Applications du calcul formel à l'analyse dimensionnelle

par Serge LE GOFF
57070 Metz

RÉSUMÉ

Après un bref rappel de l'intérêt pédagogique de l'analyse dimensionnelle, on montre qu'un logiciel de calcul formel comme MAPLE peut effectuer des tâches telles que la vérification de l'homogénéité d'une formule littérale, ou la recherche d'une unité. Toutefois, l'utilisation d'unités dérivées rend l'automatisation totale difficile. La troisième partie de l'article décrit l'utilisation, dans cet esprit, d'une bibliothèque de fonctions MAPLE V4 développée par l'auteur, et mise à la disposition des collègues intéressés sur les serveur WEB de l'UdP et de l'INRP dès leur mise en service.

1. LE REGAIN D'INTÉRÊT POUR L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

1.1. L'universalité du problème

Un petit livre de Barry CIPRA [1], donne en introduction un assez bon résumé de ce que l'on passe trop souvent sous silence devant nos élèves[1], alors qu'en privé, c'est une préoccupation constante : la fiabilité d'une démarche scientifique est grandement améliorée si l'on y adjoint des mécanismes de contrôle permettant d'éliminer au mieux les erreurs que l'on risque fort de commettre.

Que cet ouvrage soit essentiellement consacré aux Mathématiques n'en ôte pas l'intérêt pour un physicien, comme le montre la préface[2], due à J.-M. LÉVY-LEBLOND. Il est en effet plus raisonnable d'admettre que, malgré le soin que l'on met à accomplir une tâche, qu'il s'agisse d'une manipulation ou d'un calcul, le risque d'erreur est

1. Personne n'est à l'abri de l'erreur. Jeunes ou vieux, astucieux ou nigauds, étudiants ou profs, nous en commettons tous. La différence est que les gens finauds tentent de *repérer* leurs erreurs.
2. On a beaucoup ironisé sur les chercheurs si peu assurés de trouver. En tout cas, les chercheurs trouvent... leurs erreurs ; c'est déjà beaucoup.

toujours présent. Il est donc judicieux, avant d'entériner un résultat, de le passer au crible des *critères de pertinence*. M. SERRERO ([2], [3]) propose les tests suivants :

– l'homogénéité du résultat,

– son ordre de grandeur,

– sa variation avec les paramètres ; les cas limites,

– la symétrie,

– l'analogie de structure de calculs,

– des théorèmes de théories plus globales, en général de niveau supérieur.

Comme on le voit, l'homogénéité du résultat apparaît en bonne place ; c'est aussi le premier critère de pertinence que l'on rencontre dès l'école primaire[3]. Le test d'homogénéité est donc une préoccupation qui peut aussi bien concerner un élève de cours moyen qu'un professeur d'université (je pense à une réplique véhémente de Bruno GANZ, professeur de Physique[4] dans le film *5 % de risque* de J. POURTALÉ (1979) : *faux parce que...* **inhomogène !!!** devant un parterre d'étudiants de troisième cycle).

1.2. La difficulté à transmettre la nécessité du contrôle dimensionnel

La lecture des rapports de jury de concours est à cet égard significative ; en ne s'intéressant qu'aux concours 1996, on trouvera par exemple :

– École Normale supérieure [4] : *Une fois de plus, cette année, la majorité des candidats donnent au moins un résultat non homogène...*

– École polytechnique [5] : *...les ordres de grandeurs sont quelquefois complètement faux malgré l'utilisation des calculatrices. A cela peut s'ajouter un manque d'homogénéité des équations...*

– École polytechnique [6] : *Homogénéité. De nombreuses copies contiennent quantité de relations littérales non homogènes. Même des relations très simples souffrent de ce défaut, pourtant évident alors à corriger.*

– Écoles centrales, Supélec... [7] : *...les candidats doivent éviter de ne penser qu'aux calculs et développer des qualités d'analyse de pertinence des résultats obtenus qui leur permettraient d'améliorer aisément leur score même sans aller jusqu'au bout du problème.*

---

3. On ne peut ajouter les pommes et les oranges [1].

4. et néanmoins à la recherche du crime parfait !

Ceci montre qu'il n'est pas sans intérêt de faire passer le contrôle dimensionnel dans les habitudes de nos élèves. La conclusion reste bien évidemment valable à d'autres niveaux, en particulier le niveau du Baccalauréat et le niveau des concours CAPES/Agrégation.

Il faut pour cela persuader que c'est efficace, que ce n'est pas difficile, et enfin que cela ne coûte pas beaucoup de temps.

Notons en outre que, dans la perspective de l'évolution des sujets d'examens et de concours, où l'on envisage de proposer des résultats au lieu de faire effectuer le calcul complet au candidat, le poids de ce type de raisonnement risque de devenir encore plus considérable.

1.3. Que peut faire l'analyse dimensionnelle ?

1.3.1. Les objectifs de l'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle (A.D.) permet, comme nous l'avons déjà envisagé :

– d'établir l'équation aux dimensions d'une grandeur physique,
– de vérifier l'homogénéité d'une formule.

Outre ces applications immédiates, elle permet également [15] :

– d'effectuer des changements d'unités,
– de réduire les équations de la physique,
– de trouver la forme nécessaire d'une loi physique,
– de déterminer les rapports de similitude pertinents lors de la réalisation d'une maquette.

1.3.2. Théorème fondamental

L'un des principaux théorèmes de l'A.D. est le théorème II, ou théorème de Vaschy-Buckingham ([2], [3], [15]), qui exprime de façon formelle le fait que les lois physiques doivent être invariantes par changement du système d'unité.

Théorème

Soit une loi physique s'exprimant à l'aide de n grandeurs se ramenant à p grandeurs dimensionnellement indépendantes, on peut former $n - p$ groupements adimensionnels $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-p}$, expressions monômes construites à l'aide des n grandeurs originales. La loi peut se mettre sous la forme :

$$\Phi\,(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-p}) = 0$$

1.3.3. **Exemple : période des oscillations d’un pendule simple**

Cet exemple est une illustration classique de l’aptitude de l’A.D. à déterminer la forme nécessaire d’une loi physique. Les variables du problème sont :

– la longueur *l* du pendule,

– la masse *m* du pendule,

– l’accélération *g* de la pesanteur,

– la période *T* des oscillations,

– l’amplitude θ_{max} des oscillations.

Le choix n’est pas unique ; on pourrait introduire une variable énergétique, mais cette variable s’exprimerait en fonction des $n = 5$ variables déjà citées. Le problème étant un problème de Mécanique, les grandeurs dimensionnellement indépendantes sont la Longueur, le Temps et la Masse, soit $p = 3$.

Cherchons la forme que doit prendre la loi exprimant la période des oscillations en fonction des autres paramètres du pendule ; le théorème Π nous indique qu’il y a $n - p = 2$ monômes adimensionnels. L’amplitude des oscillations est un angle, donc une grandeur adimensionnelle ; il reste donc à trouver un second monôme adimensionnel ; on cherche une loi *a priori* de la forme :

$$T = f\,(l, m, g, \theta_{max})$$

Il suffit de trouver une expression de la forme $l^\alpha \times g^\beta \times m^\gamma$, où les coefficients α, β, γ sont choisis de sorte que $l^\alpha \times g^\beta \times m^\gamma$ ait la dimension d’un temps ; on construit alors une grandeur adimensionnelle :

$$T^* = \frac{T}{l^\alpha \times g^\beta \times m^\gamma}$$

La loi recherchée se met alors sous la forme :

$$\Phi\,(T^*, \theta_{max}) = 0$$

soit, si l’on peut inverser la loi implicite précédente :

$$T^* = \phi\,(\theta_{max})$$

Il est facile de voir que la longueur et l’accélération, grandeurs purement cinématiques, ne contiennent pas l’ingrédient *masse* ; on a donc nécessairement $\gamma = 0$; il suffit d’éliminer la longueur entre les deux autres en formant le rapport l/g, qui a les dimensions du carré d'un temps ; on en déduit que $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$; la loi donnant la période des oscillations est donc nécessairement de la forme :

$$\frac{T}{\sqrt{l/g}} = \phi\,(\theta_{max})$$

soit : $$T = \sqrt{l/g}\;\phi\,(\theta_{max})$$

Imaginons qu'il s'agisse d'une loi inconnue ; il suffit d'étudier expérimentalement l'influence d'une variable au lieu de quatre sur la période des oscillations !

1.3.4. **Réalisation d'une maquette**

I1 y a similitude totale entre la maquette et le modèle si tous les groupements monômes adimensionnels Π_k sont identiques. Parmi ceux-ci, dans le cas courant d'une maquette en soufflerie, apparaissent en bonne place les nombres sans dimension (nombre de Reynolds, nombre de Mach...) dont les spécialistes de Mécanique des Fluides sont friands, et dont on reparlera plus loin. On imagine aisément qu'il n'est pas facile d'ajuster simultanément plusieurs de ces nombres sans dimension.

2. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET CALCUL FORMEL

Un logiciel de calcul formel tel MAPLE peut nous assister dans trois tâches, la première étant directement liée aux critères de pertinence cités précédemment :

– tester l'homogénéité dimensionnelle d'une expression littérale,

– donner l'unité d'une grandeur physique donnée,

– rechercher les groupements monômes adimensionnels qui peuvent être construits à partir de la liste des variables d'un problème.

Ces fonctionnalités n'existent pas en standard dans le logiciel MAPLE ; les deux premières peuvent y être implémentées par le chargement d'une bibliothèque `libdim` écrite par l'auteur de cet article. MAPLE est un outil qui permet assez commodément de programmer les fonctions de la bibliothèque, et surtout, constitue un environnement naturel d'utilisation d'une telle bibliothèque, dans lequel on peut aller de la modélisation d'un problème à la représentation graphique des résultats.

2.1. Test d'homogénéité d'une expression littérale

On a vu que l'un des premiers critères de pertinence qui vient à l'esprit du physicien est l'homogénéité dimensionnelle. Les principales règles sont :

– les deux membres d'une égalité ont la même dimension physique,

– tous les termes d'une somme ont la même dimension physique,

– l'argument d'une fonction transcendante (logarithme, exponentielle, fonction circulaire ou hyperbolique...) est sans dimension,

– la dimension physique d'un produit est le produit des dimensions physiques des facteurs,

– α étant un exposant numérique, si d est la dimension physique de X, la dimension physique de X^{α} est d^{α}.

2.2. Recherche de l'unité ramenée aux unités fondamentales

Le système SI est construit sur sept grandeurs de base auxquelles correspondent sept unités de base (voir, par exemple [14]) :

Grandeur	Symbole	Unité	Symbole de l'unité
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	ampère	A
Température thermo.	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	cd

Le nombre de grandeurs fondamentales dans le système relève davantage de la convention[5] que de la physique proprement dite. On pourrait en fait se contenter d'un nombre restreint d'unités. Ceci se manifeste par l'existence de constantes fondamentales sans dimension, la plus connue étant la constante de structure fine :

$$\alpha = \frac{\mathrm{e}^2}{2\,\varepsilon_0 \mathrm{hc}} \approx 7{,}29735308\ (33) \times 10^{-3}$$

qui caractérise l'intensité de l'interaction électromagnétique ; ces constantes ont la propriété extraordinaire de **ne pas dépendre du système d'unité !**

5. Pour une discussion de ce problème et d'autres références, voir [2] et [3].

La dimension physique d'une grandeur dérivée s'exprime de façon générale par une expression monôme de la forme :

$$\mathrm{L}^{\alpha} \times \mathrm{M}^{\beta} \times \mathrm{T}^{\gamma} \times \mathrm{I}^{\delta} \times \Theta^{\varepsilon} \times \mathrm{N}^{\eta} \times \mathrm{J}^{\zeta}$$

L'unité d'une grandeur dérivée s'obtient simplement par simple substitution de l'unité fondamentale à la grandeur fondamentale correspondante. Ainsi, l'aire d'une surface, de dimension L^2, s'exprime-t-elle en m^2, ce qui donne, dans le cas général, l'unité :

$$\mathrm{m}^{\alpha} \times \mathrm{kg}^{\beta} \times \mathrm{s}^{\gamma} \times \mathrm{A}^{\delta} \times \mathrm{K}^{\varepsilon} \times \mathrm{mol}^{\eta} \times \mathrm{cd}^{\zeta}$$

2.3. Le problème des unités dérivées

La recherche de l'unité d'une grandeur physique serait purement algorithmique si l'on n'avait pas compliqué les choses en donnant des noms à un certain nombre d'unités dérivées (le Volt est l'unité de tension, le Newton l'unité de force, le Watt l'unité de puissance...).

La dimension physique ne permet pas à elle seule de donner l'unité d'usage d'une grandeur physique (une pression se mesurera en Pascals, tandis qu'une énergie volumique se mesurera en $\mathrm{J.m}^{-3}$, alors qu'elles ont toutes deux même dimension physique). Un certain nombre de subtilités sont transmises par l'intermédiaire du choix de l'unité ; la fréquence et la pulsation, de même dimension physique T^{-1}, mais différant d'un facteur 2π, ont pour unités respectives l'Hertz et le radian par seconde...

3. LES OBJECTIFS DE LA BIBLIOTHÈQUE

3.1. Premier contact

A l'invite de MAPLE, la bibliothèque est chargée par la commande `with(libdim)` ; la sortie MAPLE correspondant donnant la liste des fonctions publiques de la bibliothèque.

```
> with(libdim);
```

libdim par S.Le Goff

Version 1.00

[*DefinitGrandeur*, *DefinitSymbole*, *DefinitUnite*, *Definition*, *DimPhys*, *ListeDefinitions*, *ListeGrandeurs*, *ListeSymboles*, *ListeUnites*, *UniteDerivee*, *UniteFond*]

L'exemple précédent permet de prendre connaissance des conventions typographiques : les caractères machine à écrire (`with(libdim)`) sont dévolus aux entrées MAPLE, (caractères en rouge dans la configuration usuelle du logiciel) les caractères en italique (*Version 1.00*) correspondent aux sorties MAPLE (caractères en bleu dans la configuration usuelle du logiciel). Plus loin, on rencontrera des caractères romains de petite taille (g est un identificateur inconnu) qui correspondent aux messages en mode conversationnel (caractères en noir dans la configuration usuelle du logiciel).

Les sept grandeurs fondamentales du système SI : longueur, masse, temps, intensité (désignant implicitement l'intensité électrique), température, quantité de matière, intensité lumineuse, sont prédéfinies, ainsi que quelques grandeurs dérivées usuelles.

La commande `ListeGrandeurs()` ; donne la liste des grandeurs en mémoire.

```
> ListeGrandeurs();
```

$$[volume], [champ\_magnetique], [intensite\_lumineuse], [acceleration], [tension], [temperature], [angle], [frequence], [vitesse], [pression], [masse\_volumique], [champ\_electrique], [entropie], [force], [longueur], [masse], [temps], [puissance], [quantite\_de\_matiere], [charge], [resistance], [energie], [intensite], [capacite], [surface], [angle\_solide], [flux\_magnetique], [inductance]$$

La commande `ListeDefinitions()` ; indique comment ont été définies les grandeurs en mémoire.

```
> ListeDefinitions();
```

$$\left[volume = surface\, longueur,\ champ\_magnetique = \frac{champ\_electrique}{vitesse},\right.$$
$$intensite\_lumineuse = intensite\_lumineuse,\ acceleration = \frac{vitesse}{temps},\ tension = \frac{energie}{charge},$$
$$temperature = temperature,\ angle = 1,\ frequence = \frac{1}{temps},\ vitesse = \frac{longueur}{temps},$$
$$pression = \frac{force}{surface},\ masse\_volumique = \frac{masse}{volume},\ champ\_electrique = \frac{force}{charge},$$
$$entropie = \frac{energie}{temperature},\ force = masse\, acceleration,\ longueur = longueur,$$
$$masse = masse,\ temps = temps,\ puissance = \frac{energie}{temps},$$
$$quantite\_de\_matiere = quantite\_de\_matiere,\ charge = intensite\, temps,$$
$$resistance = \frac{tension}{intensite},\ energie = force\, longueur,\ intensite = intensite,\ capacite = \frac{charge}{tension},$$
$$surface = longueur^2,\ angle\_solide = 1,\ flux\_magnetique = champ\_magnetique\, surface,$$
$$\left. inductance = \frac{flux\_magnetique}{intensite}\right]$$

La commande `ListeSymboles()` ; donne la liste des symboles définis ; c'est essentiellement une liste destinée à accueillir des symboles définis à l'utilisation ; au chargement, elle contient le symbole `c0` représentant la vitesse de la lumière dans le vide.

```
> ListeSymboles();
```

$$[c0]$$

La commande `ListeUnites()` ; donne la liste des unités en mémoire. Ce sont les unités fondamentales et les principales unités portant un nom spécifique ; leur identificateur est leur abréviation normalisée précédée du signe souligné `_` ; par exemple `_m` est l'identificateur du mètre et `_Omega` est celui de l'ohm.

```
> ListeUnites();
```

$$[\_K], [\_sr], [\_Hz], [\_Pa], [\_N], [\_J], [\_W], [\_C], [\_F], [\_m], [\_H], [\_V], [\_mol], [\_s], [\_rad], [\_T], [\_\Omega], [\_kg], [\_S], [\_A]$$

La fonction `DimPhys` ; donne la dimension de l'expression passée en argument, qui peut être une grandeur, un symbole, ou une expression algébrique construite à l'aide de grandeurs et de symboles déjà définis. Si l'expression n'est pas dimensionnellement homogène, un message d'erreur est renvoyé.

```
> DimPhys(force);
```

$$\frac{[L]\,[M]}{[T]^2}$$

```
> DimPhys(longueur+acceleration);
```

$$\textit{somme inhomogene}$$
$$\textit{Erreur}!$$

La fonction `UniteFond` ; effectue la même analyse et renvoie l'unité sous la forme d'un monôme en unités fondamentales.

3.2. Première utilisation

3.2.1. Dimension physique du champ magnétique

Voyons comment le champ magnétique a été pris en compte dans la base des données dimensionnelles. Sa définition apparaissait dans la liste des définitions ; la fonction `Definition` permet d'y accéder de façon spécifique.

```
> Definition(champ_magnetique);
```

$$\frac{champ\_electrique}{vitesse}$$

Les puristes n'y trouveront certes pas leur compte s'ils y cherchent une *définition* du champ magnétique ; ce n'est en fait qu'une expression monôme **homogène** faisant intervenir le champ magnétique et deux grandeurs plus faciles à réduire aux grandeurs fondamentales, à savoir la vitesse et le champ électrique $\frac{\text{force}}{\text{charge}}$. L'expression de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

montre qu'en effet, on ajoute le produit $\vec{v} \wedge \vec{B}$ au champ électrique, ce qui impose à ces deux termes d'avoir la même dimension physique. Il n'y a bien sûr pas unicité du chemin qui mène d'une grandeur physique à sa réduction aux grandeurs fondamentales ; selon l'inspiration du moment, on pourra utiliser différentes lois physiques, l'important étant bien évidemment d'être absolument sûr de ces lois.

A la main[6], on obtient donc :

$$champ\_magnetique = \frac{force}{charge * vitesse} = \frac{[M][L][T]^{-2}}{[I][T][L][T]^{-1}} = [M][I]^{-1}[T]^{-2}$$

A l'aide de MAPLE, on obtient grâce à la fonction `DimPhys` de la bibliothèque :

```
> DimPhys(champ_magnetique);
```

$$\frac{[M]}{[T]^2\,[I]}$$

3.2.2. Unité de champ magnétique

L'unité de champ magnétique est le Tesla ; la réduction du Tesla aux unités fondamentales s'effectue par simple substitution aux grandeurs fondamentales des unités correspondantes ; on obtient ainsi, à partir de la dimension du champ magnétique, l'unité suivante :

$$\text{Tesla} = \frac{\text{kg}}{\text{A.s}^2}$$

A l'aide de MAPLE, on obtient, grâce à la fonction `UniteFond` de la bibliothèque :

```
> UniteFond(champ_magnetique);
```

$$\frac{\_kg}{\_s^2\ \_A}$$

6. Sans MAPLE.

3.3. Utilisation personnalisée

3.3.1. Définition de nouvelles grandeurs

Prenons l'exemple de la grandeur `moment_d_inertie` ; cette grandeur n'est pas prédéfinie ; on peut le vérifier par la fonction `Definition` :

```
> Definition(moment_d_inertie);
```

$$pas\ de\ definition$$

Il convient de définir cette nouvelle grandeur en utilisant des fonctions déjà définies ; on utilisera pour cela la fonction `DefinitGrandeur` avec la syntaxe suivante : `DefinitGrandeur(moment_d_inertie,masse*longueur^2)`.

```
> DefinitGrandeur(moment_d_inertie,masse*longueur^2);
```

$$masse\ longueur^2$$

Après cette définition, le moment d'inertie apparaît dans la liste des grandeurs prédéfinies. On peut le vérifier en consultant sa définition.

```
> Definition(moment_d_inertie);
```

$$masse\ longueur^2$$

3.3.2. Définition de nouveaux symboles

Introduisons le symbole *J* pour désigner un moment d'inertie ; on utilisera pour cela la fonction `DefinitSymbole` avec la syntaxe suivante : `DefinitSymbole(J,moment_d_inertie)`.

Après cette définition, *J* apparaît dans la liste des symboles prédéfinis.

```
> DefinitSymbole(J,moment_d_inertie);
```

$$moment\_d\_inertie$$

Le symbole *J* étant désormais défini, on peut en demander l'unité :

```
> UniteFond(J);
```

$$\_m^2\ \_kg$$

3.3.3. Définition d'une nouvelle unité

L'unité de viscosité, le Poiseuille[7], n'est pas prédéfinie ; son abréviation étant Pl, son identificateur doit être `_Pl` si l'on respecte les conventions de notation précédentes. On peut vérifier que cet identificateur ne correspond pas à une définition de la bibliothèque par :

```
> Definition(_Pl);
```

$$pas\ \ de\ \ definition$$

On peut de même vérifier que la viscosité n'est pas une grandeur prédéfinie. Il est alors judicieux de procéder en deux étapes :

- définition de la grandeur :

```
> DefinitGrandeur(viscosite,force/(longueur*vitesse));
```

$$\frac{force}{longueur\ vitesse}$$

- définition de l'unité dérivée correspondante :

```
> DefinitUnite(_Pl,viscosite);
```

$$viscosite$$

L'unité Poiseuille est alors disponible, au même titre que les unités prédéfinies ; elle apparaît désormais dans la liste des unités ; on peut rappeler sa définition par :

```
> Definition(_Pl);
```

$$unitede\ ,\ viscosite,\ =\ ,\ \frac{force}{longueur\ vitesse}$$

3.4. Exemples d'analyses dimensionnelles

3.4.1. Analyse dimensionnelle d'une formule simple

La fonction `DimPhys`, quand on lui passe cette égalité en argument, teste l'homogénéité de cette formule ; si l'homogénéité est correcte, elle renvoie la réduction des deux membres aux unités fondamentales.

On désire analyser la formule donnant la période des petites oscillations d'un pendule simple :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

7. On utilise aussi le Pascal.seconde (Pa.s).

Testons cette formule ; on obtient :

```
> DimPhys(T=2*Pi*sqrt(l/g));
```

$$T\ pas\ reconnu$$

T est un identificateur inconnu.

On entre alors la nature de l'identificateur *T*, c'est-à-dire un temps. L'entrée MAPLE doit être validée et la ligne doit se terminer par un point-virgule, comme le montre la suite :

```
> temps;
```

$$l\ pas\ reconnu$$

l est un identificateur inconnu.

```
> longueur;
```

$$g\ pas\ reconnu$$

g est un identificateur inconnu.

```
> acceleration;
```

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$[T]$$

```
> DimPhys(T=2*Pi*(l/g));
```

$$egalite\ inhomogene$$

$$T = 2\,\frac{\pi\,l}{g}$$

$$Erreur\ !$$

```
> UniteFond(T=2*Pi*sqrt(l/g));
```

$$\_s$$

La vérification de la formule donnant l'expression classique du pendule composé peut être passée au crible de l'analyse dimensionnelle de la façon suivante :

```
> DefinitSymbole(a,longueur):
> DefinitSymbole(m,masse):
> DimPhys(T=2*Pi*sqrt(J/(m*g*a)));
```

$$[T]$$

On a donc la garantie que les deux membres de l'égalité ont la dimension d'un temps.

3.4.2. Vérification du caractère adimensionnel de la constante de structure fine

On se propose de vérifier que la constante de structure fine, dont on a déjà parlé précédemment, est bien une constante sans dimension. Il convient pour cela de définir les symboles ε_0, h, c_0, e apparaissant dans le second membre de l'expression de définition :

$$\alpha = \frac{e^2}{2\,\varepsilon_0 h c_0}$$

de la constante de structure fine, en indiquant leur dimension physique.

La célérité c_0 de la lumière est prédéfinie.

En ce qui concerne ε_0, on dispose d'une expression particulièrement appropriée, car simple et bien connue, l'expression de la capacité d'un condensateur plan d'aire S et d'épaisseur e :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Pour la constante de Planck h, on utilisera l'expression de l'énergie d'un photon de fréquence ν :

$$E = h\nu$$

Enfin, e est la charge de l'électron ; la charge électrique est une grandeur prédéfinie ; on peut donc procéder de la façon suivante :

```
> DefinitSymbole(epsilon0,capacite*longueur/surface):
> DefinitSymbole(h,energie/frequence):
> DefinitSymbole(e,charge):
> alpha:=e^2/(2*epsilon0*h*c0);
```

$$\alpha := \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{\varepsilon 0\, h\, c0}$$

On peut maintenant demander la dimension physique de α :

```
> DimPhys(alpha);
```

$$1$$

On vérifie bien que α est sans dimension.

3.5. Le problème des unités dérivées

3.5.1. Position du problème

Voyons ce que la fonction `UniteFond` renvoie pour unité de fréquence :

```
> UniteFond(frequence);
```

$$\frac{1}{\_s}$$

On souhaiterait bien sûr avoir une réponse en Hertz !

Les unités usuelles de tension électrique et de champ électrique sont respectivement le Volt et le Volt par mètre ; voyons ce que la fonction `UniteFond` renvoie :

```
> UniteFond(tension);
```

$$\frac{\_m^2\ \_kg}{\_s^3\ \_A}$$

```
> UniteFond(champ_electrique);
```

$$\frac{\_m\ \_kg}{\_s^3\ \_A}$$

Le problème est de faire passer le message suivant : dans ces deux grandeurs, une partie[8] de l'unité usuelle est prise en compte par le Volt.

3.5.2. Proposition de solution

La fonction `UniteDerivee` permet de passer en argument une unité que l'on souhaite voir apparaître ; essayons `UniteDerivee(champ_electrique,_V)` ; on obtient :

```
> UniteDerivee(tension,_V);
```

$$\_V$$

```
> UniteDerivee(champ_electrique,_V);
```

$$\frac{\_V}{\_m}$$

On obtient bien l'unité souhaitée, mais il faut savoir quelle est l'unité usuelle pour obtenir ce résultat.

On obtiendra ainsi le résultat souhaité pour les fréquences :

```
> UniteDerivee(frequence,_Hz);
```

$$\_Hz$$

8. La totalité pour la tension.

Pour les angles (sans dimension), il faudra passer le radian en argument de la fonction `UniteDerivee` :

```
> UniteDerivee(angle,_rad);
```

$$\_rad$$

Si l'on reprend la permittivité du vide que l'on a introduit précédemment, on obtient :

```
> UniteFond(epsilon0);
```

$$\frac{\_s^4\ \_A^2}{\_m^3\ \_kg}$$

ce qui prend la forme usuelle par :

```
> UniteDerivee(epsilon0,_F);
```

$$\frac{\_F}{\_m}$$

On pourra, par cette fonction, choisir l'une ou l'autre des unités usuelles de viscosité : le Pascal.seconde ou le Poiseuille :

```
> UniteDerivee(viscosite,_Pa);
```

$$\_Pa\ \_s$$

```
> UniteDerivee(viscosite,_Pl);
```

$$\_Pl$$

CONCLUSION

La bibliothèque MAPLE présentée dans cet article a été utilisée lors d'une séance d'informatique de deux heures dans une classe de PC* ; le retour a été favorable, les élèves s'accordant à reconnaître qu'ils ont été ainsi contraints à réfléchir pendant deux heures à des problèmes qui leur semblaient auparavant des pertes de temps[9] ; pour quelques-uns, qu'on pourrait estimer à environ 20 %, j'ai pu constater une modification d'attitude vis-à-vis des problèmes d'homogénéité dimensionnelle, ce qui est une forme de succès. Toutefois, l'aspect ludique de la séance, qui fait un peu partie du contrat pour une séance d'informatique en classe préparatoire scientifique, est moins évident que pour des sujets qui se prêtent à des belles représentations graphiques ; citons les tracés d'équipotentielles et de lignes de champ ([8], [9], [10]), les tracés de portraits

9. Des préoccupations de prof., pour tout dire !

de phase de systèmes dynamiques ([8], [9], [10]), ou les représentations «photographiques» de figures d'interférences ou de diffraction ([8], [9], [10], [13]).

Outre l'amélioration de l'ergonomie, les prochains développements seront consacrés à une automatisation[10] de la détermination de l'unité usuelle, sans qu'il soit nécessaire de fournir une indication au moment de l'appel.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une recherche INRP animée par D. LENNE, centrée sur l'assistance à l'utilisation d'outils de calcul formel en physique et en mathématiques.

La bibliothèque, pour MAPLE V.4. et le fichier d'aide sont mis à la disposition des collègues intéressés sur le serveur de l'Union des Physiciens et sur le serveur de l'INRP. Des exemples d'utilisation pédagogique seront ultérieurement disponibles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CIPRA : *«Erreures[11] ...et comment les trouver avant le prof...»* - InterEditions, 1985.

[2] SERRERO : *«Critères de pertinence en physique»* - BUP n° 699, décembre 1987.

[3] SERRERO : *«...l'homogénéité, l'invariance newtonienne»* - BUP n° 699, décembre 1987.

[4] LEHOUCQ et OLLITRAULT : *«École polytechnique»* - Concours M' 1996.

[5] KORB : *«École polytechnique»* - Concours P' 1996.

[6] BRINGUIER, HARE et BERROIR : *«École normale supérieure»* - Concours P' 1996.

[7] Le Jury : *«Écoles centrales»* - Concours P' 1996.

[8] LEROUX : *«Les logiciels de calcul formel...»* - BUP n° 775, juin 1995.

[9] LEROUX et SARMANT : *«Les outils numériques et de calcul formel»* - INRP/UdP, février 1996.

[10] LEROUX et POMÈS : *«Toutes les applications de MAPLE»* - Vuibert, 1995.

[11] GOMEZ, SALVY et ZIMMERMANN : *«Calcul formel : mode d'emploi»* - Masson, 1995.

[12] LÉVINE : *«Introduction à MAPLE»* - Ellipse.

10. Au moins partielle...
11. Sic !

[13] LEPRETRE et ADAD : *«Étude de quelques thèmes d'optique physique»* - BUP n° 775, juin 1995.

[14] DUPONT et TROTIGNON : *«Unités et grandeurs»* - Nathan, 1995.

[15] KOVACIC : *«Applications de l'analyse dimensionnelle»* - 45es journées nationales de l'Union des Physiciens, Metz, octobre 1997.

Note de la rédaction

L'ensemble des programmes correspondant à cet article sera disponible sur la disquette UdP n° 12 (commande à Philippe BAFFERT - 3, rue Hector Berlioz - 94880 NOISEAU au prix de 50 F.) et sur le serveur UdP (voir annonce dans ce numéro).