
 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQU

Utilisation de MAPLE en simulation : exemple de l'oscillateur paramétrique

par Vincent BOURGES

Lycée Étienne Mimart

32, rue Étienne Mimart - 42021 Saint-Étienne Cedex 1

RÉSUMÉ

Un grand intérêt du logiciel de calcul formel MAPLE est de pouvoir faire des « expériences numériques » et, par exemple, de visualiser rapidement les solutions des systèmes d'équations différentielles en faisant varier les paramètres ; ce qui permet de faire des simulations d'expérience qui seraient difficiles à mettre en œuvre expérimentalement ou même purement imaginaires. MAPLE présente l'avantage par rapport aux logiciels spécialisés, plus performants à l'intérieur de leur créneau, d'être universel et plus lisible, car on sait à peu près ce que l'on fait. Comme exemple, on va effectuer sous MAPLE l'étude des oscillations paramétriques, en utilisant la seule commande « phaseportrait » qui permet de tracer directement le diagramme de phase.

L'oscillateur paramétrique

L'oscillateur paramétrique le plus simple consiste à prendre un ressort dont la raideur n'est pas constante, mais dépend d'un paramètre ; on prendra pour raideur $k(1 + h \cos(\omega t))$, de sorte que l'équation différentielle s'écrit :

$$m(d^2x/dt^2) = -k(1 + h \cos(\omega t)) \times x$$

k/m représente le carré de la pulsation propre du ressort, ω_0 , qui sera prise égale à $2 \times (\text{Pi})$, de sorte que la période propre est 1.

L'équation différentielle n'est pas autonome ; en ce sens que le temps intervient explicitement. On la transforme en un système autonome de trois équations du premier ordre, en posant $y(t) = t$:

$$dx/dt = u(t)$$

$$du/dt = -(\omega_0)^2(1 + h(\cos(\omega \times y(t)))) \times x$$

B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIO

$$dy/dt = 1$$

Le système est devenu autonome mais l'espace de phases est de dimension 3. On projettera le diagramme de phases sur un plan choisi parmi les trois variables x , u , y ($= t$), par l'option «scene». La commande «phaseportrait» doit comporter les équations différentielles du premier ordre, les variables, la durée, les conditions initiales, la durée du pas d'intégration et le plan de projection. Il y a résonance paramétrique lorsque la pulsation excitatrice w est le double de la pulsation propre w_0 . Visualisons $x(t)$ pour t variant de 0 à 5, le mobile partant de $x(0) = 0$ avec une vitesse initiale $u(0) = 1$ et le couplage h étant de 0,8.

```
> restart:with(DEtools):
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.8*cos(4*Pi*t))*x(t)], [x,y,u], t=0..5, [[x(0)=0,u(0)=1,
y(0)=0]], stepsize=0.01, scene=[y,x], title=`x(t)`);
```

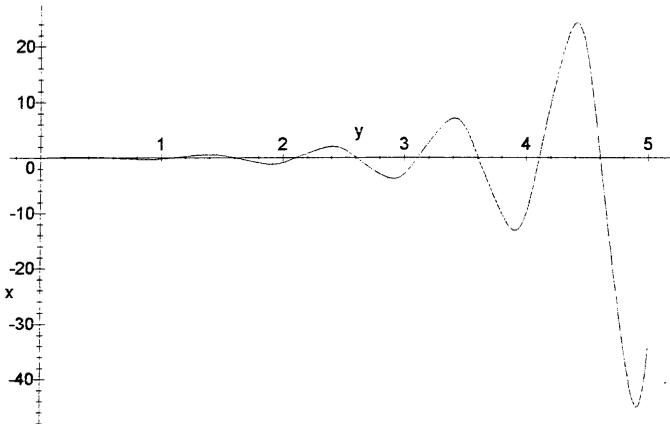
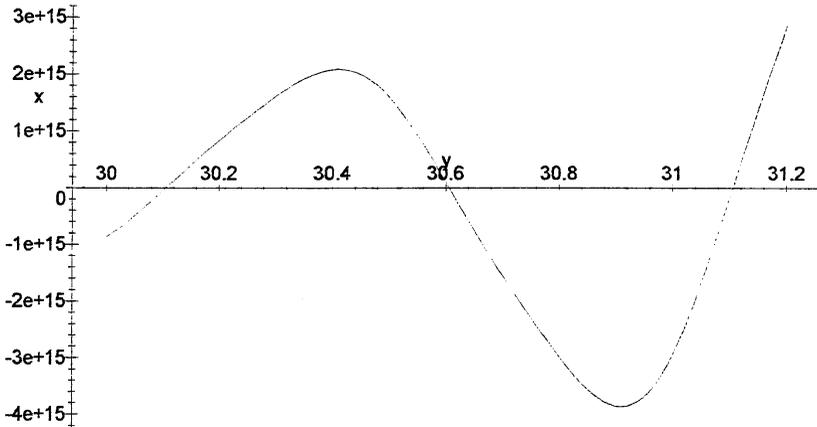


Figure 1 : $x(t)$.

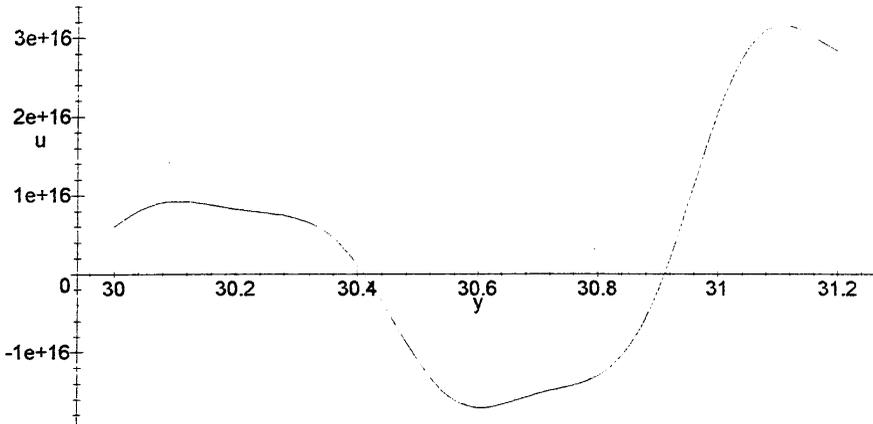
On constate que l'amplitude augmente très rapidement. Regardons ce qui se passe sur une pseudo-période, une fois le régime transitoire disparu entre $t = 30$ et $t = 31.2$; on visualisera $x(t)$, $u(t)$ et le diagramme de phase $u(x)$:

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.8*cos(4*Pi*t))*x(t)], [x,y,u], t=30..31.2, [[x(0)=0,u(0)
)=1,y(0)=0]], stepsize=0.01, scene=[y,x], title=`x(t)`);
```

 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQU

Figure 2 : $x(t)$.

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.8*cos(4*Pi*t))*x(t)], [x,y,u], t=30..31.2, [[x(0)=0,u(0)
)=1,y(0)=0]], stepsize=0.01, scene=[y,u], title='u(t)');
```

Figure 3 : $u(t)$.

B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIO

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.8*cos(4*Pi*t))*x(t)], [x,y,u], t=30..31.2, [[x(0)=0,u(0)
)=1,y(0)=0]], stepsize=0.01, scene=[x,u], title='portrait de phase
u(x)');
```

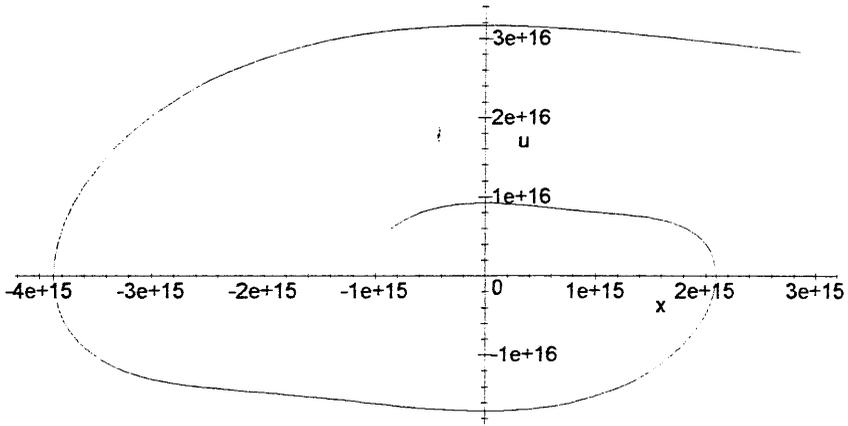


Figure 4 : Portrait de phase $u(x)$.

Quelle que soit la différence de phase initiale entre l'excitateur (de pulsation $2\omega_0$) et le résonateur (de pulsation ω_0), ce dernier se «cale» sur l'excitateur de sorte que la raideur du ressort soit plus grande lorsque x «redescend» vers la position d'équilibre et moins grande lorsqu'il s'en éloigne ($\cos(2\omega_0 t) > 0$ pour t entre 30 et 30,125, pour t entre 30,375 et 30,615 et enfin entre 30,875 et 31,125) ; il en résulte la résonance paramétrique comme lorsque l'on pousse un enfant sur une balançoire (ici on le pousse des deux côtés).

Une autre propriété intéressante du portrait de phase est qu'il est *autosimilaire* : pour le voir traçons le portrait de phase durant vingt secondes, puis cinquante secondes :

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.8*cos(4*Pi*t))*x(t)], [x,y,u], t=0..20, [[x(0)=0,u(0)=1
,y(0)=0]], stepsize=0.01, scene=[x,u], title='portrait de phase
u(x)entre 0 et 20s');
```

 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIO

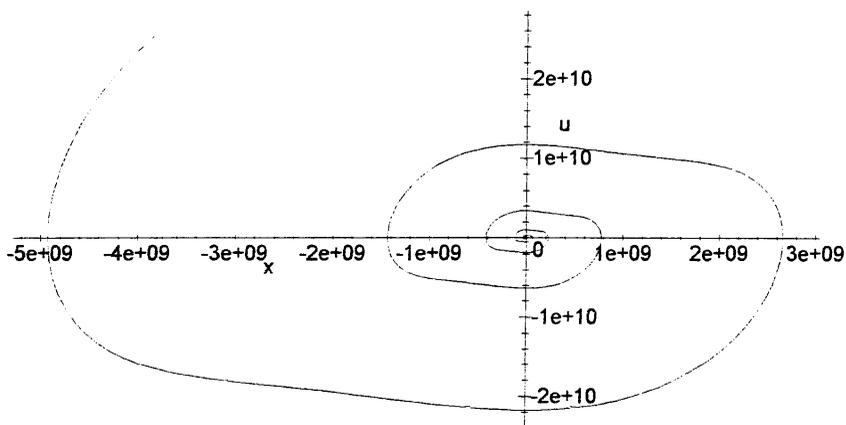


Figure 5 : Portrait de phase $u(x)$ entre 0 et 20 s.

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.8*cos(4*Pi*t))*x(t)], [x,y,u], t=0..50, [[x(0)=0,u(0)=1
,y(0)=0]], stepsize=0.01, scene=[x,u], title='portrait de phase
u(x) entre 0 et 50s');
```

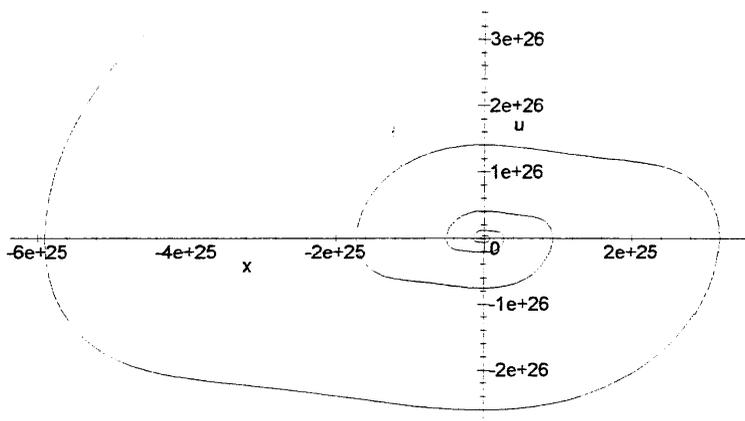


Figure 6 : Portrait de phase $u(x)$ entre 0 et 50 s.

 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIO

Les dessins sont identiques, ce qui montre qu'en agrandissant une partie de l'image, on retrouve le dessin entier, ce qui est le propre de l'autosimilarité.

Pour une fréquence de l'excitateur égale à celle du résonateur, on trouve le portrait de phase suivant :

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.8*cos(2*Pi*t))*x(t)], [x,y,u], t=0..30, [[x(0)=0,u(0)=1
,y(0)=0]], stepsize=0.01, scene=[x,u], title='portrait de phase
u(x) avec w=w0');
```

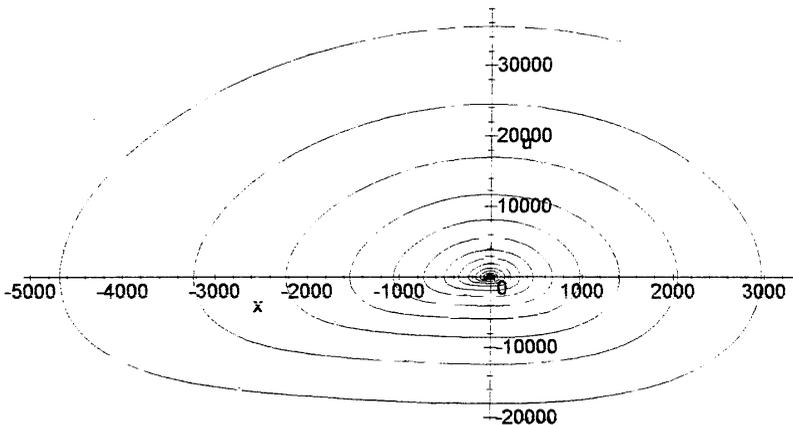


Figure 7 : Portrait de phase $u(x)$ avec $w = w_0$.

Le mécanisme d'amplification est évidemment moins efficace : on ne pousse la balançoire que d'un côté !

Si l'on prend une fréquence moitié, on constate qu'il n'y a plus d'amplification et un mélange de plusieurs fréquences.

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.8*cos(Pi*t))*x(t)], [x,y,u], t=10..50, [[x(0)=0,u(0)=1,
y(0)=0]], stepsize=0.01, scene=[x,u], title='portrait de phase u(x)
avec w=w0/2');
```

 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQU

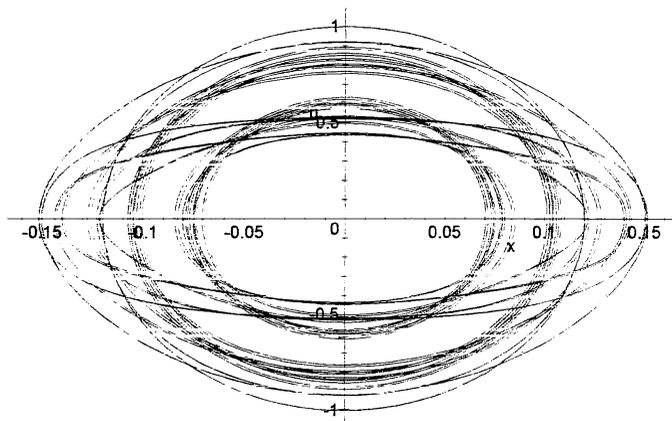


Figure 8 : Portrait de phase $u(x)$ avec $w = w_0/2$.

Le pendule paramétrique

Le pendule paramétrique est un pendule simple dont le point d'attache est animé d'un mouvement vertical sinusoïdal. Si l'on se place dans le référentiel non galiléen lié au point d'attache, il faut tenir compte de la force d'inertie d'entraînement. En appliquant le théorème du moment cinétique, on voit que cela revient dans l'équation du pendule simple à ajouter à g (accélération de la pesanteur) ; le terme $w^2 a \cos(wt)$ où $a \cos(wt)$ est le déplacement de l'attache du pendule.

Dans ces conditions, l'équation du pendule paramétrique s'écrit, x étant l'angle compté à partir de la verticale :

$$d^2x/dt^2 + (w_0)^2 (1 + w^2 a \cos(wt)/g) \sin(x) = 0$$

ou :

$$d^2x/dt^2 + (w_0)^2 (1 + h \cos(wt)) \sin(x) = 0$$

avec $(w_0)^2 = g/l$ et $h = w^2 a/g$.

Comme pour l'oscillateur, on a une résonance paramagnétique pour $w = 2w_0$. Prenons d'abord une excitation faible, c'est-à-dire une petite valeur de h , égale à 0,1.

 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIO

```
> restart:with(DEtools):phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2*Pi)^2*(1+0.1*cos(4*Pi*t))*sin(x(t))],[x,y,u],t=0..30,[x(0)=0,u(0)=1,y(0)=0]],stepsize=0.05,scene=[y,x],title='résonance paramétrique');
```

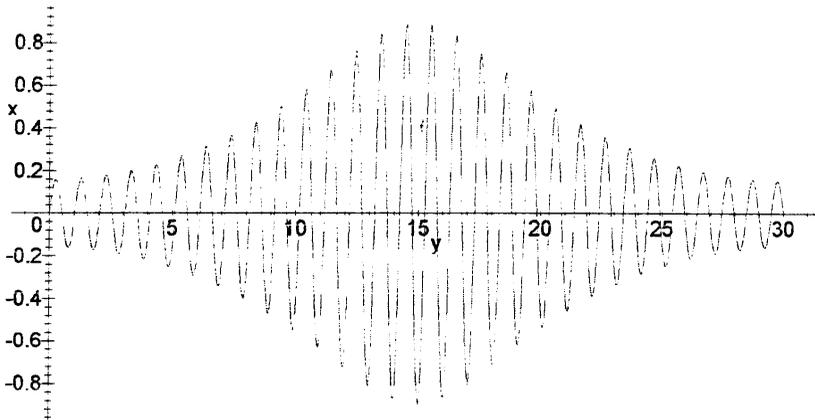


Figure 1 : Résonance paramétrique.

Pour de faibles amplitudes du pendule, on a un phénomène de résonance comme pour l'oscillateur, et l'amplitude des oscillations augmente, or la période des oscillations augmente pour un pendule simple avec l'amplitude ; le résonateur devient déphasé par rapport à l'excitateur ; l'effet cumulatif de l'excitateur disparaît, et l'amplitude diminue : d'où les battements observés. Dessinons également le diagramme de phase :

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2*Pi)^2*(1+0.1*cos(4*Pi*t))*sin(x(t))],[x,y,u],t=0..30,[x(0)=0,u(0)=1,y(0)=0]],stepsize=0.05,scene=[x,u],title='résonance paramétrique');
```

 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQU

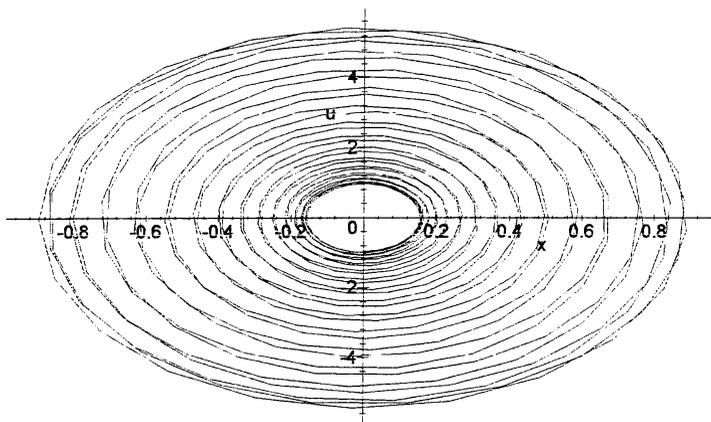


Figure 2 : Résonance paramétrique.

Augmentons l'excitation et soit $h = 0,6$: on constate le passage à un régime chaotique :

```
> phaseportrait ([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.6*cos(4*Pi*t))*sin(x(t))],[x,y,u],t=0..80,[x(0)=0,u
(0)=1,y(0)=0]],stepsize=0.01,scene=[y,x],title='passage au chaos
x(t)');
```

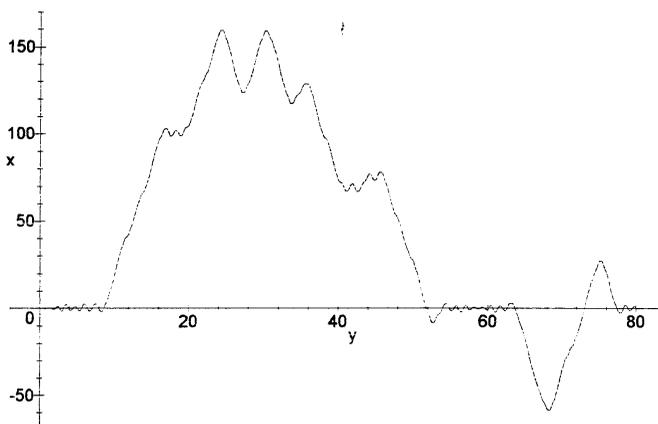


Figure 3 : Passage au chaos $x(t)$.

B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIO

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.6*cos(4*Pi*t))*sin(x(t))],[x,y,u],t=0..80,[x(0)=0,u
(0)=1,y(0)=0]],stepsize=0.01,scene=[y,u],title='passage au chaos
u(t)');
```

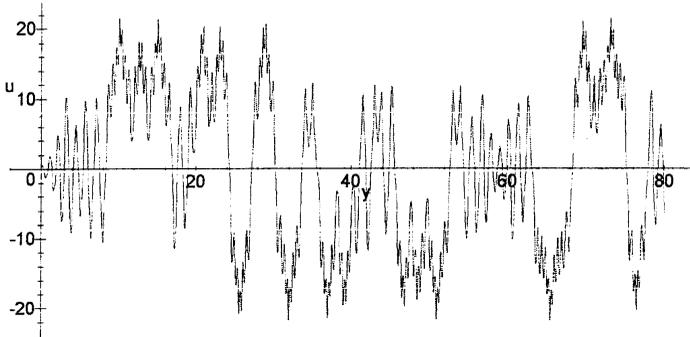


Figure 4 : Passage au chaos $u(t)$.

```
> with(DEtools):phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,di
ff(u(t),t)=-(2*Pi)^2*(1+0.6*cos(4*Pi*t))*sin(x(t))],[x,y,u],t=0.
.80,[x(0)=0,u(0)=1,y(0)=0]],stepsize=0.01,scene=[x,u],title='pa
ssage au chaos u(x)');
```

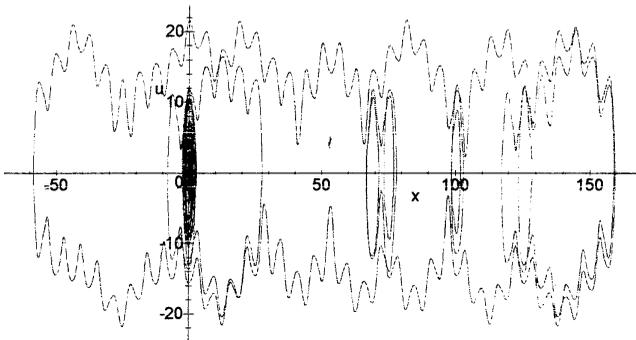


Figure 5 : Passage au chaos $u(x)$.

Lorsque l'on augmente l'excitation, il arrive un moment où l'angle atteint la valeur π ; le pendule passe de l'autre côté de la verticale ascendante et va faire un tour complet ;

 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQU

mais le passage de l'autre côté va provoquer un changement de signe de $\sin(x)$ et un effet tout à fait différent de l'excitation ; le mouvement ultérieur va être «décorrélé» du mouvement antérieur et ceci va se reproduire à chaque passage au-dessus de la verticale, d'où un mouvement chaotique.

Le régime chaotique est précédé par un régime d'*intermittence* où le comportement régulier est coupé par des «bouffées» de chaos comme on peut le voir pour $h = 0,58$.

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+0.58*cos(4*Pi*t))*sin(x(t))],[x,y,u],t=0..100,[x(0)=0
,u(0)=1,y(0)=0]],stepsize=0.01,scene=[y,x],title='intermittence'
);
```

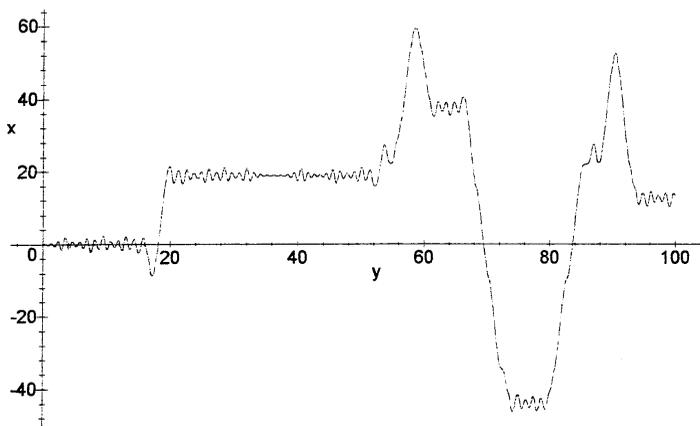
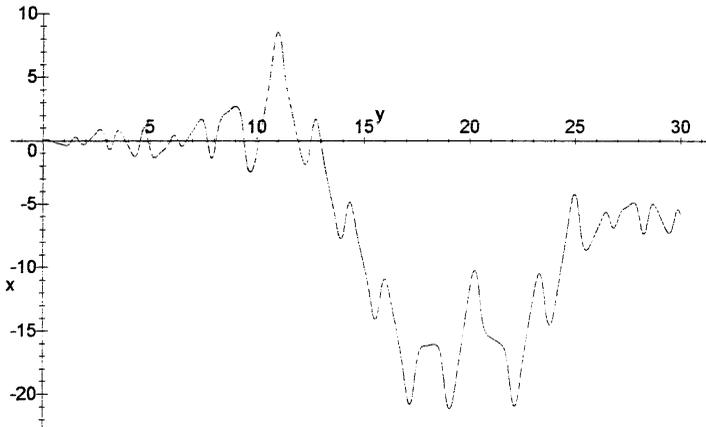


Figure 6 : Intermittence.

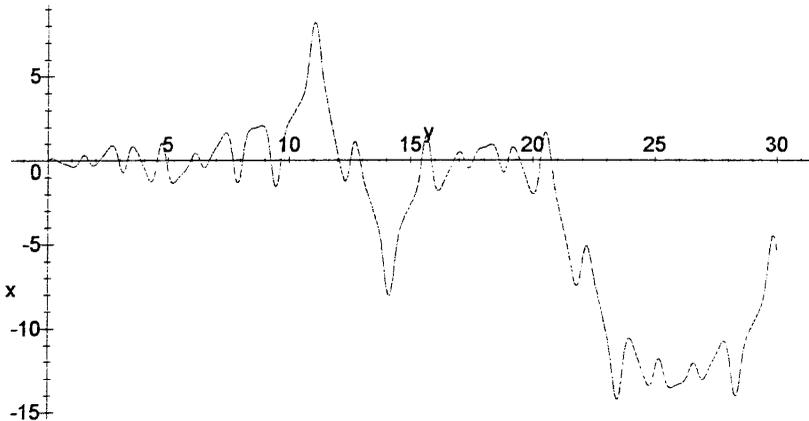
Prenons un autre mouvement chaotique obtenu avec une excitation de fréquence arbitraire et des conditions initiales très voisines : $u(0) = 1$ et $u(0) = 1,01$:

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+1.1*cos(4*t))*sin(x(t))],[x,y,u],t=0..30,[x(0)=0,u(0)
=1,y(0)=0]],stepsize=0.01,scene=[y,x],title='u(0)=1');
```

 B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIO

Figure 7 : $u(0) = 1$.

```
> phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=1,diff(u(t),t)=-(2
*Pi)^2*(1+1.1*cos(4*t))*sin(x(t))],[x,y,u],t=0..30,[[x(0)=0,u(0)
=1.01,y(0)=0]],stepsize=0.01,scene=[y,x],title='u(0)=1,01');
```

Figure 8 : $u(0) = 1,01$.

On voit la *sensibilité aux conditions initiales* : aux environs de 15 s, les deux mouvements se déconnectent complètement.

B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQUE – B.U.P. PRATIQU

EN CONCLUSION

MAPLE permet de mettre facilement en évidence des caractères remarquables des systèmes d'équations différentielles :

- une sensibilité numérique extrêmement forte aux paramètres de contrôle qui doivent être choisis avec soin,
- un changement qualitatif de régime correspondant à des bifurcations du système.

MAPLE permet d'avoir rapidement une bonne idée de problèmes non résolubles analytiquement : terminons sur l'exemple simple d'un mouvement de chute libre amorti par la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse :

```
> restart:with(DEtools):phaseportrait([diff(x(t),t)=u(t),diff(y(t),t)=v(t),diff(u(t),t)=-0.01*u(t)^2,diff(v(t),t)=-9.8-0.01*v(t)^2],[x,y,u,v],t=0..8,[[x(0)=0,u(0)=100,y(0)=0,v(0)=100]],stepsize=0.05,scene=[x,y],title=`chute libre avec frottement proportionnel au carré`);
```

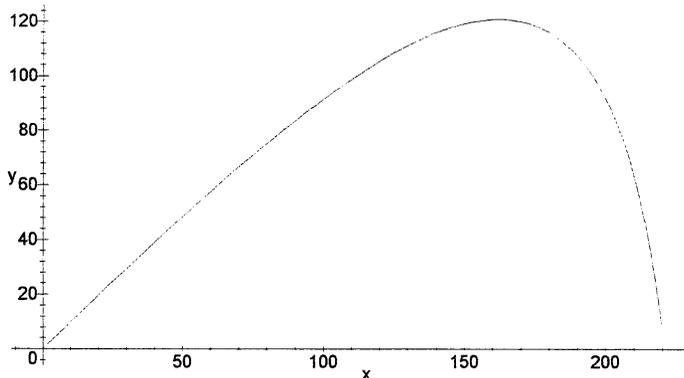


Figure 9 : Chute libre avec frottement proportionnel au carré.

Essayez de trouver par le calcul que le mobile retombe au sol à 240 m du point de départ !

Note de la rédaction

L'ensemble des programmes correspondant à cet article sera disponible sur la disquette UdP n° 12 (commande à Philippe BAFFERT - 3, rue Hector Berlioz - 94880 NOISEAU au prix de 50 F.) et sur le serveur UdP (voir annonce dans ce numéro).