# SPECTRE DE FOURIER D'UNE TENSION REDRESSÉE BI-ALTERNANCE FILTRÉE
## calcul à l'aide du tableur Excel 5.0

par Alain CHOMIK, moniteur de l'Enseignement Supérieur
et Raymond LAAGEL, Chef de TP Ensam
Institut Universitaire de Technologie
Génie Electrique et Informatique Industrielle
61 rue Albert Camus
68 093 MULHOUSE CEDEX

---

*Cette étude a fait l'objet d'un rapport pédagogique dans le cadre du Monitorat de l'Enseignement Supérieur. Dans ce mémoire, les calculs sont présentés de manière plus détaillée que dans le présent document ; car destiné à un auditoire d'étudiants 1ère année d'IUT.*

**Résumé**

Après la description de la forme d'une tension redressée bi-alternance filtrée, on utilise un tableur et son interface graphique pour représenter le spectre de Fourier de cette tension. On observe l'évolution de ce spectre en fonction de la valeur de la capacité de filtrage.

Lors de l'étude de l'alimentation d'un circuit en tension continue à partir du secteur, la génération d'harmoniques parasites peut poser un problème. Cette question est importante pour la Compatibilité Electro-Magnétique (CEM) du montage.

Le spectre d'une tension redressée bi-alternance non filtrée figure dans tous les manuels. Ce spectre contient un grand nombre de raies qui sont toutes des multiples pairs de la fréquence du secteur.

Lorsqu'on procède à un filtrage par condensateur en tête, la tension d'ondulation résiduelle (de fréquence 100 Hz) peut être considérée comme une séquence de trois signaux différents ; le signal ne peut être décrit par une fonction unique du temps durant sa période. On montre que la séquence précitée est constituée d'un arc de sinusoïde, d'un arc d'exponentielle et d'un nouvel arc de sinusoïde. Le calcul des harmoniques sera fait par intervalles, chaque coefficient étant égal à la somme de trois intégrales différentes.

On se propose de calculer le spectre en fréquence d'une tension redressée bi-alternance filtrée par condensateur et de le représenter sous forme d'un spectre ce raies. Pour ce faire on utilisera les possibilités d'un tableur et de son assistant graphique.

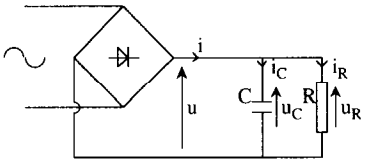


Fig. 1 : Montage.

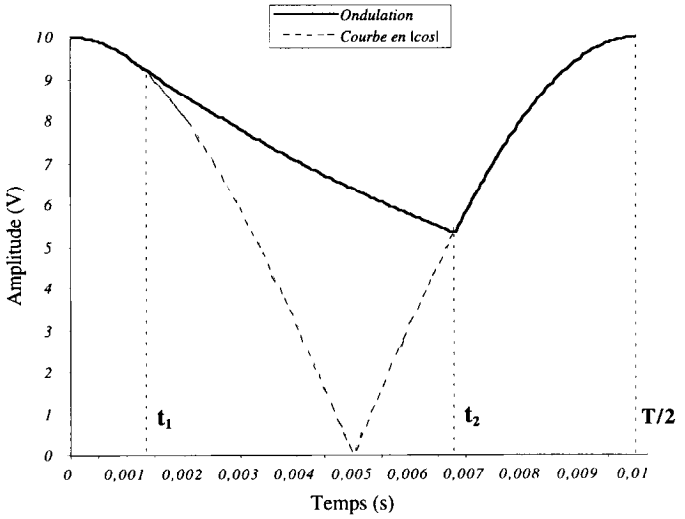


Fig. 2 : Forme de l'ondulation résiduelle de la tension $u_R$ pour un signal sinusoïdal d'entrée d'amplitude E de 10V avec R = 100Ω et C = 100µF. (*Remarque* : cette figure représente une courbe calculée).

En utilisant le repère de la figure ci-contre, on distingue trois intervalles :

$$0 < t < t_1 \ : u_R = E \cos \omega t$$
$$t_1 < t < t_2 \ : u_R = E \cos(\omega t_1) \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau}\right) \quad \text{avec } \tau = RC$$
$$t_2 < t < \frac{T}{2} \ : u_R = -E \cos \omega t$$

Les instants $t_1$ et $t_2$ correspondent à des conditions de fonctionnement particulières.

En se référant au signal de la figure 2, au temps $t_1$ on a : $i = i_R + i_C = 0$

$$\Rightarrow \frac{E}{R} \cos \omega t_1 - \omega CE \sin \omega t_1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\sin \omega t_1}{\cos \omega t_1} = \frac{1}{RC\omega} \Rightarrow \tan \omega t_1 = \frac{1}{RC\omega}$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)}{\omega}$$

Ceci montre que $t_1$ dépend de R, C et ω et est indépendant de E.

Au temps $t_2$ on a l'équation suivante :

$$E \cos \omega t_1 \exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right) = -E \cos \omega t_2$$

Cette équation ne peut être résolue de manière analytique. Seule une solution numérique est envisageable. Une méthode par dichotomie parait tout à fait indiquée car on connaît, à priori, un encadrement de la solution qui doit être comprise entre 5 et 10 ms.

La tension résiduelle est périodique, sa période est T/2 = 10 ms. Cette forme de tension répond aux conditions de Dirichlet et peut donc être décomposée en série de Fourier.

$$e(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

$A_0$ est la valeur moyenne du signal périodique e(t). $A_n$ et $B_n$ sont les coefficients de la série de Fourier.

On représente chaque harmonique par un segment de hauteur $C_n$, telle que $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$. Le calcul des différentes raies du spectre sera fait numériquement à partir des expressions des coefficients des termes de la série de Fourier. Pour cette raison, les expressions littérales des $A_n$ et $B_n$ ne seront pas simplifiées outre mesure ; elles seront directement introduites dans l'écriture des formules de calcul du tableur utilisé.

Cependant cette fonction ne présentant aucune symétrie, il n'y a pas de simplification possible pour le calcul des coefficients $A_n$ et $B_n$.

Durant la période de 0 à T/2, on distingue les trois intervalles cités plus haut. Les termes $A_n$ et $B_n$ sont donc, chacun, la somme de trois termes provenant d'une intégrale dans chaque intervalle. Il en est de même pour $A_0$.

$$A_0 = A_{01} + A_{02} + A_{03}$$

$$A_n = A_{n1} + A_{n2} + A_{n3} \qquad \text{et} \qquad B_n = B_{n1} + B_{n2} + B_{n3}$$

$$A_{01} = \frac{1}{T/2} \int_0^{t_1} E \cos \omega t \, dt = \frac{E}{\pi} \sin \omega t_1$$

$$A_{02} = \frac{1}{T/2} \int_{t_1}^{t_2} E \cos \omega t_1 \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau}\right) dt = \frac{2E}{T} \tau \cos \omega t_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right)\right]$$

$$A_{03} = \frac{1}{T/2} \int_{t_2}^{T/2} -E \cos \omega t \, dt = \frac{E}{\pi} \sin \omega t_2$$

Le signal que nous étudions est décrit par la pulsation du secteur, mais à cause du redressement **bi-alternance**, nous calculons les coefficients avec une fréquence fondamentale double (cos 2nωt pour les $A_n$ et sin 2nωt pour les $B_n$).

$$A_{n1} = \frac{2}{T/2}\int_0^{t_1} E\cos\omega t\cos 2n\omega t\,dt = \frac{E}{\pi}\left[\frac{\sin\omega t_1(1+2n)}{(1+2n)} + \frac{\sin\omega t_1(1-2n)}{(1-2n)}\right]$$

$$A_{n2} = \frac{2}{T/2}\int_{t_1}^{t_2} E\cos\omega t_1\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)\cos 2n\omega t\,dt$$

$$A_{n2} = \frac{4E}{T}\cos\omega t_1\left[\exp\left(-\frac{t_2-t_1}{\tau}\right)\frac{\left(-\frac{1}{\tau}\cos 2n\omega t_2 + 2n\omega\sin 2n\omega t_2\right)}{\frac{1}{\tau^2}+(2n\omega)^2} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - \frac{\left(-\frac{1}{\tau}\cos 2n\omega t_1 + 2n\omega\sin 2n\omega t_1\right)}{\frac{1}{\tau^2}+(2n\omega)^2}\right]$$

$$A_{n3} = \frac{2}{T/2}\int_{t_2}^{T/2} -E\cos\omega t\cos 2n\omega t\,dt = \frac{E}{\pi}\left[\frac{\sin\omega t_2(1+2n)}{(1+2n)} + \frac{\sin\omega t_2(1-2n)}{(1-2n)}\right]$$

$$B_{n1} = \frac{2}{T/2}\int_0^{t_1} E\cos\omega t\sin 2n\omega t\,dt = \frac{E}{\pi}\left[\frac{4n}{4n^2-1} - \frac{\cos\omega t_1(2n-1)}{2n-1} - \frac{\cos\omega t_1(2n+1)}{2n+1}\right]$$

$$B_{n2} = \frac{2}{T/2}\int_{t_1} E\cos\omega t_1\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)\sin 2n\omega t\,dt$$

$$B_{n2} = \frac{4E}{T}\cos\omega t_1\left[\exp\left(-\frac{t_2-t_1}{\tau}\right)\frac{\left(-\frac{1}{\tau}\sin 2n\omega t_2 + 2n\omega\cos 2n\omega t_2\right)}{\frac{1}{\tau^2}+(2n\omega)^2} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{\frac{1}{\tau}\sin 2n\omega t_1 + 2n\omega\cos 2n\omega t_1}{\frac{1}{\tau^2}+(2n\omega)^2}\right]$$

$$B_{n3} = \frac{2}{T/2}\int_{t_2}^{T/2} - E \cos \omega t \sin 2n\omega t \, dt = -\frac{E}{\pi}\left[\frac{4n}{4n^2 - 1} + \frac{\cos \omega t_2(2n - 1)}{2n - 1} - \frac{\cos \omega t_2(2n + 1)}{2n + 1}\right]$$

Ainsi qu'il a été exposé plus haut, ces expressions seront utilisées directement dans le tableur. Nous utilisons le logiciel Excel de Microsoft (version 5).

La feuille de calcul se présente comme ci-dessous :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | E (V) : | 10 | | a |
| | f (Hz) : | 50 | | b |
| | R (Ohms) : | 100 | | c |
| | C (Farad) : | 2,50E-04 | | d |
| | ω (rad/s) : | 314,1592654 | | T/2 |
| | tau : | 0,025 | | t2 lin |
| | Période T : | 0,02 | | |
| | t1 : | 0,000403116 | | |
| | t2 : | 0,0077 | | |
| | | **Courbe d'ondulation réelle** | | |
| | | | | |
| Temps (s) | Courbe1 | Courbe2 | Courbe3 | Temps inter |
| 0 | 10 | 10,08116698 | -10 | FAUX |
| 0,00005 | 9,99876632 | 10,06102479 | -9,9987663 | FAUX |
| 0,0001 | 9,9950656 | 10,04092285 | -9,9950656 | FAUX |
| 0,00015 | 9,98889875 | 10,02086108 | -9,9888987 | FAUX |
| 0,0002 | 9,98026728 | 10,00083938 | -9,9802673 | FAUX |

...

⋮

Les valeurs calculées dans ce tableau sont obtenues à l'aide de formules issues directement des expressions des $A_{n1}$, $A_{n2}$ et $A_{n3}$. A titre d'exemple, on donne l'expression de calcul de $A_{n2}$ :

```
=4*$C$2/$C$8*COS($C$6*$C$9) * (EXP(-($C$10-$C$9)/$C$7) *  (- 1/$C$7*
COS(2*$O15*$C$6*$C$10) + 2*$O15*$C$6 *
SIN(2*$O15*$C$6*$C$10))/(1/($C$7*$C$7) + (2*$O15*$C$6)*(2*$O15*$C$6)) -
(-1/$C$7*COS(2*$O15*$C$6*$C$9) +
2*$O15*$C$6*SIN(2*$O15*$C$6*$C$9))/(1/($C$7*$C$7) +
(2*$O15*$C$6)*(2*$O15*$C$6)))
```

Dans la feuille de calcul, le spectre de raies se traduit par une colonne de valeurs dont l'interprétation est facilitée par la représentation graphique obtenue grâce aux fonctionnalités graphiques du tableur.

On a représenté ci-dessous les spectres pour trois valeurs de capacités de filtrage, ainsi que celui de la tension redressée non-filtrée.

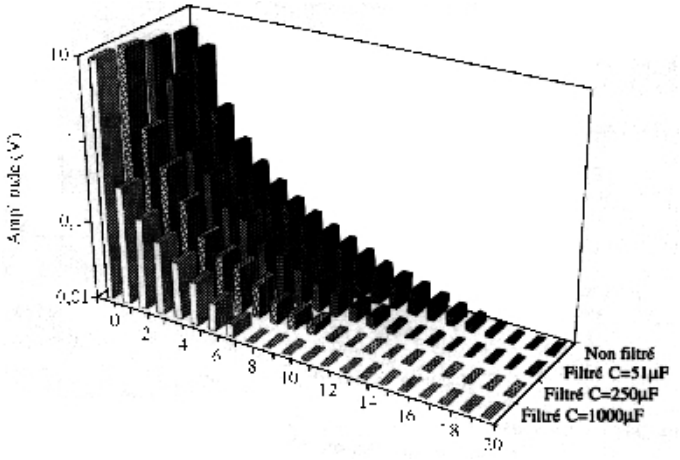


Fig 3 : Spectres de raies.

Dans toute cette analyse, la charge R reste constante et égale à 100 Ω.

On remarque ici que toutes les raies sont consécutives car chaque fréquence est un multiple de la fréquence du signal redressé (lui-même égal au double de la fréquence du secteur). Le choix d'un axe logarithmique pour la représentation de l'amplitude des raies permet une meilleure visualisation de l'effet du filtrage. Nous avons représenté comme nulle l'amplitude des raies inférieures à 0,01 volt.

En l'absence de filtrage, le spectre est très étendu. Au fur et à mesure de l'augmentation de la capacité de filtrage, on observe nettement que les raies diminuent en nombre et en amplitude. La première raie (de rang zéro) représente la valeur moyenne qui augmente avec la capacité, pour tendre vers la valeur maximum du signal après le pont redresseur.Cette valeur moyenne varie dans des proportions relativement faibles alors que les harmoniques sont rapidement atténués ; le rayonnement parasite que l'on pouvait craindre est peu important.

Le tracé de ces différents spectres a été possible, sans difficulté majeure, grâce à l'emploi du tableur et de l'interface graphique d'Excel. Un logiciel mathématique comme MatLab permettrait d'aboutir à des résultats comparables, mais son coût se trouve dans la décade supérieure. Il est aussi moins répandu dans le domaine de l'enseignement alors qu'Excel est nettement plus populaire.