CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

CORRIGÉ

par Suzanne FAYE
et les membres du jury

I. QUELQUES OUTILS DE L'ASTROPHYSIQUE

1. **Effet Doppler**[1]

a. Le point P est défini par : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$

$$\overrightarrow{OO'} = vt\ \overrightarrow{u_x}$$

où $\overrightarrow{u_x}$ est un vecteur unitaire sur l'axe des x. Donc, en projection sur l'axe des x : $x = vt + x'$.

b. L'expression *s (t, x)* devient :

$$s(t, x') = s_o \cos\omega\left(t - \frac{x' + vt}{c}\right) = s_o \cos\omega\left[\left(1 - \frac{v}{c}\right)t - \frac{x'}{c}\right]$$

$$s(t, x') = s_o \cos\left(\omega' t - \frac{\omega x'}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

c. $\lambda = cT = \dfrac{2\pi c}{\omega}$; $\lambda' = cT' = \dfrac{2\pi c}{\omega'}$, d'où $\lambda' = \dfrac{2\pi c}{\left(\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)\right)} = \dfrac{\lambda}{1 - \frac{v}{c}} \approx \lambda\left(1 + \dfrac{v}{c}\right)$ v étant très inférieure à c ; $\lambda' > \lambda$ si si v > 0.

La longueur d'onde reçue par l'observateur est plus grande que la longueur d'onde émise par la source si la source et l'observateur s'éloignent l'un de l'autre. La longueur d'onde reçue est plus petite que la longueur d'onde émise si source et observateur se rapprochent l'un de l'autre.

1 Christian Doppler, physicien autrichien du XIX^e siècle, étudia la variation de la hauteur du son perçu par un observateur lorsque la source se déplace par rapport à cet observateur, d'où le nom d'effet Doppler, généralisé à d'autres ondes ; dans le cas des ondes électromagnétiques (effet Doppler-Fizeau), le problème est différent ; en effet, la vitesse de la lumière dans le vide est un invariant, alors que le son par exemple ne peut pas se propager dans le vide, mais seulement dans un milieu. Il y a donc une profonde différence de conceptualisation. Cependant, l'approximation ci-dessous est valable pour les ondes électromagnétiques si la vitesse de la source est très inférieure à la vitesse de propagation de l'onde.

d. **Application**

L'émission a lieu avec la longueur d'onde λ ; sur la Lune, $\lambda' \approx \lambda\left(1 - \frac{|v|}{c}\right)$ (rapprochement).

Le retour sur le vaisseau spatial donne :

$$\lambda'' \approx \lambda'\left(1 - \frac{|v|}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{|v|}{c}\right)^2 \approx \left(1 - \frac{2\,|v|}{c}\right)$$

d'où en valeur absolue : $\Delta\lambda = |\lambda'' - \lambda|$

et : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{|\lambda'' - \lambda|}{\lambda} \approx \frac{2v}{c}$.

La vitesse du vaisseau spatial par rapport à la Lune est donc :

$$\boxed{v = \frac{c}{2}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda}}$$

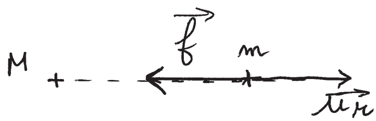
Notez bien le facteur $\frac{1}{2}$ et $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$.

<u>*Application Numérique*</u> *:* $v = \frac{3 \times 10^8}{2} \times \frac{20}{3 \times 10^6} = 10^6\ m\,/\,s.$

Remarque : Une fréquence de 3 GHz est obtenue avec un radar classique.

2. **Bilan énergétique**

a. La force d'interaction gravitationnelle est toujours attractive ; la force $\vec{f}$ exercée par la masse M sur la masse m est dans le sens du vecteur $\left(-\overrightarrow{u_r}\right)$, si l'on appelle $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial à partir du centre attracteur M :



$$\overrightarrow{f} = -G\,\frac{Mm}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$$

Le travail de cette force dans un déplacement élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dl} = -G\,\frac{Mm}{r^2}\,\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{dl}$$

où : $$\vec{u}_r \cdot \overrightarrow{dl} = dr,$$

d'où : $$\delta W = -G\,\frac{Mm}{r^2}\,dr.$$

Lorsque r varie de r_1 à r_2, le travail de la force exercée par M sur m s'écrit :

$$W_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2}\,dr = \left(\frac{GMm}{r}\right)_{r_1}^{r_2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$$

donc : $$W_1^2 = E_p\left(r_1\right) - E_p\left(r_2\right)$$

avec : $$E_p\,(r) = -G\,\frac{Mm}{r}$$

E_p est appelée énergie potentielle ; il s'agit ici de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle.

Le théorème de l'énergie cinétique, le corps de masse m ayant la vitesse v_1 à la distance r_1, et la vitesse v_2 à la distance r_2, s'écrit :

$$\frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 = W_1^2 = E_p\left(r_1\right) - E_p\left(r_2\right)$$

d'où : $$\frac{1}{2}\,m\,v_2^2 + E_p\left(r_2\right) = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + E_p\left(r_1\right)$$

La quantité $\frac{1}{2}\,m\,v^2 + E_p\left(r\right)$, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, constitue l'énergie mécanique totale E de la particule de masse m.

L'égalité ci-dessus montre que l'énergie mécanique se conserve.

Pour r infini, $E_p\,(r)$ tendant vers zéro quand r tend vers l'infini et la vitesse étant v_o à l'infini, l'énergie E s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}\,mv_0^2 - 0$$

d'où : $$\boxed{E = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}\,mv_0^2}$$

b. L'énergie potentielle de la particule m est nulle à l'infini ; son énergie est alors purement cinétique, or l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v_0^2$ est toujours positive. Comme l'énergie mécanique totale est un invariant, une particule d'énergie mécanique totale négative ne peut aller à l'infini. Sa trajectoire restera bornée. C'est le cas des planètes du système solaire qui décrivent des trajectoires autour du Soleil, trajectoires elliptiques en première approximation (mouvement dit keplérien).

Le cas $E = 0$ permet à la particule d'aller à l'infini, mais avec une vitesse qui tend vers zéro quand r tend vers l'infini. La particule part de l'infini ou arrive à l'infini avec une vitesse nulle. C'est le cas d'une comète qui part des confins du système solaire (r quasi infini) sans vitesse initiale. Elle décrit alors en première approximation une parabole.

Certaines comètes vérifient $E > 0$ (elles décrivent alors une hyperbole en première approximation). D'autres vérifient $E < 0$ (elles décrivent alors une ellipse en première approximation) ; c'est le cas de la comète de Halley observée périodiquement depuis la Terre.

$E < 0$	trajectoire bornée planètes, satellites
$E = 0$	vitesse nulle à l'infini
$E > 0$	vitesse différente de zéro à l'infini

Un vaisseau spatial d'énergie E positive ne sera pas satellisé.

Modèle sphérique homogène, ou à symétrie sphérique : la terre peut être considérée, en première approximation, comme formée de couches concentriques homogènes ; en fait, elle est aplatie aux pôles et comporte des inhomogénéités dont on peut ne pas tenir compte dans un modèle simplifié.

c. **Applications : les vitesses cosmiques**

On prendra soin de distinguer le repère géocentrique G et le repère héliocentrique H.

Leurs axes sont parallèles entre eux, mais le premier repère est lié au centre d'inertie de la Terre, qui décrit, en première approximation, un cercle autour du centre d'inertie du système solaire ; le deuxième repère est lié au centre d'inertie du système solaire.

Les deux repères sont en translation circulaire l'un par rapport à l'autre ; il ne s'agit pas d'une rotation d'axes, mais d'une rotation du point de référence d'un repère, dans le deuxième repère.

La Terre tourne autour du Soleil en un an ; donc, pour un lancement qui dure moins d'une journée (voir les valeurs numériques ci-dessous), le repère géocentrique pourra être considéré comme galiléen[2].

2 Une analyse plus précise est proposée à la fin du c.3.5.

De même, le Soleil tourne autour du centre de la galaxie (voir fin de la partie II), qui se déplace elle-même par rapport au reste de l'Univers ; pour la durée des mouvements que nous étudions dans cette partie I.2.c., le repère héliocentrique sera considéré comme galiléen.

c.1. Dans le repère géocentrique, considéré comme galiléen en première approximation :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{G M_T \; m}{R_T} \approx 0$$

d'où : $$v_1 = \sqrt{\frac{2G \; M_T}{R_T}} = 11 \; km/s$$ (ou 11,2 km/s)

c.2. Dans le repère héliocentrique, considéré comme galiléen en première approximation :

$$\frac{1}{2} m \; v_s^2 - G \; \frac{M_s \; m}{\varphi_T} = 0$$

d'où : $$v_s = \sqrt{\frac{2G \; M_s}{\varphi_T}} = 42 \; km/s$$ (ou 42,1 km/s)

c.3 *Note :* La vitesse u peut être calculée en considérant le mouvement circulaire uniforme de la Terre autour du Soleil.

MT × accélération = force d'interaction gravitationnelle.
L'accélération centripète s'écrit :

$$a = \frac{(vitesse)^2}{rayon \; de \; courbure} = \frac{u^2}{\varphi_T}$$

d'où : $$M_T \; u^2 \; / \; \varphi_T = G M_T \;\; M_S \; / \left(\varphi_T\right)^2$$

d'où : $$u = \sqrt{\frac{G M_s}{\varphi_T}} = \frac{v_S}{\sqrt{2}} \cong 30 \; km/s$$

ce qui est bien la valeur donnée dans l'énoncé.

c.3.1. Numériquement, on a :
$\varphi_T \; / \; R_T = 2{,}3 \times 10^4$ ce qui est très supérieur à 50,
$\varphi_T >> 50 \; R_T$, donc la particule considérée, vue du Soleil, est encore très proche de l'orbite terrestre.

c.3.2. Quand r passe de R_T à 50 R_T, le travail de la force de gravitation terrestre s'écrit :

$$W_T = E_{PT}\left(R_T\right) - E_{PT}\left(50 \; R_T\right) = G \;\; M_T \; m \left(-\frac{1}{R_T} + \frac{1}{50 \; R_T} \right)$$

$$|W_T| = G\ M_T\ m \times \frac{49}{50\ R_T}$$

le travail de la force de gravitation solaire s'écrit :

$$W_S = E_{PS}\left(\varphi_{T_1}\right) - E_{PS}\left(\varphi_{T_2}\right)$$

φ_{T_1} est très voisin de φ_{T_2} car $50\ R_T << \varphi_T$.

$$\delta W_S = -\ d\zeta_P = +\ d\left(\frac{G\ M_s\ m}{\varphi_T}\right) = -\ \frac{G\ M_s\ m}{\varphi_T^{\ 2}}\ d\varphi_T$$

On écrira : $$\delta\ W_S = |W_S|_{T_1}^{T_2} = \frac{G\ M_s\ m}{\varphi_T^{\ 2}} \times \delta\varphi_{\max}$$

où : $$\delta\varphi_{\max} \approx 50\ R_T$$

d'où : $$\boxed{\left|\frac{\delta\ W_s}{W_T}\right| \approx 50 \frac{M_s}{M_T}\frac{R_T^{\ 2}}{\varphi_T^{\ 2}} \quad \text{en prenant : } \frac{49}{50} \approx 1}$$

En ordre de grandeur, nous avons donc :

$$\left|\frac{\delta\ W_S}{W_T}\right| \approx \frac{10^2}{2} \times \frac{1{,}99}{5{,}98} \times 10^6 \times \left(\frac{6{,}37}{1{,}99}\right)^2\ 10^{-10}$$

$$\left|\frac{\delta\ W_S}{W_T}\right| \approx 3 \times 10^{-2}$$

L'approximation proposée est donc valable à quelques pour-cent près.

c.3.3. Pour atteindre la vitesse v_s dans le repère héliocentrique, il faut, dans le repère géocentrique, une vitesse $v_{rest} = v_s - u = 42{,}1 - 30 = 12{,}1\ km/s$. Compte tenu de l'approximation précédente, on prendra $v_{rest} \approx 12\ km/s$.

La conservation de l'énergie dans le champ de gravitation terrestre, entre le point de lancement $\left(R_T\right)$ et le point de sortie du champ terrestre $\left(50\ R_T\right)$ s'écrit, d'après c.3.2.:

$$\frac{1}{2} m\ v_{rest}^2 = \frac{1}{2}\ m v_2^{\ 2} - \frac{G\ M_T\ m}{R_T}$$

ou : $$\frac{1}{2} m\ v_{rest}^2 - \frac{G\ M_T\ m}{50\ R_T} = \frac{1}{2}\ m v_2^{\ 2} - \frac{G\ M_T\ m}{R_T}$$

selon qu'on convient de prendre nulle ou pas tout à fait l'énergie potentielle de gravitation terrestre au point considéré comme sortie du champ de gravitation terrestre ; d'où :

$$(v_s - u)^2 = v_2{}^2 - 2\,\frac{G\ M_T}{R_T}$$

ou : $$(v_s - u)^2 = v_2{}^2 - 2 \times \frac{49}{50}\,\frac{G\ M_T}{R_T}$$

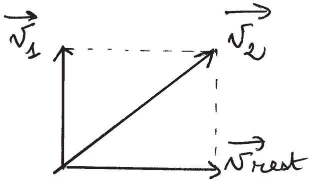
En utilisant $v_1^2 = 2\,G\ M_T / R_T$, on obtient :

$$\boxed{v_2{}^2 = (v_s - u)^2 + v_1^2}$$

ou : $$v_2{}^2 = (v_s - u)^2 + \frac{49}{50}\,v_1^2$$

L'expression encadrée suffit, compte tenu des approximations effectuées pour ce modèle simplifié. Cela revient à considérer la géométrie suivante :

où $v_{rest} = v_s - u$.



c.3.4. *Application numérique* : $v_2 = 16{,}5\ km/s$

En fait, une telle vitesse v_2 n'est pas nécessaire ; il suffit que la vitesse initiale permette d'atteindre une autre planète qui sera utilisée à son tour pour «assistance gravitationnelle».

c.3.5. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}_{rest}$ ne sont pas colinéaires de même sens, la vitesse de la Terre n'est pas utilisée au mieux, $\vec{v}_2$ soit être pris alors de norme plus grande.

Remarque (dépassant le niveau des classes terminales).

Dans toute l'étude précédente, on a assimilé le référentiel géocentrique R_G à un référentiel galiléen et considéré que la seule force qui s'exerce sur une particule de masse m située en un point M est la force $m\mathbf{g}(M)$ ayant pour origine le champ de gravitation terrestre $\mathbf{g}(M)$.

On n'a donc pas pris en compte le champ gravitationnel «extraterrestre» $\mathbf{A}(M)$ ayant pour source les astres autres que la Terre (Lune, Soleil, planètes...). Un élève de terminale aura tendance à penser que l'approximation ainsi effectuée revient à $A(M) \ll g(M)$.

Elle est en fait bien meilleure compte tenu d'une propriété subtile (appelée parfois *théorème astrocentrique*) qui ne peut être établie qu'au niveau du premier cycle universitaire.

Dans le cas du référentiel géocentrique, ce théorème énonce que R_G peut être considéré comme galiléen «aux termes des marées près», c'est-à-dire à condition d'ajouter à la force $m\mathbf{g}$ exercée par la Terre non pas la force gravitationnelle $m\mathbf{A}(M)$ exercée par les autres astres, mais, G désignant le centre de masse de R_G, le terme :

$$m\left(\mathbf{A}(M) - \mathbf{A}(G)\right) = m\mathbf{T}(M) \qquad \text{(terme des marées)}$$

Dans tout le «voisinage terrestre», c'est-à-dire assez loin des astres sources de $\mathbf{A}$, on a bien entendu $T(M) \ll A(M)$ de telle sorte que l'approximation consistant simultanément à considérer R_G comme galiléen et à ne pas prendre en compte l'action des astres autres que la Terre est considérablement meilleure que $A(M) \ll g(M)$.

3. Des ordres de grandeurs extrêmes

a. Les forces fondamentales en physique

a.1. Jusque vers 1980, on distinguait quatre types d'interactions fondamentales :
- gravitationnelle,
- électromagnétique,
- nucléaire faible,
- nucléaire forte.

Ces quatre interactions suffisent à décrire toutes les forces d'interactions de la nature ; ainsi, la force de Coulomb entre particules chargées est un cas particulier de la force électromagnétique, l'atome est formé d'un noyau massif entouré d'électrons ; le tout, électriquement neutre, est en interaction.

Le noyau est composé de neutrons et de protons ; les protons se repoussent par la force de Coulomb, mais l'interaction nucléaire forte assure la cohésion de l'ensemble.

Les particules électrons, neutrons, protons sont les sources d'interaction. Elle échangent des particules d'interaction ; la particule d'interaction de l'interaction électromagnétique est le photon.

a.2. Pour mieux comprendre l'ensemble des interactions, les physiciens des particules et les astrophysiciens cherchent à unifier les interactions fondamentales en un modèle unique, qui permettrait notamment de mieux comprendre le Big Bang des astrophysiciens.

Ainsi, les particules d'interaction de l'interaction nucléaire faible (qui intervient dans certains phénomènes de radioactivité) ont été prévues dans les années 80 et découvertes au CERN (Laboratoire Européen de Physique des Particules, à Genève) ; il s'agit des particules d'interaction W^+, W^-, $Z°$, dont l'existence confirme la validité du modèle électrofaible (unification de l'interaction électromagnétique et de l'interaction faible).

Note :

– Les particules sources sont classées en particules insensibles à l'interaction forte, ou leptons (l'électron en fait partie) et les particules sensibles à l'interaction forte, ou quarks (les protons et les neutrons sont formés de quarks). Le modèle standard comporte douze particules considérées comme fondamentales (à savoir six leptons, six quarks) et leurs douze antiparticules.

– Les particules d'interaction forte, ou gluons, et la particule d'interaction gravitationnelle, ou graviton, n'ont pas encore été mises en évidence, que ce soit de façon directe (qui nécessite des concentrations d'énergie que l'on ne sait pas obtenir actuellement) ou de façon indirecte.

b. **La gravitation quantique**

Préliminaires : M masse, L longeur, T temps.

• *Dimension de G* ; d'après l'expression de la force gravitationnelle :

$$[G]=\left[\frac{F\times r^2}{M\,m}\right] \qquad \text{où [ ] signifie dimension}$$

où F force, est homogène à masse × accélération.

$$[F]=M\times LT^{-2}$$

d'où :

$$[G]=M\,LT^{-2}\times L^2\times M^{-2}=M^{-1}\,L^3\,T^{-2}$$

• *Dimension de h :*

L'énergie d'un photon s'écrit $E=h\nu$.

$$[E]=[force\times longueur]=M\,LT^{-2}\times L=ML^2\,T^{-2}$$

$$[\nu]=\left[\frac{1}{temps}\right]=\frac{1}{T}=T^{-1}$$

$$[h]=\frac{[E]}{[\nu]}=[E]\times T=M\,L^2\,T^{-1}$$

• *Dimension de c :*

c vitesse de la lumière est homogène au rapport «longueur/temps» d'où $[c]=LT^{-1}$.

b.1. Longueur de Planck

$$G^{\alpha}\, h^{\beta}\, c^{\gamma} = 1$$

implique : $$\left(M^{-\alpha}\, L^{3\alpha}\, T^{-2\alpha}\right)\times\left(M^{\beta}\, L^{2\beta}\, T^{-\beta}\right)\times\left(L^{\gamma}\, T^{-\gamma}\right) = L$$

donc :
– exposant de $M = 0 \Rightarrow \beta - \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$
– exposant de $L = 1 \Rightarrow 3\,\alpha + 2\,\beta + \gamma = 1$
– exposant de $T = 0 \Rightarrow -\,2\,\alpha - \beta - \gamma = 0$

d'où : $$\gamma = -\,3\,\alpha$$

$$\gamma + 5\,\alpha = 1 \Rightarrow -\,3\,\alpha + 5\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha\,\frac{1}{2}$$

On a alors : $$\gamma = -\,3\,\alpha = -\,\frac{3}{2}$$

> La longueur de Planck s'écrit :
> $$lp = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4\times 10^{-35}\ m$$

Remarquer que cette valeur est très inférieure aux dimensions mêmes des nucléons et actuellement inaccessible à nos technologies expérimentales.

Un photon de longueur d'onde lp aurait la fréquence $\nu = c\,/\,lp$ et l'énergie $h\nu = hc\,/\,lp$.

Application numérique :

$$hc\,/\,lp = \frac{6{,}63\times 10^{-34}\times 3\times 10^{8}}{4\times 10^{-35}} \approx 5\times 10^{9}\ J$$

$$1\ ev = 1{,}6\times 10^{-19}\ J$$

$$hc\,/\,lp = \frac{5\times 10^{9}}{1{,}6\times 10^{-19}} = 3\times 10^{28}\ eV$$

b.2. **Temps de Planck** *tp*

$$[c] = L\,T^{-1} \Rightarrow tp = lp\,/\,C$$

d'où : $$tp = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}\times\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$$

$$\delta = \varepsilon = \frac{1}{2} \quad ;\ \zeta = -\,{}^{5}\!/_{2}$$

Application numérique :

$$t_p = \sqrt{\frac{Gh}{C^5}} = 1{,}3 \times 10^{-43}\ s$$

b.3. **Masse de Planck** *mp*

La méthode employée en b.1. donne ici :

$$\eta = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \theta = \nu = \frac{1}{2}$$

$$mp = \sqrt{\frac{hc}{G}} = 5{,}5 \times 10^{-8}\ kg$$

Cette masse correspond à une énergie $mp\,c^2 = 3 \times 10^{28}\ eV = hc/lp$

b.4. Ces valeurs extrêmes sont hors de portée au laboratoire ; elles pourraient correspondre aux valeurs à atteindre pour vérifier la **grande unification** (unification de toutes les interactions fondamentales) ou pour décrire le **«Big-Bang»**, explosion originelle de notre Univers.

c. **Trous noirs**

Préliminaire : la vitesse de libération correspond à une énergie E nulle :

$$E = \frac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G\ Mm}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2G\ M}{R}}$$

c.1.

$$v_e = c \;\Rightarrow\; \boxed{2G\ M/R = c^2} \;\Rightarrow\; \boxed{M/R = c^2/2G}$$

Le calcul relativiste complet confirme cet ordre de grandeur, malgré le caractère peu cohérent du calcul précédent qui utilise la mécanique newtonienne pour une vitesse égale à c.

c.2. Rayon d'un trou noir ayant la même masse que le Soleil :

$$\boxed{R = 2\,GM_s/c^2 = 3\ km \ll R_s}$$

Dans une étoile, les réactions nucléaires s'opposent à l'attraction gravitationnelle. Quand les réactions nucléaires s'arrêtent, un effondrement gravitationnel a lieu ; si l'étoile est suffisamment massive, cet effondrement peut aboutir à un trou noir ; aucun signal ne peut s'échapper du trou noir (vitesse de libération supérieure à la vitesse de la lumière). Le trou noir peut cependant être détecté par son action gravitationnelle sur des objets célestes du voisinage.

c.3. **Trou noir sphérique homogène ayant la masse volumique de l'eau** :

$$\varphi = \mathrm{M} / \left(\frac{4}{3}\pi\, R^3\right) \quad \Rightarrow \quad 2\,G \times \frac{4}{3}\pi\,\varphi\, R^2 = c^2$$

d'où :

$$\boxed{R = C\,\sqrt{\frac{3}{8\pi\,\varphi\, G}} = 4 \times 10^{11}\ m}$$

Notre galaxie est considérée comme formée d'une part d'un noyau central auquel s'appliquerait le modèle de trou noir ci-dessus ; d'autre part, ce noyau est entouré d'un disque dans lequel se trouve notre système solaire.

II. MODÈLE SIMPLE D'UNIVERS

1. **Décalage spectral**

Les spectres lumineux que nous recevons des objets célestes sont décalés vers le rouge, c'est-à-dire que nous observons des longueurs d'onde plus grandes que les longueurs d'onde émises dans le repère de la source. D'après le § I.1., cela montre que les sources s'éloignent de la Terre ; notre univers est en expansion.

2. **Expansion de l'Univers**

a. Constante de Hubble = pente de la droite, figure 2 ; $H = 17\ km$ par seconde et par million d'années-lumière. Une année-lumière = distance parcourue par la lumière en un an.

$$1\,a.l = c \times t = 3 \times 10^8 \times \underbrace{365 \times 24 \times 3600}_{1\text{ an}} = 9{,}46 \times 10^{15}\ m$$

d'où :

$$H = \left(17 \times 10^3\right) / \left(9{,}46 \times 10^{21}\right) = 1{,}8 \times 10^{-18}\ s^{-1}$$

H^{-1} est le temps qui se serait écoulé depuis le Big-Bang si les vitesses n'avaient pas varié.

b. Étude de **la raie α de la série de Lyman** (atome H) :

$$v = H\ r$$

$$\frac{\lambda_T - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \lambda_T = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right);$$

$$\lambda_T = \lambda_0 \left(1 + \frac{Hr}{c}\right) = 121{,}6\ \left(1 + \frac{17 \times 40}{3 \times 10^5}\right) \qquad \text{(attention aux unités)}$$

$$\boxed{\lambda_T \approx 121{,}9\ nm}$$

c. **Décalage spectral pour les galaxies lointaines**

Le rapport «vitesse de récession / distance» augmente ; on peut penser que les vitesses plus grandes correspondent à des sources plus éloignées, donc à des signaux émis à des dates plus anciennes ; ces vitesses diminuent sous l'effet de la gravitation ; aux distances les plus grandes, c'est-à-dire aux époques les plus proches du Big-Bang, correspondent donc des vitesses qui ont moins subi l'effet de gravitation dont on vient de parler.

3. **Observations d'objets exceptionnels : les quasars**

a. L'effet Doppler donne :
$$\lambda_T = \frac{\lambda_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

ici v positif, mais non négligeable devant c.

Le calcul grossier donnerait :
$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda_T - \lambda_0}{\lambda_T} = 0{,}78 \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}78\ c$$

b. Le calcul relativiste permet en fait d'établir une expression plus complexe de $\frac{v}{c}$ en fonction de λ_0 et λ_T, ce qui donne numériquement :
$$\frac{v}{c} = 0{,}91 \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}91\ c$$

Or : $$v = Hr \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v}{H} = \frac{0{,}91\ c}{1{,}8 \times 10^{-18}} = 1{,}5 \times 10^{26}\ m$$

donc : $$r = 1{,}6 \times 10^{10}\ a.l$$

c. **Âge présumé du quasar**

Si la vitesse du quasar n'avait pas varié au cours du temps, on aurait un âge τ égal à :
$$\tau = r / v = 1{,}6 \times 10^{10} / 0{,}91 = 1{,}8 \times 10^{10} \text{ ans} = H^{-1}$$

Quasar OP 172		
$\lambda_0 = 121{,}6\ nm$	;	$\lambda_T = 550{,}8\ nm$
$v = 0{,}91\ c$	;	$r = 1{,}6 \times 10^{10}\ a.l$
âge de l'ordre de $1{,}8 \times 10^{10}$ ans		

On trouve des estimations de quinze milliards d'années pour l'âge de l'Univers, ce qui est inférieur à la valeur ci-dessus, et peut être dû au ralentissement par effet gravitationnel décrit au § 2.c.

4. **Une limite à l'expansion de l'Univers**

a. Énergie cinétique d'une couche sphérique comprise entre les rayons r et $r + dr$:

$$d\mathscr{E}_c = (\varphi \times d\tau)\, v^2 / 2$$

$d\tau$ volume de la couche = $4\pi\, r^2\, dr$

$$v = Hr$$

d'où :

$$\boxed{d\mathscr{E}_c = 2\pi\, \rho\, H^2\, r^4\, dr}$$

b. Pour la sphère homogène de rayon R, l'énergie cinétique totale s'écrit :

$$\mathscr{E}_c = \int_0^R 2\pi\rho\, H^2\, r^4\, dr = 2\pi\rho\, H^2\, \frac{R^5}{5}$$

Masse de la sphère :

$$M_u = \frac{3}{4}\pi\rho\, R^3 \quad \Rightarrow \quad \xi_c = \frac{3}{2} H^2\, M_u\, \frac{R^2}{5}$$

$$\boxed{\mathscr{E}_c = 2\pi\rho\, H^2\, \frac{R^5}{5} = \frac{3}{10} H^2\, M_u\, R^2}$$

c. **Énergie potentielle gravitationnelle de l'Univers**

c.1. Masse d'une sphère de rayon $r < R$:

$$M(r) = \frac{3}{4}\pi\rho\, r^3$$

c.2. Couche sphérique comprise entre les rayosn r et $r + dr$:

– Masse : $dM = \rho \times 4\pi\, r^2\, dr$

– Énergie potentielle : $d\mathscr{E}_p = -\dfrac{G\, M(r)\, dM}{r}$

$$d\mathscr{E}_p = -\frac{G}{r} \times \frac{4}{3}\pi\rho\, r^3 \times \rho \times 4\pi\, r^2\, dr$$

$$d\mathscr{E}_p = -\frac{16\pi^2}{3}\rho^2\, G\, r^4\, dr$$

c.3. Énergie potentielle gravitationnelle de la sphère homogène Univers :

$$\mathscr{E}_p = \int_0^R -\frac{16\pi^2}{3}\,\rho^2\,G\,r^4\,dr = -\frac{16\pi^2}{3}\,\rho^2\,G\,\frac{R^5}{5}$$

$$M_u = \frac{4}{3}\pi\,\rho\,R^3$$

$$\boxed{\xi_p = -\frac{16\pi^2}{3}\,\rho^2\,G\,\frac{R^2}{5} = -\frac{3}{4}G\,\frac{M_u^{\,2}}{R}}$$

c.4. **Énergie totale de l'Univers**

$$E = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \frac{3}{5}\,M_u\,R^2\left(\frac{H^2}{2} - \frac{4}{3}\pi\,\rho_0\,G\right)$$

c.5. **Valeur critique de la masse volumique**

$E = 0$ pour : $$\rho_c = \frac{3}{8\pi\,G}H^2$$

Application numérique :

$$\rho_c = 6\times 10^{-27}\ kg/m^3 = 3{,}6\ m_p/m^3$$

c.6. **D'après la question I.2. (bilan énergétique)** :

$E > 0 \Rightarrow$	expansion infinie
$E = 0$	vitesse nulle à l'infini
$E < 0 \Rightarrow$	expansion bornée, univers dit «oscillant»

Or :

$E > 0$	suppose	$\rho < \rho_c$
$E = 0$	suppose	$\rho = \rho_c$
$E < 0$	suppose	$\rho > \rho_c$

Les valeurs actuelles donnent $E = 0$ possible, mais les incertitudes sur la valeur actuelle de ρ ne permettent pas de conclure, d'où la nécessité pour les astrophysiciens, d'évaluer ρ avec plus de précision. Notamment a-t-on pris en compte toutes les masses que contient l'Univers ?

On peut avoir omis par exemple :

– la masse de trous noirs,

– la masse éventuelle des neutrinos (très nombreux dans l'Univers, les neutrinos électroniques sont supposés actuellement de masse nulle),

– la masse d'objets peu détectables (matière noire)...

5. **Rayonnement thermique cosmologique**

a. Loi de Wien :

$$\lambda_m T = 2{,}90 \times 10^{-3}\ mK$$

Pour $T = 2{,}7\ K$, alors : $$\lambda_m = 1{,}07\ mm$$

b. Anisotropie du rayonnement thermique cosmologique :

b.1. Par effet Doppler :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{1070} \approx 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad v = c\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 300\ km/s$$

b.2. Cette vitesse est due aux mouvements généraux suivants :

- Mouvement de la Terre autour du Soleil :

$$30\ km/s$$

- Mouvement du Soleil autour du centre de la galaxie :

$$240\ km/s$$

- Mouvement de la galaxie par rapport au reste de l'Univers.

C'est le mouvement du Soleil dans la galaxie qui joue un rôle prépondérant.

b.3. Dans le mouvement circulaire uniforme du Soleil autour du centre de la galaxie, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\frac{M_s\, v^2}{R_G} = \frac{G\, M_s\, M_G}{R_G^2} \quad \Rightarrow \quad M_G = v^2\,\frac{R_G}{G}$$

Application numérique :

$$M_G = \left(3 \times 10^5\right)^2 \times \frac{2{,}6 \times 10^4 \times 9{,}46 \times 10^{15}}{6{,}67 \times 10^{-11}}$$

$$\boxed{M_G \approx 3{,}3 \times 10^{41}\ kg}$$

Le modèle qui suppose toute la masse au centre est trop restrictif ; il donne cependant un bon ordre de grandeur.

III. LES MIRAGES

1. **Mirages dans le désert**

   a. La température varie avec l'altitude, l'indice varie donc aussi ; lorsque le sol est très chaud, l'indice augmente avec l'altitude, donc a est positif.

   b. A l'altitude z, les lois de Descartes s'écrivent :
   – rayon réfracté dans le plan d'incidence,
   – $n \sin i = constante$.

   c. Équation différentielle donnant l'équation de la trajectoire suivie par le rayon lumineux :

$$\sin i = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$n \sin i = \frac{n_0 + az}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = constante\ A$$

d'où :

$$\left(n_0 + az\right)^2 = A^2\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)$$

On dérive par rapport à x :

$$2\left(n_0 + az\right) \times a \times \frac{dz}{dx} = 2\,A^2\,\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2 z}{dx^2}$$

donc :

$$a\left(n_0 + az\right) = A^z\,\frac{d^2 z}{dx^2}$$

avec un extremum :

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

L'équation différentielle sera donc :

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{a^2}{A^2}\,z = \frac{a\,n_0}{A^2}$$

On écrira :

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dx^2} - \omega^2 z = K}$$

K étant positif

d. Solution particulière : $$z_p = -\frac{K}{\omega^2}$$

Changement de variable :

$$Z = z - z_p \quad \Rightarrow \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$$

d'où : $$\frac{d^2Z}{dx^2} - \omega^2 \left(Z + z_p\right) = K$$

donc : $$\frac{d^2Z}{dx^2} - \omega^2 \, Z = 0 \qquad \text{(e)}$$

On cherche des solutions en exponentielle :

$$Z = Z_0 \, e^{rx}$$

qui reportés dans (*e*), donnent :

$$\left(r^2 - \omega^2\right) Z_0 \, e^{rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\, \omega$$

d'où : $$Z = Z_{0_1} \, e^{\omega x} + Z_{0_2} \, e^{-\omega x}$$

$$Z = Z_{0_1} \, e^{\omega x} + Z_{0_2} \, e^{-\omega x} + z_p$$

Prenons pour origine des coordonnées $\left(\frac{dZ}{dx}\right)_{x=0} = 0$;

alors : $$Z_{0_1} - Z_{0_2} = 0$$

$$Z = Z_{0_1} \left(e^{\omega x} + e^{-\omega x}\right)$$

La courbe est du type «chaînette», donc non rectiligne.

e. Le rayon émis par un point source situé au-dessus du sol atteint l'observateur après la trajectoire suivante :

L'observateur voit un morceau de ciel comme provenant du sol (effet de nappe d'eau).

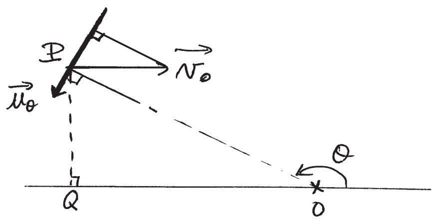
2. Mirages gravitationnels

a. Méthode dite de l'hodographe

a.1. Constante des aires

Note : L'invariance de la constante des aires est liée à la propriété de conservation du moment cinétique dans un champ de forces centrales, étudiée après la terminale. Nous nous limitons ici à un calcul géométrique.

Considérons le cas : r infini, θ voisin de π. On a la figure approchée suivante :



$$\overrightarrow{OP} = OP\,\vec{u}_r = r\,\vec{u}_r$$

Attention, $\vec{u}_\theta$ est dans le sens direct, la projection de $\vec{v}_0$ sur $\vec{u}_\theta$ est donc négative et :

$$PQ \approx r \sin\theta \quad \Rightarrow \quad b \approx (r \sin\theta) \quad \text{pris à l'infini.}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{u}_r\right) = \frac{dr}{dt}\,\vec{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}_\theta = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta = -v_0 \sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

d'où :

$$\boxed{r^2\,\frac{d\theta}{dt} = r\,v_0 = \left(-\,r\,v_0 \sin\theta\right)_\infty = -\,v_0\,b}$$

a.2. Relation fondamentale de la dynamique

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\,\frac{G\,Mm}{r^2}\,\vec{u}_r$$

En projection sur l'axe des x, on a :

$$m\,\frac{dv_x}{dt} = -\,\frac{G\,Mm}{r^2}\cos\theta = \oplus\,\frac{G\,Mm}{v_0\,b}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{G\,M}{v_0\,b}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

En intégrant par rapport au temps :

$$v_x - v_0 = \frac{G\ M}{v_0\ b}\left(\sin\theta - \sin\pi\right)$$

$$\boxed{v_x - v_0 = \frac{G\ M}{v_0\ b}\sin\theta}$$

a.3. Quand la particule s'éloigne à l'infini, θ tend vers φ.

v_x tend vers $v_f \cos\varphi$.

D'autre part, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv_0^2\ (\textit{départ}) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G\ Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_f^{\ 2} - 0$$

d'où : $$v_f = v_0$$

L'équation de la question (a.2.) précédente devient :

$$\vec{v}_f \cdot \vec{u}_x - v_0 = \frac{G\ M}{v_0\ b}\sin\varphi$$

$$v_f \cos\varphi - v_0 = \frac{G\ M}{v_0\ b}\sin\varphi$$

$$v_0\left(\cos\varphi - 1\right) = \frac{G\ M}{v_0\ b}\sin\varphi$$

Passant à l'arc moitié, on obtient :

$$-2\ v_0 \sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\frac{G\ M}{v_0\ b}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

d'où : $$\boxed{\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = -\frac{G\ M}{v_0^2\ b}}$$

b. <u>*Application numérique*</u> *:* Pour un photon passant au bord du Soleil :

$$v_0 \approx c \quad ; \quad b \approx R_s = 6{,}96 \times 10^8\, m$$

d'où : $$\tan\left(\varphi/2\right) \approx -\frac{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99\times10^{30}}{\left(3\times10^8\right)^2\times6{,}96\times10^8}$$

$$\tan\left(\varphi/2\right) \approx -2 \times 10^{-6} \quad \text{(très petit)}$$

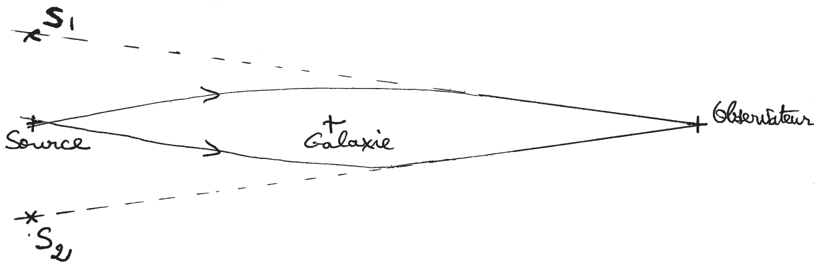
d'où : $$\tan\left(\varphi/2\right) \approx \varphi/2$$

d'où encore : $$\boxed{\varphi \approx -\frac{2\,G\,M}{C^2\,R_s} \quad ; \quad \textit{Application numérique :}\ \varphi \approx -0{,}87''}$$

Note : La valeur calculée en relativité générale est deux fois plus grande, mais l'ordre de grandeur est correct.

c. **Lentille gravitationnelle ; mirage gravitationnel**

La lumière émise par la source est déviée par la galaxie. Si la source, la galaxie et l'observateur sont alignés sur un même axe, l'observateur croit voir deux sources symétriques par rapport à cet axe.



La galaxie se comporte comme une lentille gravitationnelle.

Si la galaxie est éloignée de l'axe source-observateur, cela peut changer le nombre d'images perçues par l'observateur. De tels mirages gravitationnels se produisent avec les quasars, sources intenses très éloignées, que l'observateur peut percevoir comme plusieurs sources séparées. C'est le cas supposé des quasars jumeaux 0957 + 561 AB dont la photographie fut prise dans les années cinquante à l'aide du télescope Schmidt du Mont Palomar.

d. Si le photon avait une masse, le décalage vers le rouge pourrait être dû, non à un effet Doppler, mais à un effet gravitationnel ; le bilan énergétique serait :

$$h\nu_2 - h\nu_1 = \left[\frac{G\ M\ m_{ph}}{r}\right]^2$$

$$m_{ph}\,C^2 = h\nu \qquad \text{(relation d'Einstein)}$$

Pour un photon qui s'éloigne à l'infini :

$$h\nu' - h\nu_1 = -\frac{G\ M\ m_{ph}}{R_1} = -\frac{G\ M}{R_1\ C^2}\ h\nu_1$$

$$h\nu' = h\nu_1\left(1 - \frac{G\ M}{R_1\ C^2}\right)$$

donc : $\nu' < \nu_1$ et $\lambda = c/\nu$

donc : $\lambda' > \lambda_1$, décalage vers le rouge.

Application Numérique : Dans le cas du Soleil :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{G\ M_s}{R_s\ C^2} = 2 \times 10^{-6}$$

Ce décalage gravitationnel vers le rouge est donc en compétition avec l'effet Doppler. Les quasars ne seraient alors plus nécessairement aux confins de l'Univers. Le débat est ouvert.

IV. INTERFÉROMÉTRIE STELLAIRE

1. **Étude d'un dispositif interférentiel**

a.

$$E\ F_2 = E\ F_1$$

$$\delta = F_2\ M - F_1\ M$$

$$F_1\ M = \sqrt{\left(F_1\ M\right)^2} = \sqrt{\left(F_1\ \vec{M}\right)^2} = \sqrt{\left(O\vec{M} - O\vec{F_1}\right)^2}$$

O étant le point milieu de F_1F_2.

$$F_1\ M^2 = OM^2 + OF_1^2 - 2\,O\vec{M}\,.\,O\vec{F_1}$$

$$F_1\ M^2 = \left(d^2 + x^2\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ax$$

$$F_1\ M^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 - ax + x^2 \quad ; \quad d >> a \quad \text{et} \quad d >> x$$

$$F_1\ M^2 = d^2\left(1 + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 - ax}{d^2}\right)$$

$$F_1\ M = d\,(1-\varepsilon)^{1/2} = d\left(1-\frac{\varepsilon}{e}\right)$$

$F_2\ M$ est obtenu en changeant $\left(\frac{a}{2}\right)$ en $\left(-\frac{a}{2}\right)$.

D'où : $$\varepsilon = \frac{ax - x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{d^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon' = \frac{-ax - x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{d^2}$$

$$F_2\ M - F_1\ M = d\left(-\varepsilon' + \varepsilon\right) = \frac{ax}{d}$$

d'où : $$\boxed{\delta \approx \frac{ax}{d}}$$

b. Les deux ondes sont en phase si $\delta \approx p\lambda$, p étant un entier ; de plus, la différence de marche doit être inférieure à la longueur de cohérence, c'est-à-dire à la longueur d'un train d'onde ; sinon, les deux ondes en M ne proviennent pas du même train d'onde.

$$\boxed{\delta = p\lambda \quad ; \quad \text{p entier et même train d'ondes}}$$

2. **Mesure d'une distance angulaire**

a. $E'F_2 - E'F_1$ se calcule comme $F_2\ M - F_1\ M$ en remplaçant x par X et d par D, d'où :

$$E'F_2 - E'F_1 = a\,\frac{X}{D}$$

La différence de marche δ' entre les rayons $E'F_2\ M$ et $E'F_1\ M$ sera donc :

$$\delta' = \frac{ax}{d} + a\,\frac{X}{D}$$

Les deux rayons sont en phase au point M si $\delta' = q\lambda$, q entier et même train d'ondes.

b. **Mesure de β**

Le brouillage suppose un écart différent de marche de $\frac{\lambda}{2}$ entre les deux systèmes de franges :

$$\delta' - \delta = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad a_e\,\frac{X}{D} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{\beta = \frac{X}{D} = \frac{\lambda}{2\,a_e}}$$

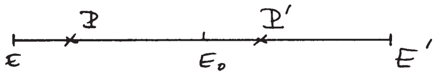
c. *Application numérique :* $\beta = 0{,}14 \times 10^{-6}\ rad = 0{,}03''$

La distance angulaire entre les deux étoiles est de trois centièmes de seconde.

3. **Mesure d'un diamètre apparent**

a. Les différents points de l'étoile sont indépendants, donc émettent des ondes incohérentes entre elles.

b. Divisons le segment EE' en deux parties égales et regroupons les points de chacune des parties en paires PP' comme l'indique la figure ci-dessous :



$$EE_0 = E_0\,E' = PP' = \frac{\Delta}{2}$$

D'après la question IV.2.b., le brouillage des franges dues aux ondes provenant de P et P' suppose :

$$\beta_P = \frac{\Delta/2}{D} = \frac{\lambda}{2\,a'_e}$$

Ceci est valable quelle que soit la paire PP' considérée ; donc le système de franges est totalement brouillé pour :

$$\boxed{\beta_P = \Delta/(2\,D) = \lambda/(2\,a'_e) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \Delta/D = \lambda/a'_e}$$

Ce résultat trouvé ici de manière rigoureuse et simple est en accord avec la théorie générale de l'intensité observée en M à partir d'une source uniforme de largeur Δ. Ce résultat caractérise la cohérence spatiale partielle de la source.

c. *Application numérique :*

$$\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{a'_e \max} = 9{,}1 \times 10^{-8}\ rad = 0{,}01''$$

Le diamètre apparent minimal mesurable est de un centième de seconde.

CONCLUSION

L'astrophysique et la physique des particules se rejoignent dans l'effort de structuration et d'unification de la physique. Le lecteur désireux d'approfondir les éléments d'astrophysique présentés ci-dessus pourra se reporter aux ouvrages suivants :

• ***Bibliothèque «Pour la Science»*** *(diffusion Belin)*
– L'Univers : des faits aux théories.
– Vie et mort des étoiles.

• ***Collection «Liaisons scientifiques»*** *(Hachette / CNRS)*
– Méthodes de l'astrophysique par Lucienne GOUGENHEIM.

• ***Revues***
– Pour la Science.
– La Recherche.
– Ciel et Espace.

Le numéro de juillet-août 1996 de la revue Ciel et Espace traite des comètes et donne des références sur Internet ; le CERN et la NASA sont aussi sur Internet.