

Un oscillateur paramétrique sur rétroprojecteur

par André DEIBER et Jean-Pierre SIMOND
Lycée Fustel de Coulanges - 67000 Strasbourg
et le GRESEP
Groupe de Recherches de l'IUFM d'Alsace
et de l'Université Louis Pasteur

RÉSUMÉ

Une boussole, deux bobines et un générateur de fonctions suffisent à la réalisation aisée d'un oscillateur paramétrique. Comme elle peut être aisément réalisée sur un rétroprojecteur, elle constitue une expérience de cours idéale.

1. OBJECTIFS DE L'EXPÉRIENCE

La période d'un oscillateur dépend de plusieurs paramètres caractéristiques du système. On obtient un oscillateur paramétrique en modifiant une de ces grandeurs à l'aide d'un dispositif dénommé «pompe» extérieur à l'oscillateur. Un tel système est décrit par une équation différentielle linéaire dite de Hill, du type :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\lambda \frac{dX}{dt} + (\omega_0(t))^2 X = 0$$

Si la fonction $\omega_0(t)$ est sinusoïdale, on se trouve dans le cas particulier mais néanmoins important de l'équation de Mathieu [1, 2, 3].

Réalisable à l'aide de matériel simple disponible dans tous les lycées, l'expérience décrite sur la figure 1, permet de dégager les propriétés fondamentales des oscillateurs paramétriques, en particulier l'existence de plages d'instabilité pour certaines valeurs particulières de la fréquence de pompe, la limitation de l'amplitude par un phénomène non linéaire et l'influence des frottements sur le régime transitoire. Ce dernier point nécessite une simulation informatique pour valider certaines explications qualitatives concernant les phénomènes observés.

2. PRINCIPE DE LA RÉALISATION

Une boussole évoluant dans un champ magnétique variable en direction et en amplitude est un exemple (largement étudié) de système dynamique pouvant déboucher sur un comportement chaotique [3, 4]. Plus simplement, lorsque la direction de $\mathbf{B}$ est maintenue fixe, l'aiguille aimantée devient un oscillateur paramétrique, sachant que l'intensité du champ magnétique $\mathbf{B}$ est un des paramètres caractéristiques du système oscillant.

En effet, considérons une aiguille aimantée susceptible de tourner autour d'un axe vertical et placée dans un champ magnétique uniforme et pour l'instant constant. Le champ magnétique $\mathbf{B}$ exerce sur l'aiguille de moment magnétique $\mathbf{M}$ un couple de moment $\mathbf{M} \wedge \mathbf{B}$.

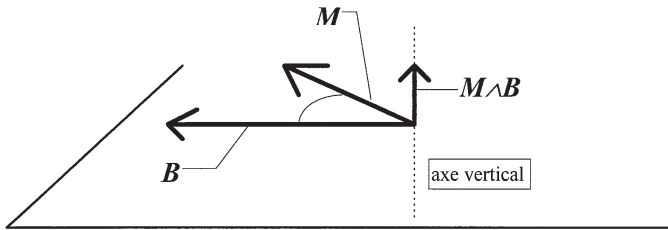


Figure 1

L'application du théorème du moment cinétique à l'aiguille aimantée en O donne immédiatement $J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -MB \sin(\theta)$, où J représente le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à un axe vertical passant par son centre O. Pour des petits angles, cette équation différentielle se réduit à $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MB}{J} \theta = 0$ caractéristique d'un oscillateur harmonique de période propre $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB}}$.

Cette relation montre clairement que l'intensité du champ magnétique est un paramètre intervenant dans l'expression de la période propre. Or, d'une manière générale, l'intensité de B en un point est proportionnelle à l'intensité du courant électrique traversant le circuit, $B = Ki(t)$. On entrevoit ainsi la possibilité de rendre aisément paramétrique l'oscillateur que constitue l'association boussole/champ magnétique : il suffit de faire varier $i(t)$ de manière sinusoïdale autour d'une valeur moyenne I_0 pour se retrouver dans le cas de l'équation de Mathieu, du moins tant que l'angle θ reste petit.

3. MISE EN ŒUVRE EXPÉRIMENTALE

3.1. Choix de la source de champ magnétique

L'objectif étant de visualiser le comportement de l'aiguille par rétroprojection, il faut exclure d'office le solénoïde comme source de champ magnétique. Par contre, on peut utiliser les bobines plates de Helmholtz en plaçant la boussole au centre du dispositif. Mais il est tout à fait possible de prendre deux bobines coaxiales plus longues sous réserve qu'elles présentent le même nombre de spires en les espaçant pour laisser de la place pour la boussole. Dans ce dernier cas, le champ n'est pas uniforme dans l'espace entre les bobines, mais il s'avère que cela ne nuit pas à l'expérience.

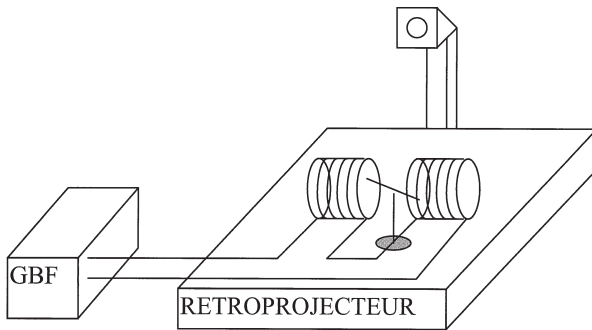


Figure 2

3.2. Influence du champ magnétique terrestre

La valeur typique de la période propre d'une boussole placée dans le champ magnétique terrestre est de l'ordre de quelques secondes. Afin d'étudier son comportement de manière confortable, on ne peut aller au-delà de quelques hertz pour la fréquence propre de l'aiguille dans le champ des bobines. En conséquence, le champ terrestre n'est pas négligeable devant celui des bobines. Pour ne pas être gêné par cette circonstance, il suffit d'orienter l'axe commun aux deux bobines suivant le méridien magnétique terrestre, le champ total $\mathbf{B}_{\text{terr}} + \mathbf{B}_{\text{bob}}$ restant suivant cette direction. La modulation de l'intensité $i(t)$ dans les bobines entraîne celle de la norme de $\mathbf{B}_{\text{tot}}$.

3.3. Alimentation des bobines

Un courant de quelques dizaines de milliampères suffit pour la réalisation de l'expérience. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser une alimentation de puissance, un générateur de fonctions usuel, d'impédance de sortie $R_g = 50 \, \Omega$ suffit amplement. Il faut régler la force électromotrice $e(t)$ en l'absence des bobines ; en effet, la résistance R de

celles-ci étant faible devant la résistance interne R_g du générateur, il va de soi que la tension de sortie du générateur s'effondre en branchant les bobines.

A la composante continue ($U_o \cong 8\text{ V}$) de la force électromotrice $e(t)$ se superpose une faible composante alternative (valeur efficace typique $V_o = 0.5\text{ V}$) de fréquence f_p . On a donc :

$$e(t) = U_o + V_o \sqrt{2} \sin(f_p 2\pi t)$$

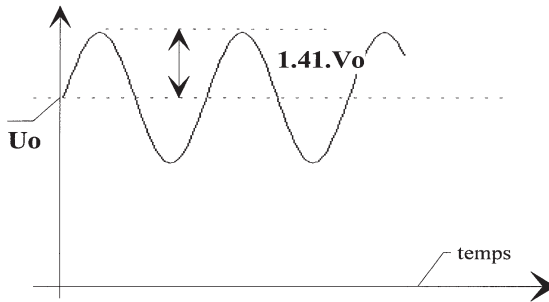


Figure 3

De la sorte l'intensité du courant $i(t)$ va évoluer suivant la loi :

$$i(t) = \frac{U_o + V_o \sqrt{2} \sin(2\pi f_p t)}{R + R_g}$$

en négligeant a priori l'auto-induction vu la valeur faible de la fréquence. Le champ magnétique qui en résulte est de la forme :

$$B = B_0 + B_1 \sin(2\pi f_p t)$$

L'équation du mouvement de l'aiguille aimantée s'écrit pour des petits angles :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{M(B_0 + B_1 \sin(2\pi f_p t))}{J} \theta = 0$$

du type $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + h(t)) \theta = 0$. On retrouve l'équation de Mathieu avec :

$$\omega_0^2 = \frac{MB_0}{J}$$

et :

$$h(t) = \frac{B_1}{B_0} \sin(2\pi f_p t) = \frac{V_1 \sqrt{2}}{V_0} \sin(2\pi f_p t)$$

3.4. Détermination de la fréquence de pompe

D'une manière générale, un oscillateur paramétrique présente une instabilité caractérisée par une croissance des oscillations pour des fréquences de pompe f_p égales à $\frac{2f_o}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. En pratique, on peut observer le phénomène pour $f_p = f_o$ et $f_p = 2f_o$. Mais la fréquence de pompe doit être ajustée avec une bonne précision (valeur typique 0.1 Hz). Il est donc nécessaire de déterminer préalablement la période propre de la boussole plongée dans le champ magnétique moyen.

Pour cela, on réduit au minimum la composante alternative du générateur avant de chronométrer une dizaine de périodes de la boussole. Il suffit ensuite de régler la fréquence du générateur à $2f_o$ (valeur approximative 2-4 Hz). En rétablissant la composante alternative, l'aiguille aimantée décrit des oscillations d'amplitude croissante. Notons que le réglage fin est très aisé avec le système des deux bobines coaxiales. En écartant légèrement celles-ci, on modifie finement le champ magnétique moyen, que subit la boussole. On peut alors se contenter d'un réglage grossier de la fréquence du GBF, puis ajuster directement sur le rétroprojecteur l'écartement des bobines pour obtenir le démarrage des oscillations.

Lorsqu'on s'écarte des valeurs f_o ou $2f_o$, les oscillations s'amortissent en quelques dizaines de secondes en relation avec l'absence de frottements sensibles pour la boussole montée sur pivot ou suspendue à un fil. Dans le cas contraire, on peut maintenir l'aiguille en mouvement pendant des heures.

4. LIMITATION DE L'AMPLITUDE

4.1. Phénomènes observés durant le régime transitoire de l'oscillateur paramétrique réel

La visualisation au rétroprojecteur permet l'étude du comportement assez singulier de l'aiguille aimantée. Dans un premier temps, les phases de croissance de l'amplitude des oscillations alternent avec d'autres phases de décroissance. Puis, on tend vers un régime permanent caractérisé par un arrêt de la croissance des oscillations, à condition expresse de ne pas forcer sur la valeur de l'amplitude de la composante alternative V_o . En effet, une valeur trop élevée va entraîner un dépassement de la position $\theta = \pm \pi$, ce qui risque de provoquer une rotation de l'aiguille sans changement de sens. On peut alors se demander quelle est l'origine physique de ces variations d'amplitude.

4.2. Non linéarité de l'oscillateur réel

L'équation de Mathieu étant linéaire, elle ne porte pas en elle les germes de la limitation de l'amplitude des oscillations. Or, c'est bien une non-linéarité de l'équation différentielle qui est responsable de la fin de la phase de croissance des oscillations. Pour le Botafumeiro par exemple, la résistance de l'air introduit un terme de dissipation non linéaire du type $-\alpha \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ dans l'équation différentielle en θ décrivant cet oscillateur paramétrique [5, 6] en plus du terme élastique en $\sin(\theta)$ clairement non linéaire.

Pour l'oscillateur paramétrique électronique exploitant les propriétés d'un multiplieur analogique [3], la saturation de ce composant (phénomène non linéaire par excellence !) limite l'amplitude à $\pm U_{sat}$. Mais dans ce cas, on n'observe pas de variations d'amplitude pendant la phase transitoire comme pour l'aiguille aimantée. Ceci signifie que le comportement particulier observé provient d'un terme élastique non linéaire en $-\omega_o(t)^2 \sin(\theta)$ au lieu de $-\omega_o(t)^2 (\theta)$ comme dans l'équation de Mathieu. Une simulation informatique réalisée avec le logiciel Maple confirme que la substitution de θ par $\sin \theta$ fait apparaître une évolution périodique de l'amplitude des oscillations.

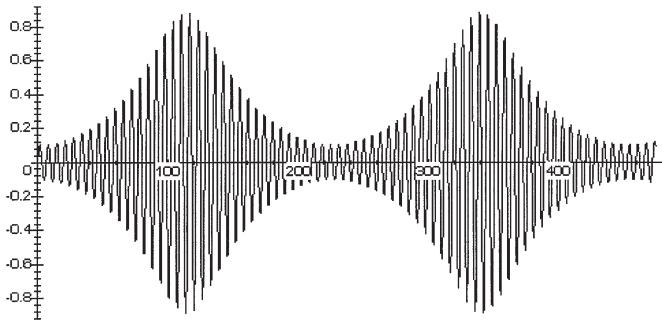


Figure 4 : Graphe avec $\omega_o = 1, \alpha = 0, h_o = 0.1$.

Mais comme le montre la courbe de la figure 4, cette substitution n'explique pas l'existence d'un régime permanent caractérisé par une amplitude constante.

4.3. Intervention de phénomènes dissipatifs

Bien que la durée du régime transitoire de l'oscillateur paramétrique soit très supérieure à la durée d'amortissement de la boussole dans un champ constant, il ne reste plus qu'à considérer l'existence d'un terme de frottement (fluide pour simplifier) dans l'équation différentielle afin de justifier les observations. Dans la simulation, on peut faire varier l'importance du terme de frottement et l'amplitude de pompe.

Le programme est :

```
wo:=1;omega:=2;alpha:=0.02;ho:=0.1;
sys:=v=diff(theta(t),t),diff(v(t),t)+alpha*v(t)+wo^2*(1+ho*cos(omega*t))*sin(theta(t));
sol:=dsolve({sys,theta(0)=0,v(0)=0.1},{theta(t),v(t)},numeric);
odeplot(sol,[t,theta(t)],0..500,numpoints=2000,color=black);
```

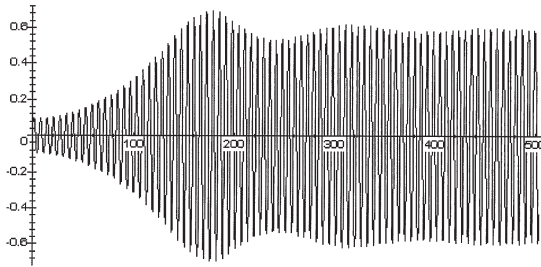


Figure 5 : Graphe avec $\omega_o = 1$, $\alpha = 0.02$, $h_o = 0.1$.

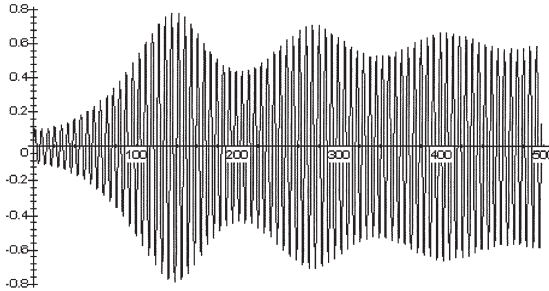


Figure 6 : Graphe avec $\omega_o = 1$, $\alpha = 0.01$, $h_o = 0.1$.

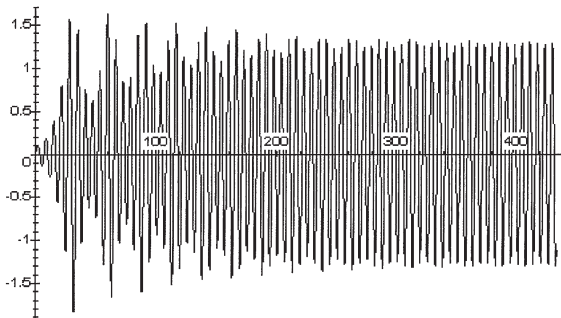


Figure 7 : Graphe avec $\omega_o = 1$, $\alpha = 0.02$, $h_o = 0.5$.

Ces trois simulations (figures 5 à 7) montrent qu'il y a bien existence d'un régime permanent mais que l'allure (donc la durée) du régime transitoire dépend à la fois de l'amplitude de pompe et de l'intensité des forces de frottements dans l'oscillateur. Ce qui explique que la durée du transitoire de l'oscillateur paramétrique diffère de l'oscillateur harmonique libre amorti.

En conclusion, ce dispositif permet d'obtenir aisément des oscillations de grande amplitude ($\cong 70^\circ$) nettement visibles en classe entière vu l'usage du rétroprojecteur tout en servant de support à un aller retour entre les observations et les modélisations par logiciel de calcul formel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Réflexion du groupe technique de physique sur les nouveaux programmes - rentrée 1995.
- [2] P. BERGÉ, Y. POMMEAU et C. VIDAL : «*L'ordre dans le chaos*», Hermann, Paris, 1984.
- [3] F.X. BALLY et P. BOISSIE : «*Un modèle simple et exact de l'oscillateur paramétrique*», BUP n° 747, octobre 1992.
- [4] M. DUBOIS, P. ATTEN et P. BERGÉ : «*L'ordre chaotique*», La Recherche n° 185, février 1987.
- [5] Juan SANMARTIN LOSADA : «*O Botafumeiro : parametric pumping in the Middle Age*», American Journal of Physics 52 (10), pp. 937-945.
- [6] Juan SANMARTIN LOSADA : «*La physique de l'encensoir*», Pour la Science (Hors-série), janvier 1995.