} s = q_i \text{ (par définition)};$$

On a donc bien : $q + q_i = C v$.

2.c. De l'état $(s, 0)$ à l'état (s, q) , la tension v passe de αs à $\alpha s + q/C$:

$$W_e = \frac{1}{2} C \left[\left(\alpha s + \frac{q}{C} \right)^2 - (\alpha s)^2 \right] = \alpha s q + \frac{q^2}{2C}.$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

3.a. D'après la définition de E_p , $E_p(s, q) = W_F + W_m + W_e$, avec $W_m = 0$, soit :

$$E_p(s, q) = \frac{1}{2} k s^2 + \alpha s q + \frac{q^2}{2C}.$$

Le premier terme est le terme mécanique ; le dernier est le terme électrique ; le terme $\alpha s q$ est le terme électromécanique : électrique par la présence de q , mécanique par celle de s .

3.b. En appliquant la définition donnée dans le texte { $F =$ dérivée de $E_p(s)$ } ; on trouve : $F = k s + \alpha q$.

4.a. Le court-circuit impose $v = 0$; la relation $q + q_i = C v$ entraîne alors $q = -q_i$.

En combinant la relation générale $F = k s + \alpha q$ avec la relation particulière $q = -C \alpha s$, on trouve successivement, dans le cas où $v = 0$:

$$F = k s - C \alpha^2 s = s \left(k - C \alpha^2 \right) \Rightarrow s = \frac{F}{k - C \alpha^2} ; q = -\frac{C \alpha F}{k - C \alpha^2}.$$

4.b. Dans le cas où F est nulle, la relation générale $v = \alpha s + q / C$ doit être combinée avec la relation particulière $q = -k s / \alpha$. On obtient ainsi, successivement :

$$s = -\frac{C \alpha v}{k - C \alpha^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{k C v}{k - C \alpha^2}.$$

4.c. On remarque que c'est le même facteur qui permet de passer de F à q lorsque $v = 0$ et de v à s lorsque $F = 0$:

$$\left(\frac{s}{v} \right)_{F=0} = \left(\frac{q}{F} \right)_{v=0} = -\frac{C \alpha}{k - C \alpha^2} = -2,0 \cdot 10^{-12} \text{ m.V}^{-1}.$$

On en déduit que si $F = 0$ et si l'on applique une tension de 10 kV à l'échantillon, celui-ci se contracte de $s = 20 \text{ nm}$.

De la relation $q = -\frac{C \alpha F}{k - C \alpha^2}$ établie à la question 4.a lorsque $v = 0$, on tire :

$$\frac{C \alpha}{k - C \alpha^2} = 2,0 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}, \text{ donc } k - C \alpha^2 = \left(\frac{C \alpha}{2 \cdot 10^{-12}} \right) \text{ N.m}^{-1} = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ N.m}^{-1}.$$

Comme la quantité $C \alpha^2$ est égale à $2,0 \cdot 10^7 \text{ N.m}^{-1}$, elle est négligeable devant k et l'on prendra :

$$k = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ N.m}^{-1}.$$

4.d. Pour $s = 0$, $F = \alpha q = \alpha C v \Rightarrow$ si $v = 1,0 \cdot 10^2 \text{ V}$, alors $F = 2,0 \text{ N}$.

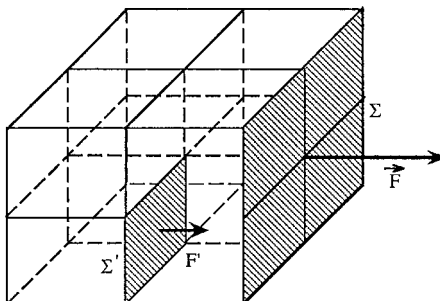
C'est le poids de 200 g au voisinage de la Terre.

Il faut appliquer une force positive : l'échantillon a donc tendance à se contracter.

4.e. Pour faire apparaître ce qui se passe lorsque toutes les dimensions de l'échantillon sont divisées par deux, supposons celui-ci parallélépipédique (fig.5) :

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

Figure 5



Notons F' la force qui s'exerce sur la section $\Sigma' = \Sigma / 4$: $F' = F / 4$;

Le déplacement s' de la face avant du nouvel échantillon est tel que $s' = s / 2$.

$$k' = \frac{F'}{s'} = \frac{k}{2} ; C' = \frac{\epsilon \Sigma'}{e'} = \frac{\epsilon \Sigma}{2e} = \frac{C}{2} .$$

La grandeur α apparaît comme le quotient du coefficient η , indépendant de la taille de l'échantillon et caractérisant le matériau qui le constitue, par la permittivité ϵ qui, elle aussi, ne dépend que du matériau constituant l'échantillon.

Cette grandeur caractérise donc le quartz dans les conditions particulières de son utilisation (direction de la contrainte F par rapport aux axes du cristal) et, comme η et ϵ , ne dépend donc pas de la taille de l'échantillon considéré.

4.f. Les ions du cristal sont porteurs de charges multiples de la charge élémentaire e (4 e pour les ions Si^{4+} , - 2 e pour les ions O^{2-} qui sont, en fait, regroupés deux par deux).

La maille élémentaire (dite trigonale) du cristal de quartz piézoélectrique a des arêtes dont la longueur d est voisine de 0,5 nm. Le champ électrique typique que l'on peut obtenir dans ces conditions a pour intensité :

$$E_{\text{typ}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \times \frac{4 e}{d^2} = 23 \cdot 10^9 \text{ V.m}^{-1} .$$

La valeur de α est bien inférieure à un tel champ électrique. Il est vrai qu'elle s'obtient à partir du produit de celui-ci par un coefficient de la forme $(k_1 - k_2) / (k_1 + k_2)$, k_1 et k_2 étant les "raideurs" des "ressorts" élémentaires liant entre eux les ions Si^{4+} et O^{2-} . Un tel coefficient est inférieur à l'unité.

II. Comportement mécanique du quartz en régime sinusoïdal forcé

1.a. Pour maintenir le quartz dans l'état (s, q) , il faut exercer la force F ; en réaction, le quartz exerce $F' = -F$ sur l'extérieur (ici la masse M) quand il est dans cet état.

$$F' = - (k s + \alpha q) , \text{ avec } q = C (v - \alpha s) .$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

1.b. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au mouvement de la masse M :

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = F' = - \left[k s + C \alpha (v - \alpha s) \right] = - k s + C \alpha^2 s - C \alpha v .$$

Cette équation a bien la forme proposée, avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k - C \alpha^2}{M} \quad \text{et} \quad \beta = - \frac{C \alpha}{M} .$$

1.c. Pour $M = 10 \text{ g} = 10^{-2} \text{ kg}$, $\omega_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad/s} \Rightarrow v_0 = 0,16 \text{ MHz}$.

1.d. La réponse d'un oscillateur à une sollicitation extérieure peut être considérée comme la superposition d'un régime "permanent" et d'un "régime transitoire" dont la durée dépend beaucoup de l'amortissement de l'oscillateur. Ayant négligé les phénomènes dissipatifs (très faibles) qui accompagnent le mouvement du quartz, notre mise en équation ne fait pas apparaître de terme d'amortissement. Dans ces conditions, le modèle étudié aurait un régime transitoire de durée infinie et l'appareil de mesure qui l'utiliserait aurait un temps de réponse infini lui aussi, ce qui n'est évidemment pas souhaitable.

En réalité, un "quartz" de qualité moyenne (dont le facteur de qualité, qui peut aller jusqu'à $0,5 \cdot 10^6$, serait égal à $2 \cdot 10^4$) et de fréquence caractéristique $v_0 = 160 \text{ kHz}$, répond en un dixième de seconde.

1.e. En l'absence de couplage mécanique, $\alpha = 0$:

$$\text{L'équation différentielle se réduit à : } \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{k}{M} s = 0 : \text{c'est celle que l'on obtient en ne}$$

prenant en compte que la seule élasticité de l'échantillon.

2.a. En reportant l'expression proposée pour $s(t)$ dans l'équation différentielle établie à la question 1.b ci-dessus, on trouve :

$$S_0(\omega) = - \frac{C \alpha V_0}{M \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)} .$$

2.b. Si $\omega = \omega_0$, l'amplitude S_0 de s devient théoriquement infinie : en fait il s'agit simplement du phénomène de résonance pour lequel la valeur $S_0(\omega_0)$ n'est limitée que par les phénomènes dissipatifs dont nous n'avons pas tenu compte. Le modèle considéré n'est donc pas valable au voisinage immédiat de ω_0 .

3.a. Lorsque ω tend vers zéro, l'amplitude S_0 tend vers la valeur $S_0(0)$ telle que :

$$S_0(0) = - \frac{C \alpha V_0}{M \omega_0^2} ; \text{ on a donc, pour les fréquences très faibles : } s \approx - \frac{C \alpha}{k - C \alpha^2} v ;$$

C'est l'expression que nous avons trouvée à la question 4.b relative au régime statique dans le cas où $F = 0$.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

$$\text{Lorsque } \omega \rightarrow \infty, S_0 \approx \frac{C \alpha V_0}{2 M \omega} \rightarrow 0.$$

3.b. On peut prévoir, effectivement, les résultats précédents : à très basse fréquence l'accélération $\frac{d^2 s}{dt^2}$ de la masse M tend vers 0. La force $F = -M \frac{d^2 s}{dt^2} \rightarrow 0$.

Par ailleurs, tout système présentant de l'inertie a une réponse spatiale nulle à très haute fréquence.

4. Pour se propager d'un côté à l'autre de l'échantillon, une onde mécanique a besoin de $t = 0,2 \mu s$. Cette durée est faible en comparaison de la période d'oscillation correspondant à la fréquence ν_0 , soit $T_0 = 6,2 \mu s$. Cependant elle n'est pas tout à fait négligeable. Il n'est donc pas tout à fait légitime de négliger les phénomènes de propagation.

Autre raisonnement : la longueur d'onde de l'onde mécanique, égale à 3 cm, étant très supérieure à e , on peut, en première approximation, négliger l'effet de propagation.

III. Comportement électrique du quartz en régime sinusoïdal forcé.

1.a. Il suffit d'appliquer les résultats déjà trouvés :

$$\text{Avec } q = C (v - \alpha s), i = \frac{dq}{dt} = C \left(\frac{dv}{dt} - \alpha \frac{ds}{dt} \right);$$

En remplaçant dans cette expression, la tension v par $V_0 \cos(\omega t)$ et le déplacement s

$$\text{par } s(t) = -\frac{C \alpha V_0}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t), \text{ on trouve :}$$

$$i = -C \omega V_0 \frac{M(\omega_0^2 - \omega^2) + C \alpha^2}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t).$$

En posant alors, successivement :

$$A = \frac{M \omega_0^2}{C(M \omega_0^2 + C \alpha^2)} = \frac{k - C \alpha^2}{k C} = \frac{1}{C} \cdot \left(1 - \frac{C \alpha^2}{k} \right),$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{k - C \alpha^2}{M} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{C \alpha^2}{M} = \frac{k}{M},$$

on constate bien que l'on peut écrire :

$$i(t) = \frac{V_0}{X(\omega)} \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad X(\omega) = -\frac{A}{\omega} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

1.b. A la précision demandée, $C \alpha^2$ est négligeable devant k et l'on a :

$$A \approx \frac{1}{C} = 5,0 \cdot 10^{10} \text{ F}^{-1}.$$

La pulsation ω_1 est égale à la pulsation de résonance électromécanique déterminée à la question II.1.c, on a donc $\omega_1 = \omega_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

D'après les résultats précédents, on a par ailleurs : $\omega_2^2 - \omega_1^2 = C \alpha^2 / M$.

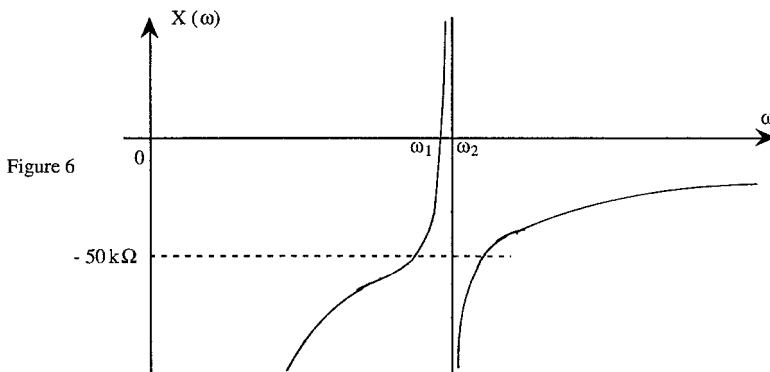
Or $\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1) \approx \Delta\omega (2 \omega_1)$; on a donc :

$$\Delta\omega = \frac{C \alpha^2}{2 M \omega_1} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$\Delta\omega$ correspond à une bande de fréquence de largeur $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 0,16 \text{ kHz}$.

1.c. Q a un comportement inductif à l'intérieur de la bande (ω_1, ω_2) ; en dehors de cette bande et de son voisinage immédiat, la réactance $X(\omega)$ est assimilable à celle d'une capacité de valeur C : $X(\omega) \approx -1 / C\omega$.

La figure 6 donne l'allure de $X(\omega)$. Cette fonction, non définie pour $\omega = \omega_1$, est toujours croissante dans son domaine de définition.



1.d. En l'absence de couplage électromécanique, c'est à dire pour une valeur nulle de α ,

$$A = \frac{1}{C} ; \omega_2 = \omega_1 ; X(\omega) = -\frac{1}{C\omega} ;$$

le quartz, mécaniquement inerte, se comporte pour toute fréquence, comme un simple condensateur.

2.a. Appliquons les résultats de l'étude préliminaire :

Réactance de la branche L, C' : $X_L = L\omega - 1 / C'\omega$.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

$$\text{Réactance de } C_q : X_2 = - \frac{1}{C_q \omega}.$$

$$\text{Mise en parallèle : } \frac{1}{X_p} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} = - \left(\frac{C' \omega}{1 - L C' \omega^2} + C_q \omega \right), \text{ soit :}$$

$$X_p(\omega) = - \frac{1}{(C' + C_q) \omega} \cdot \frac{1 - L C' \omega^2}{1 - L \left(\frac{C' C_q}{C' + C_q} \right) \omega^2}.$$

Cette réactance a bien la même forme que $X(\omega)$.

2.b. Pour que $X_p(\omega)$ et $X(\omega)$ soient identiques, il faut que :

$$A = - \frac{1}{C} \frac{k - C \alpha^2}{k} = \frac{1}{C' + C_q} \Rightarrow \frac{k - C \alpha^2}{k} = \frac{C}{C' + C_q} \quad (1);$$

$$\omega_1^2 = \frac{k - C \alpha^2}{M} = \frac{1}{L C'}; \quad \omega_2^2 = \frac{k}{M} = \frac{1}{L C'} \cdot \frac{C' + C_q}{C_q}.$$

De cette dernière ligne d'équations on tire :

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{k - C \alpha^2}{k} = \frac{C_q}{C' + C_q}; \text{ comparant cette dernière égalité à l'équation (1), on voit que } C_q = C.$$

De l'équation (1), où l'on remplace C_q par C , on tire alors :

$$C' = C \frac{C \alpha^2}{k - C \alpha^2}, \text{ soit, numériquement : } C' = 20 \text{ pF} \times 2 \cdot 10^{-3} = 4,0 \cdot 10^{-14} \text{ F}.$$

$$\text{De l'égalité } L C' = \frac{M}{k - C \alpha^2} \approx \frac{M}{k} \text{ on déduit enfin la valeur de } L :$$

$$L \approx \frac{M}{k C'} = 25 \text{ H}.$$

• $L = 25 \text{ H}$ est une très grande inductance. Avec des éléments classiques, on pourrait, certes, à l'aide d'un noyau magnétique de fer ou de ferrite et d'une grande quantité de fil de cuivre, obtenir une bobine présentant une telle inductance. Mais cette bobine serait volumineuse, aurait une résistance importante (sa qualité serait donc faible), et présenterait une importante capacité parasite la rendant totalement impropre à un fonctionnement à 160 kHz.

• $C = 4 \cdot 10^{-14} \text{ F} = 0,04 \text{ pF}$, est une capacité extrêmement faible, difficilement maîtrisable avec des éléments classiques où les capacités parasites atteignent vite 1 pF.

2.c. Nous avons déjà exprimé, un peu plus haut, non le rapport demandé, mais le carré de son inverse :

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{C_q + C'}{C_q} = 1 + \frac{C'}{C_q} = 1 + x \text{ avec } x \ll 1; \text{ puisque } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \text{ on a bien :}$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{C'}{C_q}} \approx 1 + \frac{C'}{2C_q}, \text{ soit } \omega_2 - \omega_1 \approx \omega_1 \cdot \frac{C'}{2C_q}.$$

2.d. C_p vient se placer en parallèle sur la capacité C_q du modèle électrique de Q.

Le nouveau dipôle D' s'obtient ainsi à partir du précédent en remplaçant seulement la capacité $C_q = 20 \text{ pF}$ par la somme $C_e = C_q + C_p = 10 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 0,10 \text{ nF}$.

Sa réactance X' a évidemment la même forme que $X(\omega)$.

Ses éléments caractéristiques sont tels que :

$$A' \approx \frac{1}{C_e} = 10^{10} \text{ F}^{-1}; \omega'_1 = \omega_1 = \omega_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1} \text{ puisque } L C' \omega'_1{}^2 = 1.$$

$$\text{Enfin } \Delta\omega' = \omega'_2 - \omega'_1 \approx \omega'_1 \cdot \frac{C'}{2C_e} = 200 \text{ rad.s}^{-1}, \text{ soit } \Delta\nu' = 32 \text{ Hz.}$$

2.e. Pour $\omega = \omega'_1$, $X'(\omega) = 0$.

$$\text{Au voisinage de } \omega'_1, \frac{A'}{\omega} \approx \frac{A'}{\omega'_1} = 10^4 \Omega.$$

$$\text{Avec les notations et les conventions de l'énoncé : } x = \frac{\delta\omega}{\omega'_1} = 10^{-6} \delta\omega \text{ et } y \approx 2 \cdot 10^{-4};$$

$$\text{On en déduit : } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega'_1}\right)^2 \approx -2x = -2 \cdot 10^{-6} \delta\omega; \text{ de même } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega'_2}\right)^2 \approx 2y = 4 \cdot 10^{-4}.$$

$$\text{Par conséquent, avec les conventions du texte : } \delta X'(\omega) = 10^4 x \frac{2 \cdot 10^{-6} \delta\omega}{4 \cdot 10^{-4}} = 50 \delta\omega.$$

Cette approximation est valable tant que $\delta\omega$ est faible devant $\Delta\omega'$, c'est à dire pour $\delta\omega \leq 20 \text{ rad.s}^{-1}$. Par la suite, nous l'utiliserons cependant à la limite de son domaine de validité, ce qui ne changera pas les ordres de grandeur.

IV. Oscillateur stabilisé en fréquence à l'aide d'un "quartz"

1.a. Le courant d'intensité i_D , passant dans la bobine B_1 , provoque un flux magnétique variable de valeur $M i_D$ à travers la bobine B_2 . A ce flux magnétique, d'après la loi de Faraday,

correspond une fém induite $e(t) = - \frac{d\Phi_{B_1 \rightarrow B_2}}{dt}$, soit une force contre-électromotrice $M \frac{di_D}{dt}$.

1.b. L'égalité $v_{Gs} = u_{L0} + r_0 i_0$ s'écrit encore :

$$v_{Gs} = L_0 \frac{di_0}{dt} + M \frac{di_D}{dt} + r_0 i_0.$$

Mais C_0 est, avec la convention récepteur habituelle, traversée par l'intensité $-i_0$.

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

Donc $i_0 = -C_0 \frac{d v_{Gs}}{dt}$, et, puisque $i_D = g v_{Gs}$, l'équation précédente devient :

$$v_{Gs} = -L_0 C_0 \frac{d^2 v_{Gs}}{dt^2} + M g \frac{d v_{Gs}}{dt} - r_0 C_0 \frac{d v_{Gs}}{dt}, \text{ soit :}$$

$$\frac{d^2 v_{Gs}}{dt^2} + \frac{r_0 C_0 - M g}{L_0 C_0} \cdot \frac{d v_{Gs}}{dt} + \frac{v_{Gs}}{L_0 C_0} = 0.$$

1.c. Pour que cette équation admette une solution parfaitement sinusoïdale, il faut que le terme central (dit terme d'amortissement ou d'entretien) soit nul.

$$\text{On doit donc avoir : } M g = r_0 C_0, \text{ soit : } M_c = \frac{r_0 C_0}{g}.$$

Si cette condition est réalisée, la pulsation Ω_0 de la solution sinusoïdale $v_{Gs}(t)$ de cette équation doit satisfaire à la condition : $L_0 C_0 \Omega_0^2 = 1$, soit $\Omega_0 = (L_0 C_0)^{-1/2}$.

Avec $L_0 = 1,0 \text{ mH}$, pour obtenir $\Omega_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (ou $N_0 = 0,16 \text{ MHz}$), il faut prendre $C_0 = 1,0 \text{ nF}$.

1.d. Quand $M = M_c$, le transistor injecte dans le circuit (r_0, L_0, C_0), par l'intermédiaire du couplage magnétique, juste autant d'énergie qu'il en est consommé dans r_0 .

1.e. L'égalité parfaite est impossible à réaliser. Même si, à un moment donné, elle était réalisée, les inévitables dérives la détruiraient.

Pour $M < M_c$, s'il y a des oscillations, elles s'atténuent ; s'il n'y en a pas, l'oscillateur reste au repos.

Pour $M > M_c$, l'amplitude des oscillations croît pendant la phase transitoire : dans la mesure où le coefficient g est constant, le transistor fonctionne alors en régime linéaire. Ensuite, on atteint périodiquement la saturation. Pendant chaque période, il y a alors des phases de fonctionnement linéaire du transistor où la quantité $M g - r_0 C_0$ est positive : le circuit (r_0, L_0, C_0) reçoit alors plus d'énergie qu'il n'en consomme. Ces phases alternent avec d'autres où le circuit consomme plus d'énergie qu'il n'en reçoit du transistor saturé.

Pendant ces dernières, la relation $i_D = g v_{Gs}$ n'est plus assurée.

$$\mathbf{2.a.} \text{ Si } v_{Gs} = V_0 \cos(\Omega t), \text{ l'intensité } i_D \text{ vaut : } i_D(t) = (V_0 / X') \sin(\Omega t).$$

$$\text{Comme } i_0 = -i_D, \text{ on a : } i_0 = -\frac{V_0}{X'} \sin(\Omega t).$$

En reportant cette valeur dans l'expression de la tension $v_{Gs}(t)$ obtenue au début de la question 1.b, on trouve :

$$V_0 \cos(\Omega t) = -V_0 \frac{L_0 \Omega}{X'} \cos(\Omega t) - V_0 \sin(\Omega t) \left(\frac{r_0}{X'} + M g \Omega \right).$$

Cette écriture n'a de sens que si :

$$\bullet X' = -L_0 \Omega ;$$

$$\bullet \frac{r_0}{X'} + M g \Omega = 0, \text{ soit } M g \Omega = -\frac{r_0}{X'}.$$

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

2.b. C'est la première des conditions qui fixe la fréquence de l'oscillation.

A la question IV.1.c, on avait $X' = -\frac{1}{C_0 \Omega}$, la condition $X' = -L_0 \Omega$ donne bien :

$$L_0 C_0 \Omega^2 = 1.$$

De même, en remplaçant X' par $-\frac{1}{C_0 \Omega}$, la deuxième condition s'écrit bien :

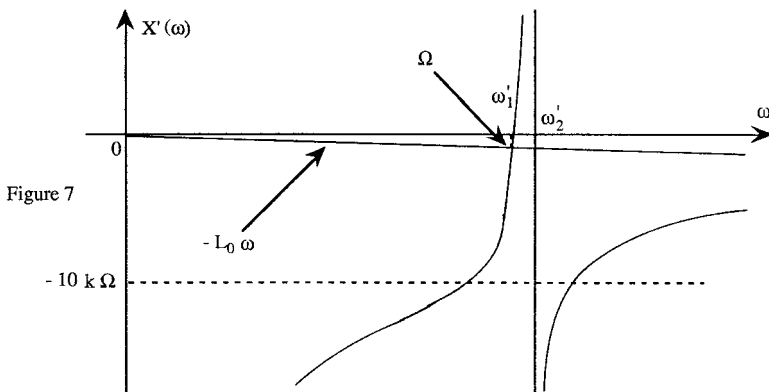
$$M_c g = r_0 C_0.$$

En combinant les deux relations, on trouve : $M_c = \frac{r_0}{g L_0 \Omega^2}$.

3.a. La pulsation Ω d'oscillation est fixée par la condition : $X'(\Omega) = -L_0 \Omega$;

La figure 7 montre que cette pulsation est légèrement inférieure à $\omega'_1 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$.

3.b. Nous avons vu qu'au voisinage de la pulsation ω'_1 , la réactance $X'(\omega)$ varie de 50 ohms par rad.s^{-1} . Comme au voisinage de ω'_1 , la réactance $L_0 \omega$ est proche de 1,0 k Ω , l'écart $\omega'_1 - \Omega$ est de l'ordre de 20 rad.s^{-1} . L'écart $\Delta \nu$ de fréquence correspondant est de 3,2 Hz.



Remarque : selon les types d'oscillateurs dans lesquels ils sont utilisés, certains "quartz" oscillent au voisinage de la pulsation ω_1 , dite de résonance série, ou au voisinage de ω_2 (résonance parallèle). Nous avons vu qu'en plaçant un petit condensateur en parallèle avec le "quartz", on modifie la valeur de ω_2 (qui se rapproche de ω_1) ; de même, en montant en série avec le "quartz" un petit condensateur, on modifie légèrement la pulsation ω_1 pour laquelle sa réactance s'annule (ω_1 se

CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS GÉNÉRAL 1997 – CONCOURS

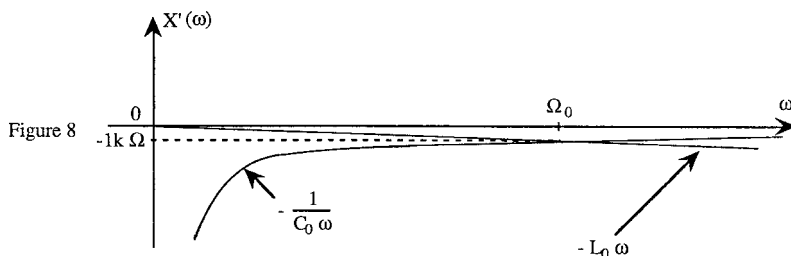
rapproche de ω_2). Il est donc toujours possible de faire osciller un “quartz” à la fréquence nominale inscrite sur son boîtier.

3.c. Nous avons montré à la question IV.2.b que la valeur M_c de M qui permet d’obtenir des oscillations quasi-sinusoïdales peut s’exprimer en fonction de r_0 , g , L_0 et de la fréquence d’oscillation du montage. Puisque l’oscillateur “à quartz” de la figure 8 du texte a même fréquence que l’oscillateur classique de la figure 6 de l’énoncé, c’est la même valeur de M qui conviendra : en remplaçant la capacité C_0 par le quartz Q (en parallèle avec $C_p \ll C_0$), il n’est pas nécessaire de retoucher au couplage des bobines.

3.d. Si L_0 augmente de 10^{-3} en valeur relative, sa réactance à 0,16 MHz augmente de 1 ohm. Pour que la condition $X'(\Omega) = -L_0 \Omega$ soit assurée, il faut que la pulsation Ω diminue de $1/50^{\text{ième}}$ de radian par seconde ; on aura donc $\delta N \approx -3 \cdot 10^{-3}$ Hz.

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{\delta \Omega}{\Omega} = \frac{1}{50 \cdot 10^6} = 2,0 \cdot 10^{-8} : \text{en un an } (3,2 \cdot 10^7 \text{ s}), \text{ l'horloge retardera de } 0,6 \text{ s.}$$

3.e. La figure 8, sur laquelle ont été tracées la droite représentant $-L_0 \omega$ et la réactance $X' = -\frac{1}{C_0 \omega}$ du condensateur de capacité C_0 , montre que l’angle sous lequel se coupent ces deux courbes est très faible (alors qu’il est proche de 90° dans le cas de l’oscillateur à “quartz”).



Une même variation δL_0 entraîne de ce fait une variation δN_0 de la fréquence d’oscillation très supérieure à δN ; en fait, $L_0 C_0 \Omega_0^2 = 1$, donc $\frac{\delta L_0}{L_0} = -2 \frac{\delta \Omega_0}{\Omega_0} \Rightarrow \frac{\delta \Omega_0}{\Omega_0} = -0,5 \cdot 10^{-3}$.

On en déduit la valeur de $\delta \Omega_0$, soit $\delta \Omega_0 = -500 \text{ rad.s}^{-1}$ ou $\delta N_0 = -80 \text{ Hz}$.

En un jour, l’oscillateur, dont la fréquence aura décréu, au lieu de compter $8,6 \cdot 10^4 \text{ s}$, en comptera moins et retardera de $8,6 \cdot 10^4 \text{ s} \times 0,5 \cdot 10^{-3} = 43 \text{ s}$.

Le “quartz” a donc pour effet de transformer un retard de 43 secondes par jour, retard courant avec une horloge classique, en un retard d’une seconde par an.