
 CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

Concours Général

Session de 1996 - Classe de terminale S

PHYSIQUE - CHIMIE

Durée : 5 heures

ÉNONCÉ

Le but du problème, composé de quatre parties, est de présenter quelques éléments d'astrophysique. Sauf mention contraire, on se place dans le cadre de la mécanique classique.

I. QUELQUES OUTILS DE L'ASTROPHYSIQUE

1. Effet Doppler

Dans un repère R , on considère une onde progressive lumineuse, plane et monochromatique, représentée à la date t et à l'abscisse x , par la vibration $s(t, x)$, d'amplitude s_0 et de pulsation temporelle ω . Cette onde se propage à la vitesse c , on peut donc écrire :

$$s(t, x) = s_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = s_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$$

Un repère R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R , parallèlement à l'axe des x (figure 1), à la vitesse v . Les origines de deux repères coïncident à l'instant $t = 0$.

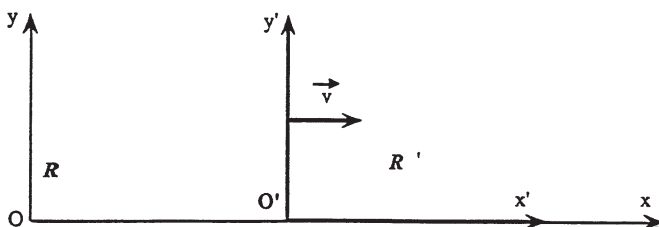


Figure 1

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

Un point P d'abscisse x dans le repère R a pour abscisse x' dans R' .

- a. Exprimer x puis $s(t, x)$ en fonction de x' et de t .
- b. Montrer que, pour un observateur lié au repère R' , l'onde précédente a une pulsation temporelle ω' différente de ω ; exprimer ω' en fonction de ω , v et c .
- c. Quelle est la longueur d'onde λ de l'onde plane dans R ?

On note λ' la longueur d'onde apparente de cette même onde dans le repère R' où l'on admet que la vitesse de la lumière reste égale à c . Exprimer λ' en fonction de λ , v et c .

A quelle condition cette relation est-elle vraie en mécanique relativiste ?

d. Application

Le mouvement d'un vaisseau spatial qui s'approche de la Lune est purement radial (sa trajectoire est orthogonale à la surface lunaire).

Ce vaisseau envoie vers la Lune un signal radio de fréquence 3,0 GHz ; il reçoit de la Lune un écho décalé de 20 kHz. En prenant $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s, déterminer la vitesse du vaisseau spatial par rapport à la Lune.

2. Bilan énergétique

On note G la constante de gravitation.

Soit deux masses ponctuelles M et m en interaction gravitationnelle : dans un certain repère galiléen R , la masse M est fixe.

Partant de l'infini où elle avait une vitesse v_o , mesurée dans R , la masse m se rapproche de M : on note r la distance de m à M .

- a. Lorsque r varie de r_1 à r_2 , le travail de la force exercée par M sur m est égal à la différence $E_p(r_1) - E_p(r_2)$, avec $E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$.

Qu'est-ce que E_p ?

Montrer que l'énergie mécanique totale E de la particule de masse m est une constante. Exprimer cette constante en fonction de m et de v_o .

- b. Dans un repère galiléen R où une masse ponctuelle M est fixe, on mesure l'énergie mécanique totale E d'une particule de masse m placée dans le champ de gravitation de M ; on établit alors que cette énergie E est négative.

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

Montrer que m ne peut s'éloigner de M à l'infini.

Interpréter le cas où $E = 0$.

On admet dans ce qui suit qu'une sphère homogène, ou à symétrie sphérique, de masse M et de rayon R , se comporte, vis-à-vis d'une particule ponctuelle extérieure de masse m , comme si la masse M était ponctuelle et placée au centre de la sphère considérée.

Que pensez-vous de ce modèle pour une planète telle que la Terre ?

c. Applications

- c.1. Calculer la vitesse initiale minimale v_I (mesurée dans un repère géocentrique G dont les axes passent par le centre d'inertie de la Terre et sont dirigés vers trois «étoiles fixes»), qu'il faut donner à une particule de masse m pour que, lancée à partir de la surface de la Terre, elle puisse échapper à l'attraction terrestre.

On donne : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$; masse de la Terre : $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; rayon de la sphère terrestre considérée comme homogène : $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

- c.2. Calculer de même la vitesse minimale v_s que doit posséder une particule située sur l'orbite terrestre considérée comme circulaire et de rayon ρ_T , pour que cette particule, que l'on considèrera comme située hors du champ de gravitation de la Terre, puisse échapper à l'attraction du Soleil (v_s est mesurée dans un repère héliocentrique H dont les axes passent par le centre d'inertie du système solaire et sont constamment parallèles à ceux du repère géocentrique G).

On donne : Masse du Soleil : $M_s = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; $\rho_T = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

- c.3. On admet que le centre d'inertie de la Terre, dans son mouvement circulaire autour du Soleil, est caractérisé à chaque instant par le vecteur vitesse $\vec{u}$, mesuré dans H .

La vitesse $u = \|\vec{u}\|$ est considérée comme constante : $u = 30 \text{ km/s}$.

Une particule de masse m est lancée de la surface de la Terre avec une vitesse v , mesurée dans le repère géocentrique G , telle que $v > v_I$. Parvenue à une distance r du centre de la Terre telle que $r \approx 50 R_T$, la masse m , que l'on considère comme sortie alors du champ de gravitation terrestre, est encore animée à cet instant d'une vitesse «restante» v_{rest} mesurée de G .

- c.3.1. Montrer que quelle que soit alors la position de m par rapport à la Terre (pourvu que $r \approx 50 R_T$), la particule considérée, vue du Soleil, est encore très proche de l'orbite terrestre.

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

- c.3.2. Montrer que lors de l'éloignement conduisant la masse m de $r = R_T$ à $r \approx 50 R_T$, le travail de la force de gravitation solaire appliquée à m est négligeable devant celui de la force de gravitation terrestre.

On admet que pour $r \approx 50 R_T$, la vitesse d'entraînement de m (vitesse, mesurée dans H , d'un point fixe de G coïncidant avec m à l'instant considéré), est caractérisée par le vecteur $\vec{u}$. De plus, on se place dans le cas où le vecteur vitesse $\vec{v}_{rest}$ est parallèle et de même sens que $\vec{u}$.

On note v_2 la vitesse initiale minimale, mesurée dans G , qu'il faut communiquer à la particule m pour que, lancée à la surface de la Terre, elle échappe à l'attraction solaire.

- c.3.3. Dédurre des questions précédentes une relation entre v_2 , v_I , v_s et u .

- c.3.4. Calculer v_2 .

- c.3.5. Examiner le cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}_{rest}$ ne sont pas colinéaires et de même sens.

3. Des ordres de grandeurs extrêmes

a. Les forces fondamentales en physique

- a.1. Jusque vers 1980, on distinguait quatre types d'interactions fondamentales. Quels étaient ces quatre types ?
- a.2. Savez-vous quelle unification a été établie dans les années 1980 ?

b. La gravitation quantique

La gravitation quantique cherche à combiner la relativité restreinte, la théorie de la gravitation d'Einstein et la mécanique quantique ; elle utilise les constantes remarquables G et c introduites ci-dessus, combinées avec la constante de Planck h qui permet par exemple de relier la fréquence ν d'une onde lumineuse à l'énergie E des photons correspondants :

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

- b.1. Montrer qu'il existe trois coefficients α, β, γ uniques, tels que $G^\alpha h^\beta c^\gamma$ représente une longueur. Quel est l'ordre de grandeur de cette longueur notée l_p et appelée longueur de Planck ?

Quelle est, en électronvolts, l'énergie d'un photon qui aurait l_p pour longueur d'onde ?

On donne la valeur de la charge élémentaire $e : 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

- b.2. Montrer qu'il existe trois coefficients $\delta, \varepsilon, \zeta$ uniques, tels que $G^\delta h^\varepsilon c^\zeta$ représente un temps. Quel est l'ordre de grandeur de ce temps, noté t_p et appelé temps de Planck ?

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

- b.3. Montrer qu'il existe trois coefficients η , θ , κ uniques, tels que $G^\eta h^\theta c^\kappa$ représente une masse. Quel est l'ordre de grandeur de cette masse notée mp ?

Quelle est, en électronvolts, l'énergie correspondant à mp ?

- b.4. Commenter brièvement l'ensemble de ces résultats.

c. Les trous noirs

On appelle vitesse de libération la vitesse initiale qui permet à un corps situé à la surface d'un centre attracteur sphérique de masse M et de rayon R d'échapper à cet attracteur.

- c.1. Évaluer le rapport M/R d'un trou noir pour lequel la vitesse de libération est égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Commenter ce résultat classique dont on considérera l'ordre de grandeur comme bon.
- c.2. Dédurre du résultat précédent le rayon d'un trou noir ayant la même masse que le Soleil.
- c.3. Quel serait, selon ce même résultat, le rayon d'un trou noir ayant la masse volumique de l'eau liquide ? Ceci a été proposé comme modèle du centre de notre Galaxie.

II. MODÈLE SIMPLE D'UNIVERS

1. Décalage spectral

Les spectres lumineux que nous recevons des objets célestes (étoiles, galaxies, amas de galaxies), sont tous décalés vers le rouge.

Que peut-on en conclure quant au mouvement des objets célestes par rapport à la Terre ?

2. Expansion de l'Univers

A partir de mesures effectuées avec le télescope du Mont Wilson, aux États-Unis, l'astronome Hubble a montré, dans les années 1920, que la vitesse d'éloignement (ou de récession) des objets célestes observés, est proportionnelle à leur distance r par rapport à la Terre (figure 2).

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

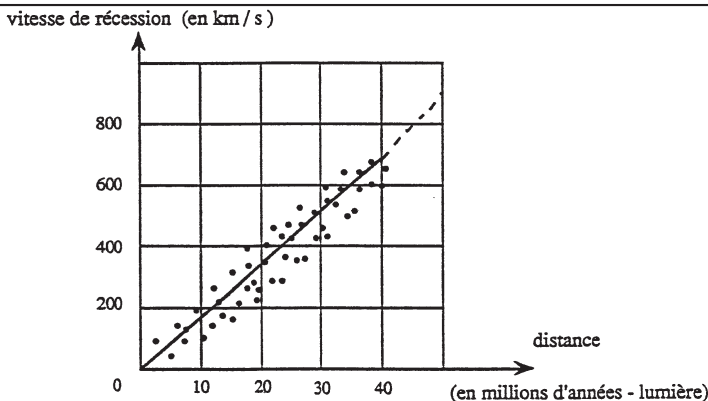


Figure 2

H étant la constante de Hubble, on pose : $\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = H$.

- a. A l'aide de la courbe de la figure 2, donner la valeur numérique de la constante de Hubble, en kilomètres par seconde et par million d'années de lumière, pour des vitesses de récession faibles devant la vitesse de la lumière.

En déduire la valeur numérique de H en s^{-1} ($1 \text{ M. a.l.} = 10^6 \text{ a.l.} = 9,46 \cdot 10^{21} \text{ m}$) ainsi que celle de H^{-1} en années.

Que vous suggère cette dernière valeur numérique ?

- b. On suppose qu'on analyse la raie de longueur d'onde 121,6 nm (raie α de la série de Lyman) émise par une étoile située à 40 M. a.l. de la Terre.

Quelle est la longueur d'onde correspondante mesurée sur la Terre ?

- c. La lumière qui nous parvient d'une galaxie lointaine ($r > 1,5 \text{ G. a.l.}$) a été émise alors que l'âge de l'Univers était sensiblement plus faible que son âge actuel. Les décalages spectraux des lumières provenant de tels objets montrent que le rapport entre leur vitesse de récession, déduite de ce décalage, et leur distance (déterminée par d'autres lois que celle de Hubble) augmente. Plusieurs théories, qui se complètent, sont avancées pour expliquer ce phénomène : en connaissez-vous ?

3. Observations d'objets exceptionnels : les quasars

Les quasars (contraction de «quasi-stellar radio sources»), découverts en 1960, sont des galaxies extrêmement lointaines et lumineuses, sièges de champs gravitationnels intenses.

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

Des enregistrements récents de spectres électromagnétiques, avec le système à caméra Vidicon du télescope de Cerro Tololo au Chili, ont permis d'étudier les raies d'émission du quasar OP 172, présentant un décalage spectral vers le rouge particulièrement important.

Dans ce cas, la raie de 121,6 nm est en effet déplacée jusqu'à 550,8 nm, ce qui l'amène dans la partie verte du spectre visible.

a. En utilisant les résultats obtenus au paragraphe I.1. (effet Doppler), déterminer la vitesse v du quasar OP 172 par rapport à la Terre. Pourquoi ce calcul est-il très grossier ?

b. Pour un tel décalage spectral, la théorie de la relativité restreinte attribue au rapport $\frac{v}{c}$ la valeur $\frac{v}{c} = 0,91$.

En supposant que la valeur trouvée précédemment pour la constante de Hubble s'applique encore à ce quasar éloigné, donner, en années-lumière, la distance de ce quasar à la Terre.

c. Utiliser les résultats de la question précédente pour évaluer l'âge que l'on peut attribuer à ce quasar, si l'on suppose qu'il s'est éloigné à vitesse constante d'un point source originel.

4. Une limite à l'expansion de l'Univers

On prend comme modèle de l'Univers une sphère homogène Σ de rayon R et de masse volumique ρ ; on note M_u la masse totale de Σ .

a. Exprimer en fonction de ρ , H , r et dr l'énergie cinétique dE_c d'une couche d'Univers comprise entre les rayons r et $r + dr$ (figure 3).

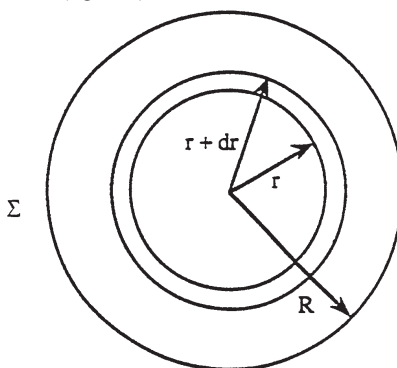


Figure 3

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

- b. En déduire l'énergie cinétique totale de l'Univers.
- c. On se propose de déterminer, selon ce modèle, l'énergie potentielle gravitationnelle de l'Univers.
- c.1. Déterminer la masse d'une sphère de rayon $r < R$, ayant même centre que Σ .
- c.2. En déduire l'énergie potentielle d'une couche comprise entre les rayons r et $r + dr$ posée sur la sphère de rayon r (l'énergie potentielle d'interaction entre les particules constituant la couche sera négligée devant l'énergie d'interaction entre la couche et la sphère de rayon r sur laquelle est posée la couche).
- c.3. Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle de l'Univers.
- c.4. Exprimer de même l'énergie totale de l'Univers en fonction de M_u , R , ρ , de la constante de Hubble H et de la constante de gravitation G .
- c.5. Pour quelle valeur critique ρ_c de la masse volumique ρ de l'Univers cette énergie est-elle nulle ?
- Donner la valeur numérique de ρ_c en kg/m^3 , puis, sachant que la masse m_p d'un proton est égale à $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, exprimer ρ_c en masse de proton par mètre cube (m_p/m^3).
- c.6. Quel est, pour les astrophysiciens, l'intérêt de déterminer ρ avec assez de précision pour savoir si ρ est plus grande ou plus petite que sa valeur critique ρ_c ?

Savez-vous quel est l'état actuel de la recherche à ce sujet ?

5. Rayonnement thermique cosmologique

Penzias et Wilson découvrirent en 1965 que l'espace intergalactique est le siège d'un rayonnement thermique dont le spectre est celui d'un corps noir (que l'on peut représenter comme un gaz de photons) de température 2,7 K.

- a. Dans un tel spectre, la longueur d'onde λ_m la plus intense vérifie la loi de Wien :

$$\lambda_m \cdot T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

En déduire la longueur d'onde la plus intense contenue dans le rayonnement thermique cosmologique. Dans quel domaine du spectre électromagnétique ce rayonnement est-il situé ?

- b. Le rayonnement thermique cosmologique n'apparaît pas parfaitement isotrope : dans une certaine direction, la longueur d'onde λ_m apparaît plus grande de $1 \mu\text{m}$, alors qu'elle est plus petite de cette même quantité dans la direction juste opposée.

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

- b.1. On attribue cette anisotropie à l'effet Doppler dû au mouvement de l'observateur par rapport à l'Univers.

Quelle est la valeur numérique de la vitesse correspondant à ce mouvement ?

- b.2. Peut-on attribuer ce mouvement à un phénomène particulier ?

- b.3. On suppose que la vitesse calculée en b1 correspond essentiellement au mouvement du Soleil autour du centre de la Galaxie. On assimile ce mouvement à un mouvement circulaire de rayon $R_G = 2,6 \cdot 10^4$ années-lumière.

En admettant que toute la masse M_G de la Galaxie est concentrée en son centre (ou contenue dans une sphère homogène de rayon inférieur à R_G), évaluer M_G .

On estime, par d'autres considérations, que la Galaxie a une masse $M_G = 8 \cdot 10^{41}$ kg ; comparer ces deux estimations et commenter.

III. LES MIRAGES

1. Mirages dans le désert

Dans cette question, on considère un milieu d'indice n (au sens de l'Optique classique) ; cet indice varie avec l'altitude (figure 4) selon la loi linéaire :

$$n = n_0 + a z$$

où n_0 et a sont des constantes caractéristiques du milieu.

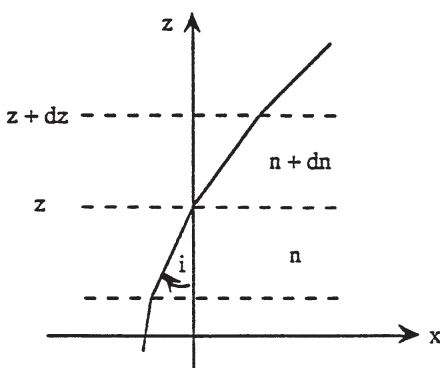


Figure 4

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

Un rayon lumineux est défini par son équation $z(x)$.

- Pourquoi l'indice de l'air varie-t-il avec l'altitude au voisinage du sol du désert ? Quel est le signe de a ?
- Rappeler les lois de Descartes à l'altitude z .
- En déduire une équation différentielle liant $\frac{dz}{dx}$ et z , puis une équation différentielle liant z et $\frac{d^2 z}{dx^2}$.
- On rappelle que l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$ a pour solutions des combinaisons linéaires des exponentielles $e^{\omega x}$ et $e^{-\omega x}$.

Établir la relation donnant l'équation $z(x)$ d'un rayon lumineux.

Ce rayon est-il rectiligne ?

- Comment de tels rayons peuvent-ils rendre compte du phénomène de mirage ?

2. Mirages gravitationnels

Un objet massif peut courber un rayon lumineux qui passe à proximité : c'est une conséquence directe de la théorie de la relativité générale. Nous proposons une évaluation approchée de ce phénomène en partant de la mécanique classique.

- Une particule P , de masse m , est déviée par une masse ponctuelle M , considérée comme fixe et placée en O . La particule P arrive de l'infini avec une vitesse initiale v_0 et sa trajectoire dépend du paramètre d'impact b (figure 5).

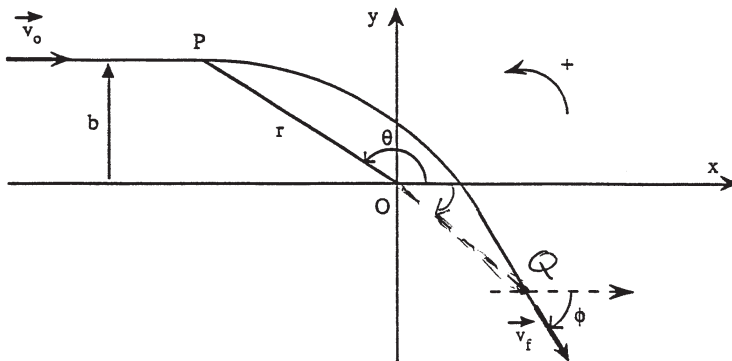


Figure 5

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

On prend pour axe Ox l'axe passant par O et parallèle au vecteur vitesse initial $\vec{v}_o$.

A l'instant t , la particule mobile est à la distance r de la masse fixe M et l'on pose :

$$\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP} \right) = \theta$$

On admet par ailleurs que le mouvement de P satisfait à la loi «des aires» :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$$

- a.1. Exprimer la constante C , dite constante des aires, en fonction de v_o et de b .
- a.2. Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur la direction Ox et en déduire l'équation différentielle qui lie v_x , θ et $\frac{d\theta}{dt}$.

En tirer l'expression de v_x en fonction de θ .

- a.3. Après avoir frôlé la masse M , la particule P s'éloigne à l'infini ; on constate alors que sa trajectoire initiale a subi une déviation mesurée par l'angle $\phi = (\vec{v}_o, \vec{v}_f)$.

Exprimer $\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)$ en fonction de G , M , b et v_o .

- b. On évalue par la méthode précédente la déviation d'un photon d'énergie E qui passe au bord du Soleil. Pour cela, on attribue au photon une masse équivalente m_{ph} donnée par la relation d'Einstein.

On donne le rayon du Soleil : $R_s = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$; calculer la déviation ϕ .

- c. Une galaxie se trouve au voisinage de l'axe d'observation d'une source lumineuse intense située derrière elle.

Décrire par un schéma le mirage gravitationnel qui se produit.

Comment, dans ces conditions, un quasar peut-il être vu double par un observateur terrestre ?

- d. En utilisant la masse équivalente m_{ph} du photon, montrer, par un raisonnement semi-classique qu'un photon issu de la périphérie d'une sphère attractrice de rayon R subit, lorsqu'il en quitte le champ de gravitation, un changement de fréquence qui se traduit par un déplacement vers le rouge.

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

Calculer la variation relative de fréquence correspondant à ce phénomène dans le cas du Soleil.

En quoi ce résultat peut-il remettre en cause l'interprétation des observations de quasars décrites au paragraphe II.3. ?

IV. INTERFÉROMÉTRIE STELLAIRE

1. Étude d'un dispositif interférentiel

On considère deux fentes parallèles très fines F_1 et F_2 (fentes de Young), éclairées par une étoile E considérée comme ponctuelle. L'axe de symétrie du dispositif est disposé de manière à passer par l'étoile E (figure 6). On filtre la lumière provenant de l'étoile de façon à n'utiliser que la longueur d'onde λ .

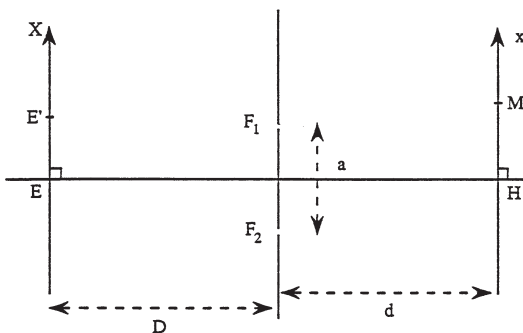


Figure 6

L'observation est effectuée sur un écran situé à une distance d du plan des fentes (on ne décrit pas ici l'ensemble catadioptrique utilisé dans la pratique pour focaliser le faisceau).

On note D la distance de l'étoile au plan des fentes.

On pose $\overline{HM} = x$ (figure 6) et $F_1 F_2 = a$.

La distance d est très grande devant a et x (il en est évidemment de même de D).

- a. Exprimer en fonction de a , x et d la différence de marche δ telle que :

$$\delta = (E F_2 + F_2 M) - (E F_1 + F_1 M)$$

- b. Les deux ondes correspondantes, issues d'un même point source, peuvent se retrouver en phase au point M . A quelles conditions ?

CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS GÉNÉRAL 1996 – CONCOURS

2. Mesure d'une distance angulaire

Une deuxième étoile E' , de même intensité lumineuse que E , se trouve sur l'axe EX parallèle à HM (figure 6).

On pose $\overline{EE'} = X$; là encore, grâce au filtrage, seule la longueur d'onde λ intervient.

- a. Exprimer, en fonction de a , x , d , X et D la différence de marche δ' entre les rayons $E'F_2M$ et $E'F_1M$.

Exprimer les conditions pour que ces deux rayons soient en phase au point M .

- b. On appelle «distance angulaire» entre les deux étoiles l'angle $\beta = \frac{X}{D}$.

La distance a entre les fentes est réglable : partant d'une valeur de a quasi-nulle, on écarte progressivement les deux fentes jusqu'à observer la disparition des franges d'interférences sur l'écran pour la valeur a_e de a .

Montrer que l'on peut en déduire une mesure de la distance angulaire β .

- c. *Application numérique :*

Pour $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$, on obtient le brouillage des franges pour $a_e = 1,95 \text{ m}$.

En déduire la valeur numérique de la distance angulaire entre les deux étoiles considérées.

3. Mesure d'un diamètre apparent

On observe une étoile e , sphérique, dont un diamètre, porté par EX , s'étend de E à E' . On pose $\overline{EE'} = \Delta$.

On appelle diamètre apparent de l'étoile e la distance angulaire $\alpha = \frac{\Delta}{D}$.

L'étoile est assimilée à un segment homogène de longueur $\overline{EE'}$.

Le dispositif est rendu monochromatique par filtrage autour de la longueur d'onde λ .

- a. Peut-on considérer que les différents points de l'étoile e émettent des ondes cohérentes entre elles ?
- b. Montrer que pour une valeur minimale particulière a_e' de la distance réglable a , le système de franges est totalement brouillé.
- c. On prend $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$. Quel est le plus petit diamètre apparent mesurable, sachant que la valeur maximale a_{max} de la distance réglable a vaut $a_{\text{max}} = 6 \text{ m}$.