Max Planck et le concept de quantum d'énergie lumineuse $\mathcal{E} = h\nu$* [1]

par Alfred KASTLER
Prix Nobel de physique 1966

Max Planck était en physique un conservateur attaché profondément à la physique classique. C'est à son corps défendant qu'il a introduit en physique le concept révolutionnaire du quantum d'action. L'histoire mérite d'en être contée.

Bien qu'il ne l'ait jamais rencontré, Planck se considérait comme un disciple de Clausius qui avait, vers le milieu du XIX^{e} siècle, fait la synthèse des deux principes de la thermodynamique et créé le concept d'entropie. Rappelons-en l'essentiel : considérons un système physique qui n'échange avec le milieu extérieur de l'énergie que sous forme de travail mécanique et de chaleur. L'accroissement infinitésimal dU de son énergie interne U peut se mettre sous la forme :

$$dU = dQ + dW \qquad (1)$$

dQ étant l'apport infinitésimal de chaleur et dW le travail infinitésimal reçu de la part du milieu extérieur. Le premier principe énonce que dU est une différentielle totale et le deuxième principe postule que dQ divisé par la température thermodynamique T en est une autre : $dS = \frac{dQ}{T}$.

La fonction d'état S ainsi définie par sa différentielle a été appelée «entropie» par Clausius. La relation (1) se met ainsi sous la forme :

$$dU = TdS - PdV \qquad (2)$$

et la fonction d'état U (énergie interne du système) apparaît ainsi comme une fonction de deux variables S et V :

d'où : $$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T$$

* Publié dans le CUIDE n° 10, avril 1978. En référence dans document d'accompagnement (terminale scientifique) janvier 1995, page 47.
Ce texte a été écrit dans des circonstances que Nicole HULIN rappelle dans sa notice biographique sur A. KASTLER (voir page 1582).

La relation U = U (S, V) peut se résoudre par rapport à S et s'écrire S = S (U, V),

d'où : $$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = T^{-1} \qquad (3)$$

C'est cette dernière relation, relation générale et fondamentale de la thermodynamique, que Planck a appliqué au rayonnement du corps noir.

Il a commencé à s'intéresser à ce problème vers 1895 et il convient de rappeler ce que l'on savait alors sur ce rayonnement, le rayonnement du corps noir étant défini comme le rayonnement électromagnétique existant à l'intérieur d'une cavité vide, en équilibre thermique avec les parois qui entourent complètement cette cavité et qui sont maintenues à une température donnée T exprimée dans l'échelle thermodynamique.

Kirchhoff avait montré que ce rayonnement a un caractère universel indépendant de la forme de la cavité et de la nature physique des parois. L'étude expérimentale de ce rayonnement en fonction de T par Stefan avait montré que la densité d'énergie rayonnante u (énergie par unité de volume) variait comme la quatrième puissant de T :

$$u = a\,T^4$$

Boltzmann avait réussi à déduire cette «loi de Stéfan» des principes de la thermodynamique.

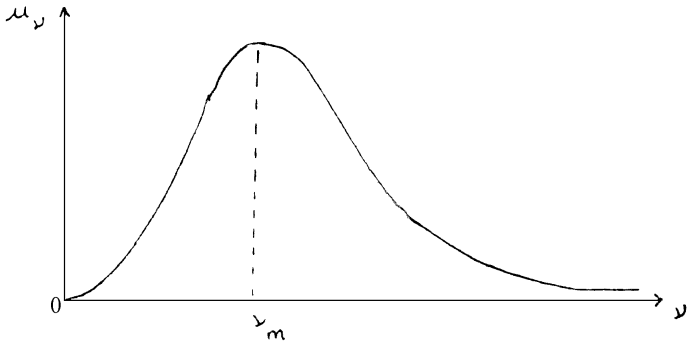
L'énergie de ce rayonnement se répartit entre les différentes fréquences ν du spectre et l'on peut définir une densité spectrale $u_\nu = \frac{du}{d\nu}$. D'après la loi de Kirchoff u_ν est une fonction universelle de ν et de T :

$$u_\nu = u_\nu\,(\nu, T) \qquad (4)$$

Le problème fondamental qui se posait vers la fin du XIX^e siècle était de trouver la forme de cette fonction. L'étude expérimentale montrait que u_ν tend vers zéro aux deux extrémités du spectre (pour $\nu = 0$ et pour $\nu = \infty$) et passe par un maximum à une certaine fréquence ν_m, fonction croissante de la température T. Pour une température T donnée, la forme de la courbe u_ν avait donc l'aspect de la figure ci-contre. En 1894, se basant sur la thermodynamique et sur l'effet Doppler-Fizeau, Wien avait montré que cette fonction devait être de la forme :

$$u_\nu = \nu^3\, f\left(\frac{\nu}{T}\right) \qquad (5)$$

relation appelée «loi de déplacement de Wien».



Voici donc ce qu'on savait lorsque Planck, en 1895, a commencé à s'occuper du problème.

Planck était persuadé que les principes de la thermodynamique joints aux lois de l'électromagnétisme de Maxwell devaient mener à la solution et qu'il fallait essayer de trouver une expression non seulement de la densité spectrale de l'énergie u_ν mais aussi de la densité spectrale de l'entropie s_ν du rayonnement.

De même qu'on a défini $u = \frac{dU}{dV}$ et $u_\nu = \frac{du}{d\nu}$ on peut en effet définir une densité d'entropie $s = \frac{dS}{dV}$ et une densité spectrale d'entropie $s_\nu = \frac{ds}{d\nu}$. La relation générale de la thermodynamique $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = T^{-1}$ peut s'appliquer au rayonnement d'une enceinte en la spécifiant :

$$\frac{ds}{du} = T^{-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{ds_\nu}{du_\nu} = T^{-1} \tag{6}$$

Nous pouvons ici écrire des d droits car ces grandeurs se rapportent par définition à un volume constant, le volume unité.

Pour attaquer son problème, Planck se proposait d'étudier l'échange d'énergie rayonnante entre la cavité et la paroi (les processus d'émission et d'absorption du rayonnement par la paroi). Comme la composition du rayonnement dans la cavité, d'après Kirchhoff, est indépendante de la nature de la paroi, Planck imaginait une paroi particulièrement simple et facile à traiter par le calcul. Il supposait que la paroi était

formée, pour chaque fréquence ν, d'oscillateurs harmoniques linéaires constitués par une charge électrique soumise à une force élastique de rappel à un centre, et mise en oscillation par le champ électrique oscillant des ondes électromagnétiques de cette fréquence. Il montra qu'entre l'énergie moyenne $\bar{u}_1$ d'un tel oscillateur (encore appelé résonateur de Planck) et la densité d'énergie u_ν du rayonnement de la cavité existait une relation linéaire de la forme :

$$u_\nu = g\,\bar{u}_1 \tag{7}$$

(nous omettrons dans la suite le trait sur u_1 sans oublier qu'il s'agit d'une énergie moyenne, l'énergie réelle de chaque oscillateur individuel fluctuant autour de cette moyenne). Un calcul basé sur les lois de l'électromagnétisme permettait à Planck de montrer que :

$$g = \frac{8\,\pi\,\nu^2}{c^3} \tag{8}$$

ν étant la fréquence et c la vitesse de la lumière.

Pour établir cette relation il a fallu à Planck de longs calculs couvrant cinquante pages de son traité sur le rayonnement. Il aurait pu s'épargner ce calcul s'il avait prêté attention à une note de Lord Rayleigh parue en juin 1900 [2] qui indiquait une autre méthode, simple et élégante, pour calculer g, méthode que Planck ne devait substituer à la sienne que beaucoup plus tard à la suite d'un mémoire de Debye publié en 1910 [3]. A vrai dire la méthode de Lord Rayleigh donnait à g une signification physique différente : g représente le nombre de modes d'ondes stationnaires du rayonnement noir pour l'unité de volume de la cavité et pour un intervalle de fréquence $\Delta\nu = 1$.

Ce calcul est reproduit aujourd'hui dans tous les traités élémentaires sur le rayonnement. Rappelons-le succinctement : d'après la loi de Kirchhoff la composition du rayonnement d'une cavité en équilibre thermique avec les parois ne dépend pas, comme nous l'avons déjà dit, de la forme de la cavité et de la nature des parois. La forme des ondes stationnaires dépend naturellement de la forme de la cavité, mais leur nombre g, par intervalle de fréquence, n'en dépend pas. Le calcul de g est très facile pour une cavité de forme parallélépipédique dont les six parois sont parfaitement réfléchissantes (un petit grain absorbant sur l'une des parois suffit à assurer l'équilibre thermique). Considérons en particulier une cavité de forme cubique de longueur d'arête l, et dont les arêtes sont respectivement parallèles à Ox, Oy et Oz. Les parois devant être des surfaces nodales pour le champ électrique des ondes stationnaires, les

projections sur les axes du vecteur d'onde $\vec{k}$, de module $|\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$, inverse de la longueur d'onde, doivent satisfaire aux relations* :

$$k_x = n_1 \frac{1}{2\,\ell} \qquad k_y = n_2 \frac{1}{2\,\ell} \qquad k_z = n_3 \frac{1}{2\,\ell}$$

où n_1, n_2 et n_3 sont des nombres entiers.

Si nous considérons un espace symbolique appelé espace du vecteur $\vec{k}$ et dans cet espace un réseau à trois dimensions de mailles cubiques d'arête $\frac{1}{2\,\ell}$, ces relations expriment que les vecteurs $\vec{k}$ des ondes stationnaires relient l'origine à l'un des nœuds du réseau. Le volume de la maille de ce réseau vaut $v = \frac{1}{8\,\ell^3} = \frac{1}{8\,V}$, V étant le volume de la cavité cubique. Le nombre d'ondes stationnaires dont le module $|\vec{k}|$ est compris entre k et $k + \Delta k$ est égal au rapport du volume de l'octant positif compris entre les sphères de rayon k et $k + \Delta k$ divisé par le volume v de la maille, soit :

$$\Delta g' = \frac{1}{8} 4\,\pi\,k^2\,\Delta k . \frac{1}{v} = 4\,\pi\,k^2\,\Delta k\,V$$

soit, par unité de volume de la cavité :

$$\Delta g = 4\,\pi\,k^2\,\Delta k$$

k est lié à la fréquence par $k = \frac{\nu}{c}$, donc :

$$\Delta g = \frac{4\,\pi\,\nu^2\,\Delta\nu}{c^3}$$

soit, par unité de fréquence $\Delta\nu = 1$:

$$g = \frac{4\,\pi\,\nu^2}{c^3}$$

Pour des ondes lumineuses, transversales, il faut faire correspondre à chaque vecteur $\vec{k}$ deux degrés de liberté correspondant à deux vecteurs vibration orthogonaux dans le

* Ces relations sont la généralisation à trois dimensions de la condition de résonance d'une corde vibrante ou d'un tuyau sonore :

$$\ell = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{n}{2\,k} \quad \text{soit} \quad k = \frac{n}{2\,\ell}$$

plan d'onde normal au vecteur $\vec{k}$. Il faut donc doubler la valeur de g et écrire finalement :

$$g = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \qquad (8 \text{ bis})$$

Cette expression est identique à celle obtenue par Planck, mais avec une signification physique différente. Cette identité montre que les modes d'ondes stationnaires du rayonnement dans une enceinte se comportent comme des oscillateurs linéaires. Au lieu d'avoir recours aux résonateurs de Planck dans la paroi - qui ne sont que des auxiliaires de calcul - il est plus satisfaisant de raisonner sur le rayonnement lui-même et de considérer sa structure quantifiée sous forme de modes stationnaires.

Nous avons fait une entorse à l'ordre historique en introduisant la méthode de Lord Rayleigh et en substituant aux résonateurs de parois de Planck les modes d'ondes stationnaires du rayonnement lui-même, mais la simplification qui en résulte est telle qu'on voudra bien nous pardonner cette digression.

A la relation (7) : $u_\nu = g u_1$ Planck devait adjoindre une relation analogue pour les entropies :

$$s_\nu = g\, s_1 \qquad (9)$$

s_1 représentant l'entropie moyenne d'un mode d'onde stationnaire du rayonnement (ou d'un résonateur de Planck). Mais, alors que la relation (7) est triviale et exprime l'additivité des énergies, la relation (9) ne l'est pas. En effet, les entropies ne satisfont à la relation d'additivité qu'à la condition que les vibrations des différents modes (ou résonateurs) soient indépendantes, sans relations de phase entre elles, c'est-à-dire à la condition qu'il n'y ait pas de cohérence entre leurs vibrations. Pour justifier la relation (9) Planck a donc été obligé d'introduire ce qu'il a appelé «hypothèse du rayonnement naturel», ce qui veut dire, «hypothèse de l'incohérence». En tenant compte des relations (8) et (9) Planck pouvait spécifier davantage la relation (6) et la mettre sous la forme :

$$\frac{d\, s_1}{d\, u_1} = T^{-1} \qquad (10)$$

Cette relation jouera dans la suite un rôle fondamental.

La première chose que fit Planck fut d'appliquer la relation (10) à la loi de déplacement de Wien (5) :
Tenant compte de (8) on peut mettre celle-ci sous la forme :

$$u_1 = \nu\, F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

et inversant cette relation écrire :

$$\frac{\nu}{T} = \varphi\left(\frac{u_1}{\nu}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{T} = \frac{1}{\nu}\,\varphi\left(\frac{u_1}{\nu}\right)$$

Appliquant (10) on obtient :

$$\frac{ds_1}{du_1} = \frac{1}{\nu}\,\varphi\left(\frac{u_1}{\nu}\right) \qquad \text{ou} \qquad ds_1 = \varphi\left(\frac{u_1}{\nu}\right) d\left(\frac{u_1}{\nu}\right)$$

On voit donc que l'entropie moyenne d'un mode (ou d'un résonateur) est une fonction de la seule variable $\frac{u_1}{\nu}$:

$$s_1 = \Phi\left(\frac{u_1}{\nu}\right) \tag{11}$$

(11) représente la forme donnée par Planck à la loi de déplacement de Wien.

* *
*

En 1896, Wien proposait pour la fonction $u_\nu\,(\nu, T)$ une forme satisfaisant à la loi de déplacement (5) :

$$u_\nu = \alpha\,\nu^3 \exp\left(-\frac{\beta\,\nu}{T}\right) \tag{12}$$

Cette «loi de Wien» rendait bien compte des résultats des mesures dans le domaine des grandes fréquences, dans les spectres visibles et ultraviolets, et Planck, avec la plupart des physiciens de son temps, l'adoptait comme relation générale. Il l'utilisa pour calculer une expression de l'entropie du rayonnement du corps noir. A partir d'elle on trouve en effet :

$$u_1 = \frac{u_\nu}{g} = \frac{\alpha\, c^3}{8\pi}\,\nu \exp\left(-\frac{\beta\nu}{T}\right) \tag{13}$$

soit en posant avec Planck $\frac{\alpha c^3}{8\pi} = h$:

$$u_1 = h\,\nu \exp\left(-\frac{\beta\nu}{T}\right)$$

et en passant au logarithme :

$$\mathrm{Log}\,\frac{u_1}{h\nu} = -\frac{\beta\nu}{T} \qquad \text{ou} \qquad T^{-1} = \frac{-1}{\beta\nu}\,\mathrm{Log}\,\frac{u_1}{h\nu}$$

L'application de la relation fondamentale (10) donne :

$$\frac{ds_1}{du_1} = -\frac{1}{\beta\nu}\,\mathrm{Log}\,\frac{u_1}{h\nu} \tag{14}$$

$$ds_1 = -\frac{h}{\beta}\,\mathrm{Log}\,\frac{u_1}{h\nu}\;\mathrm{d}\left(\frac{u_1}{h\nu}\right)$$

D'où par intégration :

$$s_1 = -\frac{h}{\beta}\left[\left(\frac{u_1}{h\nu} - 1\right)\mathrm{Log}\,\frac{u_1}{h\nu}\right] + \mathrm{Cte} \tag{15}$$

expression qui est bien de la forme de (11).

Par dérivation de (14) Planck obtenait d'autre part :

$$\frac{d^2\,s_1}{du_1^{\,2}} = -\frac{1}{\beta\nu}\;\frac{1}{u_1}$$

expression qu'il mit sous la forme :

$$\mathcal{R} = \left(-\frac{d^2 s_1}{du_1^{\,2}}\right)^{-1} = \beta\,\nu u_1 \tag{16}$$

D'après la loi de Wien, l'expression $\mathcal{R}$ était donc une fonction linéaire de u_1. Voici donc les conclusions que Planck avait tiré de la loi de Wien en 1899 et qu'il croyait définitives. Le problème devait rebondir au début de l'année 1900 lorsque des mesures de densité du rayonnement du corps noir dans l'infrarouge lointain furent connues et montrèrent que leurs résultats n'étaient pas conformes à la loi de Wien. Ces mesures faites à Berlin même, où résidait Planck, par Kurlbaum et Pringsheim d'une part, par

Rubens d'autre part, indiquèrent que dans le domaine des basses fréquences u_ν variait proportionnellement à la température thermodynamique T. Sur le plan théorique ce résultat était conforme, comme devaient le faire remarquer Lord Rayleigh et Jeans [2] au «principe d'équipartition» d'après lequel, pour un oscillateur linéaire ou un «mode» on devait avoir :

$$u_1 = k\,T \tag{17}$$

$k = \dfrac{R}{N}$, rapport de la constante des gaz parfaits au nombre d'Avogadro.

Planck en conclut que dans le cas limite des basses fréquences :

$$\frac{ds_1}{du_1} = T^{-1} = \frac{k}{u_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 s_1}{du_1^2} = -\frac{k}{u_1^2}$$

$$\Re = \left(-\frac{d^2 s_1}{du_1^2}\right)^{-1} = \frac{1}{k}\,u_1^2 \tag{18}$$

Dans le domaine des basses fréquences, l'expression $\Re$ devenait donc une fonction quadratique de u_1 alors que dans le domaine des hautes fréquences, cette fonction était linéaire.

Cette constatation de l'existence de deux expressions pour $\Re$, l'une (16) valable dans le cas limite des hautes fréquences (qui est le cas des faibles valeurs de u_1), l'autre (18) valable dans le cas limite des basses fréquences (qui est le cas des valeurs élevées de u_1) donna à Planck l'idée de combiner les deux lois limites par l'«Ansatz» :

$$\Re = \beta\,\nu\;u_1 + \frac{1}{k}\,u_1^2 = \left(-\frac{d^2 s_1}{du_1^2}\right)^{-1} \tag{19}$$

En effet, dans le cas limite $u_1 \rightarrow 0$ (ou ν grand), on trouve bien $\Re \rightarrow \beta\,\nu\,u_1$ et dans le cas limite u_1 grand (ou ν petit), $\Re \rightarrow \dfrac{1}{k}\,u_1^2$. On retrouve bien ainsi les valeurs limites de $\Re$ conformes aux résultats expérimentaux dans les deux régions spectrales extrêmes.

La relation (19) est équivalente à :

$$-\frac{d^2 s_1}{du_1^2} = \frac{1}{\beta\nu}\left[\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1 + k\,\beta\,\nu}\right] \tag{20}$$

qui donne par intégration :

$$\frac{ds_1}{du_1} = \frac{1}{\beta\nu}\left[\text{Log}\,(u_1 + k\,\beta\,\nu) - \text{Log}\,u_1 + \text{Log}\,\gamma\right] \tag{21}$$

Log γ étant une constante d'intégration.

En identifiant $\frac{ds_1}{du_1}$ avec T^{-1} (relation 10), Planck obtenait ainsi :

$$T^{-1} = \frac{1}{\beta\nu}\,\text{Log}\left(\gamma\,\frac{u_1 + k\,\beta\,\nu}{u_1}\right)$$

d'où :
$$u_1 = \frac{k\,\beta\,\nu}{\gamma^{-1}\exp\left(\frac{\beta\nu}{T}\right) - 1} \tag{22}$$

– Pour $\frac{\beta\nu}{T} << 1$ cette expression doit s'identifier avec (17) d'où $\gamma = 1$ et Log $\gamma = 0$.

– Pour $\frac{\beta\nu}{T} >> 1$ elle doit s'identifier avec la loi de Wien sous la forme (13), d'où $\beta = \frac{h}{k}$.

Ainsi (22) prend la forme définitive :

$$u_1 = \frac{h\,\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \tag{23}$$

qui conduit à :
$$u_\nu = g u_1 = \frac{8\,\pi\,\nu^2}{c^3}\,u_1$$

soit à :
$$u_\nu = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \tag{24}$$

C'est la loi pour la densité spectrale d'énergie du corps noir présentée par Planck à la Société de Physique de Berlin le 19 octobre 1900 [1].

Planck la compléta en donnant, par l'intégration de (21), une expression de l'entropie s_1.

– Avec les données $\text{Log}\,\gamma = 0$ et $\beta = \frac{h}{k}$, (21) s'écrit :

$$\frac{ds_1}{du_1} = \frac{k}{h\nu}\left[\text{Log}\,(u_1 + h\nu) - \text{Log}\,u_1\right]$$

– En choisissant une constante d'intégration satisfaisant à la relation (11) on obtient :

$$s_1 = k\left[\left(1 + \frac{u_1}{h\nu}\right)\text{Log}\left(1 + \frac{u_1}{h\nu}\right) - \frac{u_1}{h\nu}\,\text{Log}\,\frac{u_1}{h\nu}\right] \qquad (25)$$

Grâce à la thermodynamique et à l'électromagnétisme et à son «Ansatz» Planck avait donc résolu le problème qu'il s'était posé et il aurait pu s'en tenir là. Mais il n'était pas satisfait. Il considérait son «Ansatz» comme une «heureuse trouvaille», et il se proposait de chercher une justification théorique aux relations qu'il venait d'établir. Il se tournait vers les vues atomistiques et les méthodes probabilistes de Boltzmann. Celui-ci l'avait d'ailleurs encouragé dans cette voie [4]. Jusque là Planck n'avait considéré l'œuvre de Boltzmann qu'avec scepticisme. Il avait considéré le principe de Carnot comme un principe rigoureux de la Physique, et son interprétation probabiliste par Boltzmann l'avait choqué.

Boltzmann avait soumis à une analyse probabiliste le problème de l'énergie et de l'entropie d'un gaz parfait monoatomique. L'énergie d'un tel gaz est constituée uniquement par l'énergie cinétique de translation $\frac{1}{2}mv^2$ de ses molécules. Pour représenter l'état microscopique à l'échelle moléculaire, d'un gaz, Boltzmann avait introduit «l'espace des vitesses», espace de coordonnées v_x, v_y, v_z dans lequel l'état instantané d'une molécule était représenté par l'extrémité de son vecteur vitesse $\vec{v}$ partant de l'origine des coordonnées. Il avait montré qu'un état d'énergie donné du gaz (état macroscopique) pouvait être représenté par un grand nombre de distributions différentes des points représentatifs des molécules dans l'espace des vitesses. Un état «macroscopique» du gaz était donc caractérisé par le nombre de distributions «microscopiques» qui lui correspondaient. Ce nombre W était appelé par Boltzmann la «probabilité» de l'état macroscopique. Selon lui l'état d'équilibre stable du gaz devait correspondre à un état qui rendait W maximum. Boltzmann avait montré en outre

que l'entropie S du gaz devait être proportionnelle au logarithme de la probabilité de son état.

Mais pour calculer une probabilité W, c'est-à-dire un nombre de distributions des points représentatifs des molécules dans l'espace des vitesses, Boltzmann s'était heurté à une grosse difficulté. Le gaz lui-même avait une structure discontinue. Il était formé par un nombre immense mais fini de molécules. L'espace des vitesses par contre avait une structure continue. Pour pouvoir calculer une probabilité W d'un état, Boltzmann s'était vu obligé de compartimenter cet espace, de le diviser en éléments d'extension finie qu'il appela les «cellules» de l'espace des vitesses. Boltzmann s'était adonné à l'illusion que ces cellules n'étaient qu'un artifice de calcul et qu'il pouvait devoir les rendre infiniment petites, faire tendre leur extension vers zéro. Mais la suite devait montrer que cet espoir n'était pas fondé. Ces cellules sont d'extension finie*. En faisant tendre leur extension vers zéro, on aboutit à un non-sens, à une entropie infinie du gaz.

Le problème qui se posait à Planck était différent de celui de Boltzmann. Il s'agissait pour lui de distribuer une énergie de rayonnement u_ν entre des résonateurs ou des «modes» de rayonnement. La structure de ces modes était discontinue. Il y en avait un nombre g par unité de volume et par unité d'intervalle de fréquence. Mais la structure de l'énergie rayonnante, d'après la théorie électromagnétique, était continue. Pour pouvoir définir une probabilité de distribution du rayonnement, Planck se voyait obligé d'imiter Boltzmann et de donner à l'énergie rayonnante une structure discontinue, de supposer que cette énergie pouvait se diviser en un nombre fini N d'éléments d'énergie qu'il appela $\mathcal{E}$ en écrivant :

$$u_\nu = N\,\mathcal{E} \tag{26}$$

– Comme, d'après (8) et (8 bis) :

$$u_\nu = g\,u_1$$

il s'agissait donc de distribuer N éléments d'énergie rayonnante entre g résonateurs ou entre g modes.

---

* A vrai dire, ce sont les cellules de «l'espace des phases», produit de l'espace des positions et de l'espace des vitesses, qui sont finies. L'espace des phases, introduit en physique par Gibbs, n'était pas familier à Boltzmann.

– Comme $N\mathscr{E} = gu_1$, nous définirons avec Planck :

$$n = \frac{N}{g} = \frac{u_1}{\mathscr{E}} \tag{27}$$

n représente le nombre moyen d'éléments d'énergie rayonnante par résonateur ou par mode.

Ces définitions étant précisées, il s'agissait pour Planck de calculer une valeur de W en déterminant le nombre de manières différentes de distribuer N éléments d'énergie rayonnante entre g résonateurs ou modes. Pour un intervalle de fréquence donné, la valeur W_ν de ce nombre était donné par une formule que Planck empruntait à l'analyse combinatoire :

$$W_\nu = \frac{(N + g - 1)\,!}{N\,!\,(g-1)\,!} \tag{28}$$

Cette formule est valable à la condition de supposer qu'une distribution donnée est caractérisée par le nombre n_i d'éléments $\mathscr{E}$ dans chaque mode sans qu'on puisse discerner ces éléments les uns des autres. Ils sont indiscernables alors que les résonateurs ou modes constituent des éléments discernables et localisables, distincts les uns des autres.

C'est en tout cas l'hypothèse que Planck a dû faire implicitement sans l'exprimer explicitement. Cette distinction n'a été rendue claire que plus tard, en 1911 dans une note rédigée par Ladislav Natanson [5] et en 1924 quand Bose et Einstein eurent précisé les fondements de la statistique quantique de Bose-Einstein [6]. En fait la formule utilisée par Planck pour W est celle de la statistique de Bose-Einstein.

La probabilité totale W est $W = \Pi_\nu W_\nu$, le produit s'étendant à tous les intervalles de fréquences. Planck introduisit ensuite le postulat de Boltzmann sous la forme qu'il lui donna personnellement* :

$$S = k \operatorname{Log} W \tag{29}$$

S étant l'entropie totale : $\displaystyle S = \int_0^\infty s_\nu \, d\nu = \sum_\nu s_\nu$

* C'est Planck qui a défini la constante $k = \frac{R}{N}$ appelée constante de Boltzmann. Elle ne figure pas dans l'œuvre de Boltzmann.

Il en résulte que :

$$s_\nu = k \operatorname{Log} W_\nu = k\left[\operatorname{Log}(N+g)! - \operatorname{Log} N! - \operatorname{Log} g!\right]$$

en négligeant l'unité par rapport à N et à g. L'approximation de Stirling permet d'écrire :

$$\operatorname{Log} \mathcal{Z}! = \mathcal{Z} \operatorname{Log} \mathcal{Z} - \mathcal{Z}$$

soit : $$s_\nu = k\left[(N+g)\operatorname{Log}(N+g) - N \operatorname{Log} N - g \operatorname{Log} g\right]$$

ce qui peut encore s'écrire, en introduisant $n = N/g$:

$$s_\nu = k\, g\left[(1+n)\operatorname{Log}(1+n) - n \operatorname{Log} n\right]$$

d'où, en vertu de (9) et de (27) :

$$s_1 = k\left[\left(1+\frac{u_1}{\mathcal{E}}\right)\operatorname{Log}\left(1+\frac{u_1}{\mathcal{E}}\right) - \frac{u_1}{\mathcal{E}}\operatorname{Log}\frac{u_1}{\mathcal{E}}\right] \qquad (30)$$

La comparaison de cette relation avec (25) montre qu'il faut poser $\mathcal{E} = h\nu$. Appliquant la relation (10) $\dfrac{ds_1}{du_1} = T^{-1}$ on retrouve alors aisément les formules (23) et (24).

Planck devait présenter cette méthode de déduction de sa formule à la Société de Physique de Berlin le 14 décembre 1900, après avoir passé entre octobre et décembre «des semaines de travail intensif» pour obtenir ce résultat.

En confrontant sa formule avec les résultats des mesures expérimentales, il était en mesure de calculer les valeurs numériques des deux constantes fondamentales h et k qu'il avait introduit et il obtint :

$$h = 6{,}55 \quad 10^{-27} \text{ erg sec}$$

$$k = 1{,}346 \quad 10^{-16} \text{ erg deg}^{-1}$$

A partir de la valeur de k il put calculer aussi les valeurs numériques du nombre d'Avogadro $N = Rk$ et de la charge e de l'électron, et il obtint ainsi pour ces grandeurs les valeurs les plus précises connues à cette époque.

* *
*

Je voudrais terminer par deux remarques :

• La première est la suivante. Pour établir sa formule, Planck s'était servi de l'expression de :

$$\mathcal{R} = \left(-\frac{d^2 s_1}{du_1^2} \right) = \frac{h\nu}{k} \cdot u_1 + \frac{1}{k} \cdot u_1^2$$

Einstein [7] devait montrer plus tard en 1909, que cette grandeur avait une signification physique intéressante. Remplaçant en effet u_1 par $u_1 = n\mathcal{E} = nh\nu$ la relation précédente s'écrit :

$$\mathcal{R} = \frac{(h\nu)^2}{k} \cdot (n + n^{2)}$$

Einstein devait montrer que le carré des fluctuations d'un rayonnement lumineux est donné par :

$$\overline{\Delta n^2} = n + n^2,$$

que le premier terme n était dû à la structure corpusculaire et le deuxième terme n^2 à la structure ondulatoire du rayonnement.

La grandeur $\mathcal{R}$ est donc liée aux fluctuations du rayonnement.

• La seconde remarque est la suivante :

Pour Planck la structure discontinue du rayonnement électromagnétique $\mathcal{E} = h\nu$ n'apparaît que lorsque ce rayonnement entre en réaction d'échange avec la matière.

Einstein [8], en 1905, a introduit une idée beaucoup plus radicale, celle de la structure discontinue du rayonnement lui-même formé de corpuscules d'énergie $\mathcal{E} = h\nu$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = \left(\frac{h\nu}{c} \right)$.

Planck n'a jamais voulu admettre le point de vue d'Einstein et la controverse entre les deux physiciens a duré longtemps [9]. Elle n'est pas résolue à l'heure actuelle.

Je voudrais enfin ajouter une dernière remarque.

Pour justifier la relation [9] d'additivité des entropies, Planck a dû faire l'hypothèse de l'incohérence des vibrations des différents résonateurs ou modes de rayonnement.

Il s'est préoccupé dans la suite de savoir comment il faut modifier le théorème d'additivité des entropies en cas de cohérence entre des vibrations lumineuses. Il a

proposé ce sujet d'étude à son élève Max von Laue qui l'a résolu dans deux publications importantes [10] qui semblent être tombées dans l'oubli.

BIBLIOGRAPHIE

[1] La découverte du quantum d'action a été exposée par Planck dans les articles suivants :

M. PLANCK, Verhandlungen der deutschen Physikalischen Gesellschaft 2, 202 et 2, 237 (1900) et dans Annalen der Physik 1901, 4, 553 et 6, 618.

Il en fait la synthèse dans son livre : M. PLANCK, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, ed. Barth, Leipzig 1906.

[2] Lord RAYLEIGH, 1900, Phil. Mag. 49, 539 et 1905, Nature 71, 559 et 72, 54 et 243.

Voir aussi JEANS, J.H., 1905, Nature 72, 293 et Phil. Mag. 10, 91.

[3] P. DEBYE, 1910, Annalen der Physik 33, 1427.

[4] L. BOLTZMANN, 1897, Berliner Berichte p. 106 et Wissenschaftliche Abhandlungen III, p. 618.

[5] L. NATANSON, 1911, Physikalische Zeitschrift 12, 659.

[6] S.N. BOSE, 1924, Zeitschrift für Physik 26, 178 et A. EINSTEIN, Sitzungsberichte der Preuss. Akademie der Wissenschaften, 1924, p. 261 et 1925, p. 3 et 18.

[7] A. EINSTEIN, 1909, Physikalische Zeitschrift 10, 185.

[8] A. EINSTEIN, 1905, Annalen der Physik 17, 132.

[9] Voir par exemple les discussions au Congrès de Salzbourg : A. EINSTEIN, 1909, Physikalische Zeitschrift 10, 817.

[10] Max von LAUE, Annalen der Physik, 1906, 20, 365 et 1907, 23, 1.

* * *

Ce texte a fait l'objet d'une conférence de Hubert GIÉ prononcée le 15 mai 1985 à Bordeaux au cours d'une journée Alfred KASTLER organisée par la section académique de Bordeaux. Cette journée fut l'occasion de la publication d'un numéro du BUP (n° 679, décembre 1985) où l'on trouvera le texte de cette conférence «L'introduction de la constante d'action h par Planck - 1900» ainsi qu'un article de Claude COHEN-TANNOUDJI «Du pompage optique à la spectroscopie laser».