EXEMPLES D'IDENTIFICATION DE SYSTEMES LINEAIRES

Michel KROB, IPEST

Dans ce document, nous nous proposons d'identifier la fonction de transfert d'un système linéaire et invariant dans le temps (LIT) selon deux méthodes différentes : la première utilise la réponse impulsionnelle du système LIT, la seconde, sa réponse à un échelon, c'est à dire sa réponse indicielle. Plus précisément, nous allons tirer partie des relations qui lient la fonction de transfert du système à la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle, et à la transformée de Fourier de sa réponse indicielle. Les systèmes LIT que nous avons choisis d'étudier, sont d'une part un filtre passe-bas du premier ordre, et d'autre part un filtre passe-bande du second ordre.

1. Position du problème

Considérons un système, noté $\mathcal{S}$, linéaire et invariant dans le temps [6]. Appelons $x(t)$ son entrée et $y(t)$ sa sortie. Alors, il existe une fonction $h(\cdot)$, appelée réponse impulsionnelle du système $\mathcal{S}$, telle que la relation entrée-sortie de $\mathcal{S}$ soit la suivante :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)d\theta$$

En prenant la transformée de Fourier de cette relation de convolution, il vient :

$$Y(jw) = H(jw)X(jw)$$

où $X(jw)$, $Y(jw)$ et $H(jw)$ désignent respectivement les transformées de Fourier de $x(t)$, $y(t)$ et $h(t)$; la fonction $H(jw)$ appelée classiquement fonction de transfert du système $\mathcal{S}$, est donc définie par :

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-jwt)dt$$

où la pulsation w est reliée à la fréquence f par $w = 2\pi f$.

Dans cet article, nous nous proposons d'identifier la fonction de transfert $H(jw)$ de systèmes LIT à l'aide de leur réponse impulsionnelle et indicielle. Tout d'abord, précisons que les systèmes sur lesquels nous allons travailler, sont physiquement réalisables, c'est à dire que $y(\cdot)$ à un instant t ne peut pas dépendre de $x(\cdot)$ à des instants postérieurs à t : ainsi $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Si l'on suppose de plus que $x(t) = 0$ pour $t < 0$, la relation entrée-sortie se simplifie en :

$$y(t) = \int_0^t h(\theta)x(t-\theta)d\theta$$

Précisons les deux manières que nous allons utiliser pour identifier $H(jw)$:

1. La réponse impulsionnelle $h(t)$ est obtenue à la sortie du système $\mathcal{S}$ en l'excitant par la distribution de Dirac $x(t) = \delta(t)$; il suffit d'en calculer la transformée de Fourier (notée désormais TF) pour obtenir $H(jw)$:

$$H(jw) = TF(\text{réponse impulsionnelle}) \tag{1.1}$$

2. En excitant le système par l'échelon d'Heaviside $x(t) = u(t)$ défini par $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$, nous obtenons pour $t \geq 0$:

$$y(t) = \int_0^t h(\theta)d\theta$$

La réponse indicielle est donc l'intégrale de la réponse impulsionnelle. Si $y(+\infty) = H(0) = 0$, cette relation se traduit dans le domaine des fréquences par :

$$Y(jw) = \frac{1}{jw}H(jw)$$

Sous cette condition, l'identification pourra alors se faire par :

$$H(jw) = jw\ TF(\text{réponse indicielle}) \tag{1.2}$$

Les relations (1.1) et (1.2) induisent deux moyens théoriques d'identifier $H(jw)$. Expérimentalement, nous procéderons selon le protocole suivant :

- excitation du système par l'entrée $x(t)$ appropriée (Dirac ou échelon).
- échantillonnage régulier de la sortie $y(t)$ à la période T_e et acquisition de N échantillons $\{y(t_k)\}_{k=0,...,N-1}$ sur calculateur.
- estimation sur calculateur de la TF de $y(t)$ à partir de ses échantillons et utilisation des relations (1.1) ou (1.2) selon l'entrée utilisée.

Des problèmes expérimentaux vont alors se poser :

- Comment utiliser (1.1) alors que la distribution de Dirac $\delta(t)$ est physiquement irréalisable ?
- Sur quelle durée observer $y(t)$ et à quelle fréquence l'échantillonner sachant que $y(t)$ est un signal transitoire à support spectral non borné ?
- Comment faire pour estimer au mieux la TF de la sortie du système ?

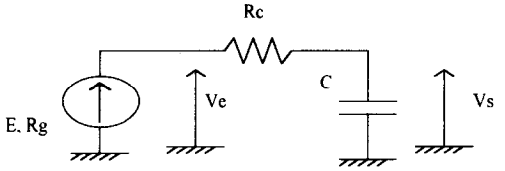
Pour l'instant, indiquons simplement que pour estimer la TF de $y(t)$, nous nous servirons de la transformée de Fourier discrète [2] (notée désormais TFD) de la séquence des N échantillons $\{y(t_k)\}_{k=0,...,N-1}$; cette TFD, notée $\widehat{Y}(.)$, est définie pour les N pulsations $\frac{2\pi n}{NT_e}$, $n = 0, ..., N-1$, par :

$$\widehat{Y}(j\frac{2\pi n}{NT_e}) = T_e \sum_{k=0}^{N-1} y(t_k)\exp(-j\frac{2\pi nkT_e}{NT_e}) \tag{1.3}$$

et présente la symétie hermitienne suivante $\widehat{Y}(j\frac{2\pi n}{NT_e}) = \widehat{Y}^*(j\frac{2\pi(N-n)}{NT_e})$ en raison du caractère réel des signaux $y(t)$ étudiés.
Enfin, le matériel utilisé est le suivant : oscilloscope *HP54603B*, module de mesure *HP54657A* connecté sur un ordinateur ; l'acquisition des données se fait par le logiciel *BenchLink Scope* et leur traitement numérique sous *Matlab*.

2. Filtre du premier ordre : la cellule R-C

Nous nous proposons d'identifier la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre à l'aide de sa réponse impulsionnelle selon (1.1). Considérons le filtre réalisé par la cellule R-C suivante :



avec $R_C = 9950\ \Omega$, $C = 10\ nF$, et un GBF de f.e.m. $E(t)$ et de résistance interne $R_g = 50\ \Omega$; ainsi, la résistance totale du circuit notée R vaut $10\ k\Omega$. L'entrée de notre filtre à laquelle nous n'avons pas directement accès, est $E(t)$, et sa sortie la tension $V_S(t)$ indiquée sur le schéma. La constante de temps τ du circuit et la fréquence de coupure f_C du circuit valent donc :

$$\tau = RC = 100\ \mu s \text{ et } f_C = \frac{1}{2\pi RC} = 1,59\ kHz$$

la précision des composants utilisés, entraine une incertitude relative de 2 % sur ces valeurs données.

2.1. Obtention de la réponse impulsionnelle

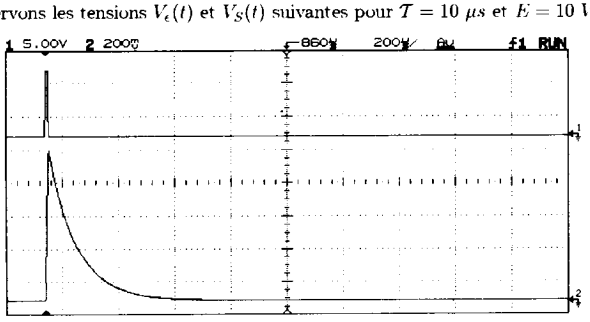
La réponse impulsionnelle de ce circuit vaut

$$h(t) = \frac{1}{RC}\exp(-\frac{t}{RC})u(t)$$

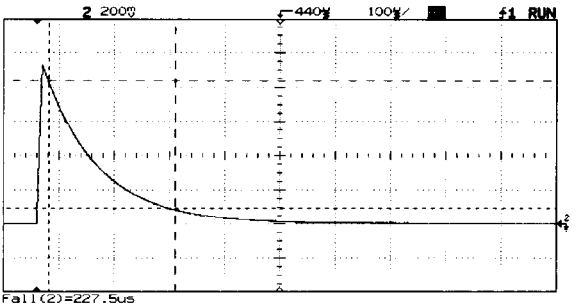
où $u(t)$ désigne l'échelon de Heaviside.

2.1.1. Partie expérimentale

Nous pensons obtenir une bonne approximation de $h(t)$ en excitant le circuit par une "impulsion" rectangulaire $E(t)$ de largeur $\mathcal{T}$ et d'amplitude E. Nous observons les tensions $V_e(t)$ et $V_S(t)$ suivantes pour $\mathcal{T} = 10\ \mu s$ et $E = 10\ V$:



L'allure obtenue est bien celle d'une exponentielle décroissante dont la constante de temps se détermine lors de la mesure suivante :



Nous mesurons un temps de passage de 90% à 10% valant $227,5 \pm 1\ \mu s$, soit une constante de temps du circuit valant $\tau_{\text{exp}} = 103,5\ \mu s \pm 0,5\ \mu s$.

2.1.2. Commentaires

Comment choisir les paramètres de l'impulsion $E(t)$ pour que la sortie $V_S(t)$ soit la plus proche possible de la réponse impulsionnelle théorique ? Il est naturellement impossible d'exciter le filtre par la distribution de Dirac $\delta(t)$ qui est physiquement irréalisable, mais uniquement par une impulsion rectangulaire de largeur $\mathcal{T}$ non nulle et d'amplitude E finie. En supposant que l'impulsion commence à $t = 0$, la réponse $V_S(t)$ du circuit vaut donc

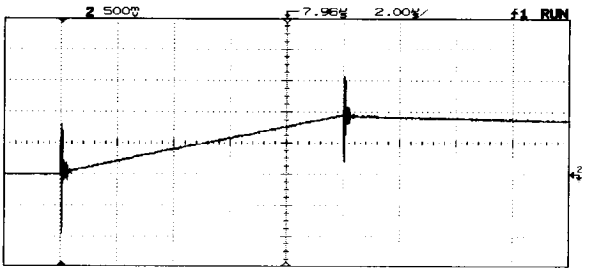
$$\begin{array}{ll} \text{pour } 0 \leq t \leq \mathcal{T}\ , & V_S(t) = E\,(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) \\ \text{pour } t \geq \mathcal{T}\ , & V_S(t) = E\left(1 - \exp(-\frac{\mathcal{T}}{\tau})\right)\exp(-\frac{t-\mathcal{T}}{\tau}) \end{array}$$

Ainsi, quelque soit la valeur de $\mathcal{T}$ par rapport $\tau = RC$, dès que $t \geq \mathcal{T}$, la décroissance de $V_S(t)$ nous permet d'estimer τ. Cependant, pour que l'allure globale de $V_S(t)$ corresponde du mieux possible à celle de $h(t) = \frac{1}{RC}\exp(-\frac{t}{RC})u(t)$ pour $t \in [-\infty; +\infty]$, il faut évidemment que la largeur $\mathcal{T}$ de l'impulsion soit très faible devant la constante de temps $\tau = RC$ du circuit. Donc si $\mathcal{T} \ll \tau$, nous obtenons :

$$V_S(t) = \frac{\mathcal{T}\ E}{\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})u(t) = \mathcal{T}\ E\ h(t) \tag{2.1}$$

Or, comme nous travaillons à amplitude E du GBF fixée (et maximale) et non pas à produit $\mathcal{T}\ E$ constant, plus $\mathcal{T}$ est faible devant τ, plus le signal de sortie $V_S(t)$ est faible et plus les mesures seront affectées par un mauvais rapport signal sur bruit. Donc, un compromis doit être fait entre qualité de l'impulsion et rapport signal sur bruit, c'est pourquoi nous avons pris une largeur $\mathcal{T} = 10\ \mu s < \tau = 100\ \mu s$ pour avoir une sortie d'amplitude suffisante pour les développements que nous allons faire dans la suite.

Par ailleurs, signalons que la tension $V_S(t)$ présente des sur-oscillations aux instants correspondant au début ($t = 0$) et à la fin de l'impulsion ($t = \mathcal{T}$) :



rendant peu fiables les échantillons de $V_S(t)$ pris au voisinage de $t = 0$ et $t = T$.

2.2. Identification de la fonction de transfert

La fonction de transfert du circuit vaut :

$$H(jw) = \frac{1}{1 + jRCw}$$

Nous allons utiliser la réponse $V_S(t)$ du circuit à l'impulsion rectangulaire du paragraphe précédent pour identifier $H(jw)$ suivant la méthode de la réponse impulsionnelle. Notons $\{V_S(t_k)\}_{k=0,\ldots,N-1}$ les N échantillons de $V_S(t)$ obtenus par son échantillonnage régulier à la période T_e. L'exploitation de (1.1) conduit alors à :

$$\breve{H}\left(j2\pi\frac{n}{NT_e}\right) = \frac{1}{ET}\exp\left(-j\frac{\pi n}{N}\right)T_e\sum_{k=0}^{N-1} V_S(t_k)\exp\left(-j\frac{2\pi nkT_e}{NT_e}\right) \qquad (2.2)$$

où $\breve{H}\left(j2\pi\frac{n}{NT_e}\right)$ est la fonction de transfert estimée à la pulsation $\frac{2\pi n}{NT_e}$. Dans cette expression, nous reconnaissons la TFD des N échantillons $\{V_S(t_k)\}_{k=0,\ldots,N-1}$ (cf (1.3)), un coefficient multiplicatif $\frac{1}{ET}$ résultant de (2.1) et un facteur correctif de phase $\exp(-j\frac{\pi n}{N})$ que nous justifierons dans la section 4.2 à la fin de l'article.

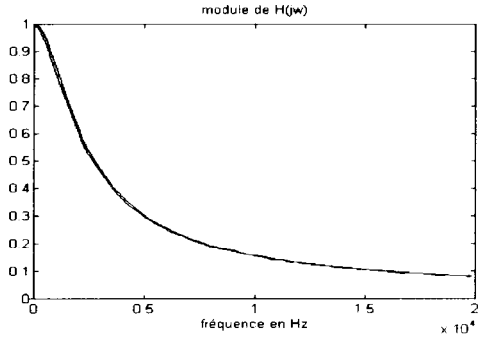
2.2.1. Partie expérimentale

Le début du fichier des $N = 2000$ échantillons de $V_S(t)$ que nous récupérons par *BenchLink Scope* via le module de mesure *HP54657A*, se présente sous la forme suivante :

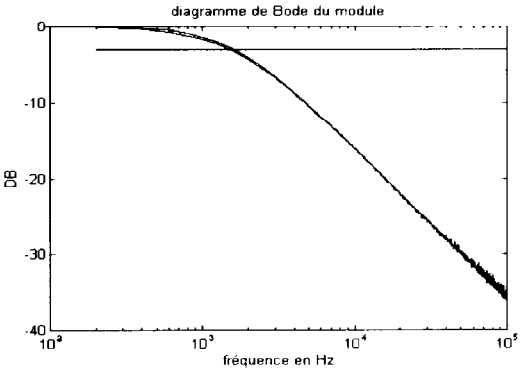
+0,000000E+00	+0,000000E+00
+2,500000E-06	+1,375000E-01
+5,000000E-06	+3,625000E-01
+7,500000E-06	+6,000000E-01
+1,000000E-05	+8,187500E-01
+1,250000E-05	+9,187500E-01
+1,500000E-05	+9,000000E-01

La première colonne donne les instants d'échantillonnage t_k (ici $T_\epsilon = 2,5\ \mu s$) en seconde, et la deuxième colonne les valeurs de $V_S(t_k)$ en $Volt$. Nous notons bien dans ce tableau de valeurs la croissance de V_S pour $[0;\mathcal{T}]$ et sa décroissance pour $t > \mathcal{T}$. La valeur de V_S pour $t = \mathcal{T}$ n'est pas fiable en raison des sur-oscillations constatées précédemment.

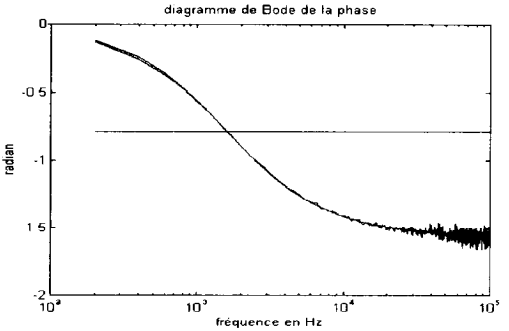
La programmation de la relation (2.2) est faite sous *Matlab* et se trouve précisément dans la section 4.3 ; le programme trace le module de $\breve{H}$ (.) en fonction de la fréquence, les diagrammes de Bode de $\breve{H}$ (.) en module et en phase, et le diagramme de Nyquist de $\breve{H}$ (.). Donnons les résultats obtenus en faisant apparaître sur tous les graphes les courbes expérimentales et théoriques. Tout d'abord le tracé du module de la fonction de transfert en échelle linéaire



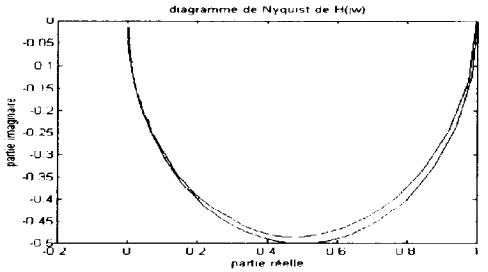
Puis le diagramme de Bode du module de la fonction de transfert sur lequel nous faisons également figurer la droite horizontale située à $-3dB$:



Ensuite le diagramme de Bode de la phase de la fonction de transfert sur lequel nous faisons également figurer la droite horizontale située à $-\pi/4$:



Enfin, le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert :



2.2.2. Commentaires

Ces résultats concordent très bien avec les courbes théoriques. Précisons que l'échantillonnage et le nombre de points ($T_e = 2,5\ \mu s$ et $N = 2000$) imposent une résolution fréquentielle égale à $1/(NT_e) = 200\ Hz$, ce qui explique que les diagrammes de Bode commencent à la fréquence 200 Hz contrairement au diagramme de Nyquist.

- l'allure de $\left|\tilde{H}\ (jw)\right|$ en fonction de w est correcte, ainsi que le diagramme de Bode de $\left|\tilde{H}\ (jw)\right|$ qui présente bien une pente de $-20\ dB/décade$, et une fréquence de coupure à $-3dB$ voisine de $1,6\ kHz$.
- le phase de $\tilde{H}\ (jw)$ évolue bien entre 0 et environ $-\frac{\pi}{2}$ sur une plage de fréquence allant de 200 Hz à 40 kHz , avec une valeur de $-\frac{\pi}{4}$ pour une fréquence voisine de $1,6\ kHz$.

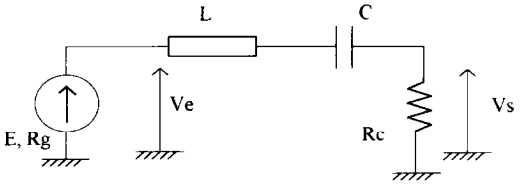
Comme le suggère la propriété de symétrie hermitienne de la TFD d'une séquence d'échantillons réels rappelée dans la section 1.1, la relation (2.2) ne doit etre

utilisée que pour les pulsations $2\pi\frac{n}{NT_e}$ avec $n = 0, .., N/2$: le domaine fréquentiel exploré est donc l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2T_e}\right]$, c'est à dire $[0; 200kHz]$. Cependant, en raison du phénomène de recouvrement spectral lié à l'impossibilité de pouvoir échantillonner sans perte d'information un signal dont le support spectral n'est pas borné (comme c'est ici le cas pour la réponse impulsionnelle du système), les valeurs de $\tilde{H}$ (.) estimées au voisinage de $\frac{1}{2T_e}$ ne seront pas significatives. Naturellement, il est possible de faire en sorte de repousser cette limitation à une fréquence plus haute en diminuant la période d'échantillonnage T_e tout prenant garde à maintenir NT_e constant afin de conserver la même résolution fréquentielle. Ces problèmes seront discutés précisement dans la section 4.1.

Enfin, afin d'obtenir une allure correcte de la phase de $H(ju)$, nous avons du introduire le terme correctif $\exp(-j\frac{\pi n}{N})$ dans (2.2). Cette correction et sa nécessité qui seront précisées dans la section 4.2, résultent de l'existence d'une position optimale des instants d'échantillonnage t_k pour l'estimation de la TF de la réponse impulsionnelle.

3. Filtre du second ordre : le circuit R-L-C série

Nous nous proposons d'identifier la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre à l'aide tout d'abord de sa réponse impulsionnelle selon (1.1), puis de sa réponse indicielle selon (1.2). Considérons le filtre réalisé par la cellule RLC suivante :



avec $R_C = 43\ \Omega$, $C = 0,40\ \mu F$, une bobine telle que $L = 36\ mH$ et $R_L = 7\ \Omega$ et un GBF de f.e.m. $E(t)$ ayant une résistance interne $R_g = 50\ \Omega$: ainsi, la résistance totale R du circuit complet est donc 100 Ω. L'entrée de notre filtre à laquelle nous n'avons pas directement accès, est $E(t)$, et sa sortie la tension $V_S(t)$ indiquée sur le schéma. La fréquence de résonnance et le facteur de qualité de ce circuit valent :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,32\ kHz \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 3,0$$

la précision des composants entraine une incertitude relative de 3 % sur ces résultats. Donnons également la pseudo-période et le décrément logarithmique qui vont nous être utile par la suite ($w_0 = 2\pi\ f_0$) :

$$T_{PP} = \frac{2\pi}{w_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = 765\ \mu s \text{ et } \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = 1,06$$

3.1. Obtention de la réponse impulsionnelle

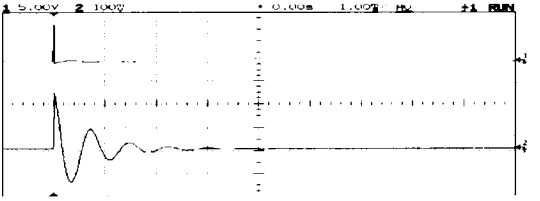
Pour $Q > 1/2$, la réponse impulsionnelle du circuit vaut :

$$h(t) = \frac{R_C}{R}\frac{2w_0}{\sqrt{4Q^2-1}}\exp(-\frac{t}{\tau})\cos\left[\Omega t + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\right)\right]u(t)$$

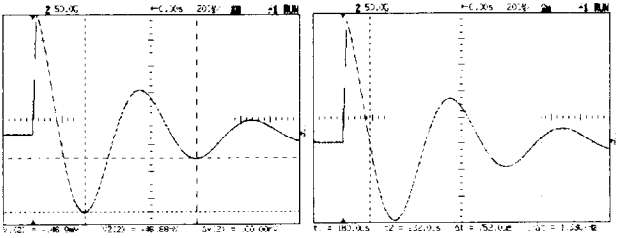
où $u(t)$ est la fonction de Heaviside, $\tau = \frac{2Q}{w_0}$ et $\Omega = \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}w_0$.

3.1.1. Partie expérimentale

Nous pensons obtenir une bonne approximation de $h(t)$ en excitant le circuit par une "impulsion" rectangulaire $E(t)$ de largeur $\mathcal{T}$ et d'amplitude E. Nous observons les tensions $V_e(t)$ et $V_S(t)$ suivantes pour $\mathcal{T} = 20\ \mu s$ et $E = 10\ V$:



L'allure de la tension de sortie est bien celle de la réponse impulsionnelle théorique dont on note la discontinuité à l'origine. Mesurons la pseudo-période et le décrément logarithmique de cette courbe :



Nous relevons une pseudo-période de 752 μs et un décrément logarithmique de 1.13 , ce qui conduit à :

$$\widehat{Q} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2} = 2.82 \text{ et } \widehat{f}_0 = \frac{\delta}{2\pi T_{PP}}\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2} = 1351\ Hz$$

la fréquence de resonnance estimée est donc satisfaisante (moins de 2 % d'écart relatif) , quant au coefficient de qualité qui est toujours délicat à estimer en raison de l'imprécision des mesures du décrément logarithmique, nous relevons une différence relative de 6 % entre valeurs théoriques et expérimentales.

3.1.2. Commentaires

Comment choisir les paramètres de l'impulsion $E(t)$ pour que la sortie $V_S(t)$ soit la plus proche possible de la réponse impulsionnelle théorique ? Comme pour le filtre du premier ordre, nous essayons de travailler avec une largeur d'impulsion $\mathcal{T}$ faible devant τ et $2\pi/\Omega$ tout en conservant un niveau suffisamment fort de signal de sortie. En effet, en notant $U_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur, le circuit vérifie l'équation pour $t \in [0;\mathcal{T}]$:

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{w_0}{Q}\frac{dU_C}{dt} + w_0^2 U_C = w_0^2 E$$

avec $V_S(t) = R_C\, C\, \frac{dU_C}{dt}$. En tenant compte des conditions initiales, c'est à dire $V_S(0) = 0 = U_C(0)$, nous obtenons pour $t \in [0;\mathcal{T}]$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} V_S(t) &= \tfrac{1}{\Omega} R_C C E w_0^2 \sin(\Omega t)\exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right) \\ U_C(t) &= E\left[1 - \exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right)\left(\cos(\Omega t) + \tfrac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)\right] \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{T} \ll \tau$ et $\mathcal{T} \ll 2\pi/\Omega$, nous déduisons les valeurs de V_S et U_C en $t = \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} V_S(\mathcal{T}) &= R_C C E w_0^2 \mathcal{T} \\ U_C(\mathcal{T}) &= E\left[1 - \left(1 - \tfrac{\mathcal{T}}{\tau} + \tfrac{\mathcal{T}^2}{2\tau^2}\right)\left[1 - \tfrac{\Omega^2}{2}\mathcal{T}^2 + \tfrac{\mathcal{T}}{\tau}\right]\right] = 2Q^2 E\left(\tfrac{\mathcal{T}}{\tau}\right)^2 \end{aligned}$$

Enfin, pour $t \geq \mathcal{T}$, le circuit vérifie l'équation :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{w_0}{Q}\frac{dU_C}{dt} + w_0^2 U_C = 0$$

Pour simplifier, prenons l'origine des temps en $t = \mathcal{T}$, le circuit est alors en régime libre et satisfait à une solution du type $U_C(t) = A\exp(-\frac{t}{\tau})\cos(\Omega t + \varphi)$ où A et φ sont déterminées par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} U_C(0) &= A\cos\varphi = 2Q^2 E\left(\tfrac{\mathcal{T}}{\tau}\right)^2 \\ V_S(0) &= -R_C C A\left[\tfrac{1}{\tau}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right] = R_C C E w_0^2 \mathcal{T} \end{aligned}$$

ce qui entraine :

$$\tan\varphi = -\left(\frac{2}{\Omega\mathcal{T}} + \frac{1}{\Omega\tau}\right) \text{ et } A = \frac{E w_0^2 \mathcal{T}}{\Omega}$$

Comme $\mathcal{T} \ll 2\pi/\Omega$, φ est proche de $-\pi/2$; posons $\varphi = \varphi_0 - \pi/2$. Finalement, pour $t \geq \mathcal{T}$, nous obtenons $U_C(t) = \frac{E w_0^2 \mathcal{T}}{\Omega}\exp(-\frac{t}{\tau})\sin(\Omega t + \varphi_0)$ et

$$\begin{aligned} V_S(t) &= R_C C\frac{dU_C}{dt} = \frac{R_C C E w_0^2 \mathcal{T}}{\Omega}\exp(-\frac{t}{\tau})\left(\Omega\cos(\Omega t + \varphi_0) - \frac{1}{\tau}\sin(\Omega t + \varphi_0)\right) \\ &= \frac{R_C C E w_0^2 \mathcal{T}}{\Omega}\sqrt{\Omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}\exp(-\frac{t}{\tau})\cos\left(\Omega t + \arctan(\frac{1}{\Omega\tau}) + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

soit en remarquant que $\frac{1}{\Omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}$ et $Q = 1/RCw_0$:

$$V_S(t) = \frac{R_C E\mathcal{T}}{R}\frac{2w_0}{\sqrt{4Q^2-1}}\exp(-\frac{t}{\tau})\cos\left(\Omega t + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\right) + \varphi_0\right) \tag{3.1}$$

Donc si $\mathcal{T} \ll \tau$ et $\mathcal{T} \ll 2\pi/\Omega$, $V_S(t)$ correspond bien à un facteur multiplicatif près à la réponse impulsionnelle du circuit que ce soit au niveau de sa décroissance exponentielle et de sa pseudo-pulsation. Par contre, il n'en est pas de même au niveau de la phase à l'origine : pour nos valeurs expérimentales, c'est à dire $\mathcal{T} = 20\ \mu s \ll \tau = 730\ \mu s$, nous obtenons :

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\right) = 9,6^\circ \text{ et } \varphi_0 = 4,6^\circ$$

la phase rajoutée φ_0 est de même ordre de grandeur que la phase théorique, ce qui va nous poser problème pour l'obtention de la phase de $H(jw)$: ce déphasage supplémentaire conduit au meme effet qu'un décalage temporel.

3.2. Identification de la fonction de transfert

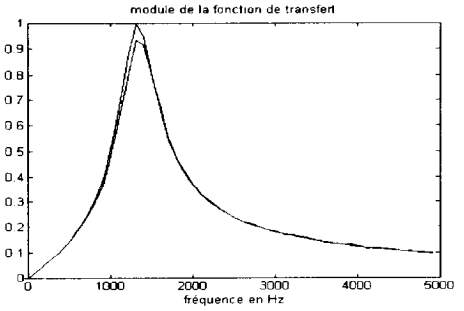
La fonction de transfert du circuit vaut :

$$H(jw) = \frac{R_C}{R}\frac{1}{1 + jQ\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right)}$$

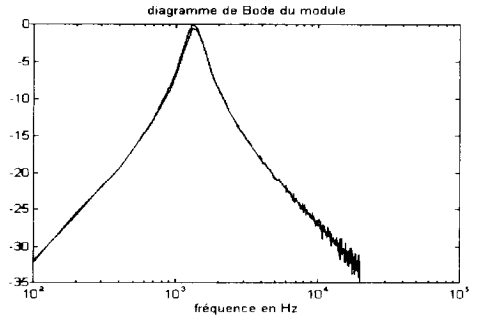
Nous reprenons la meme démarche que pour le filtre du premier ordre : l'exploitation de (1.1) conduit à la meme relation que (2.2) au coefficient multiplicatif près que l'on prend dans ce cas égal à $\frac{R}{R_C E\mathcal{T}}$ en raison de (3.1) (afin de déterminer la fonction de transfert ayant un module maximal égal à 1).

3.2.1. Partie expérimentale

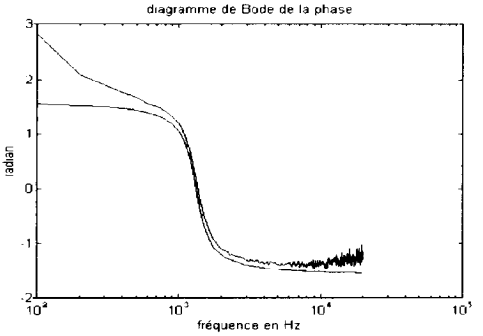
Donnons les résultats expérimentaux en faisant figurer sur chaque graphe, la courbe expérimentale et théorique. Tout d'abord, la courbe donnant le module de $\check{H}(jw)$ en fonction de w :



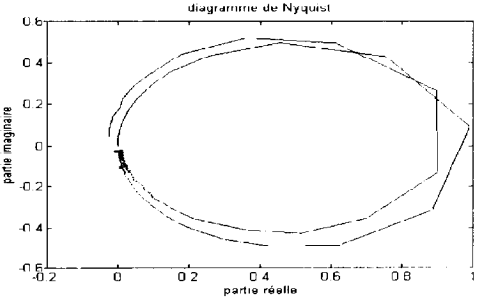
puis le diagramme de Bode du module de la fonction de transfert :



celui de la phase :



enfin le diagramme de Nyquist correspondant :



3.2.2. Commentaires

Nous constatons une bonne concordance entre les diagrammes représentant le module de la fonction de transfert avec une fréquence de résonnance proche de $1,3\ kHz$. Précisons que la période d'échantillonnage vaut $5\ \mu s$, et le nombre d'échantillon vaut $N = 2000$, ainsi la résolution fréquentielle sur ces graphes vaut $100\ Hz$.

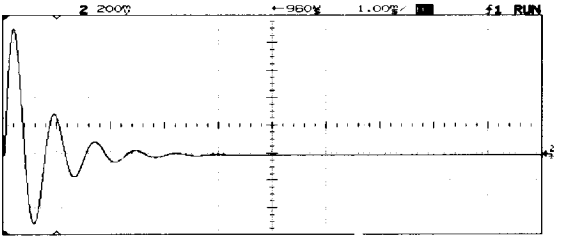
Cependant, il est manifeste que l'estimation de la phase est mauvaise malgré la présence du terme correctif $\exp(-j\frac{\pi n}{N})$: d'une part le positionnement de l'origine des temps est délicat, tout décalage entraînant de fortes variations sur l'estimation de la phase de $H(jw)$ et d'autre part le déphasage φ_0 présent dans l'expression de $V_S(t)$ affecte de manière similaire les résultats sur la phase ; nous y reviendrons de manière plus précise dans la section 4.2.

3.3. Réponse indicielle

En supposant le système initialement au repos, la réponse du circuit à un échelon $E\ u(t)$ vaut :

$$V_S(t) = \frac{2}{\sqrt{4Q^2-1}}\frac{R_C}{R}E\exp(\frac{-t}{\tau})\sin(\Omega t)u(t) \qquad (3.2)$$

Pour l'échelon d'amplitude $E = 8\ V$, nous obtenons la tension $V_S(t)$ suivante



3.3.1. Détermination de la fonction de transfert

Afin de déterminer la fonction de transfert ayant un module maximal égal à 1, la relation (1.2) se traduit ici en raison du facteur multiplicatif $\frac{R}{R_C \cdot E}$ apparaissant dans (3.2), par :

$$H(jw) = \frac{R}{R_C E}\ jw\ TF(V_S(t))$$

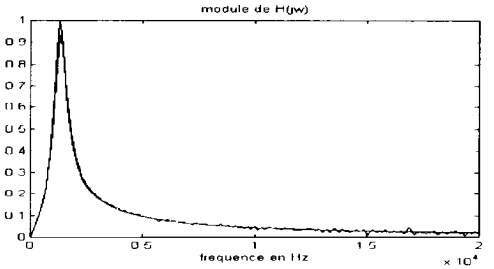
L'exploitation de cette relation pour estimer $H(jw)$ se traduit par :

$$\tilde{H}\ (j\frac{2\pi n}{NT_e}) = \frac{R}{R_C \cdot E}\ j\frac{2\pi n}{NT_e}\exp(-j\frac{\pi n}{N})\ T_e \sum_{k=0}^{N-1} V_S(t_k)\exp(-j\frac{2\pi nkT_e}{NT_e}) \qquad (3.3)$$

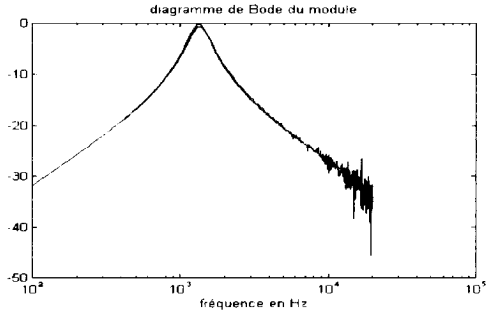
où l'on reconnait le terme correctif de phase $\exp(-j\frac{\pi n}{N})$.

3.3.2. Résultats expérimentaux

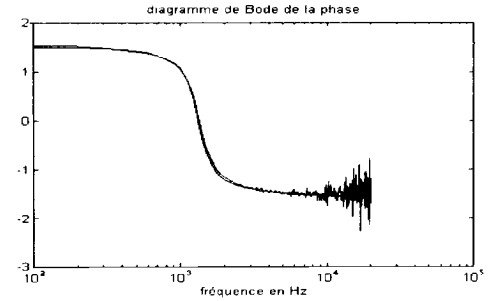
Donnons les résultats expérimentaux ; nous représentons sur le même graphe les diagrammes de Bode théoriques et expérimentaux. Tout d'abord, le module de la fonction de transfert en fonction de la fréquence :



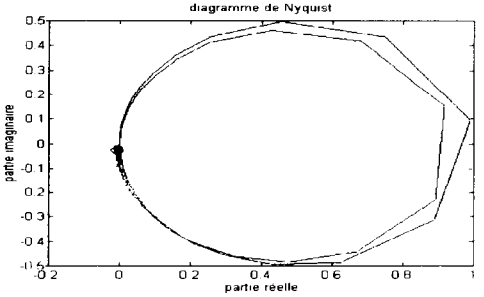
Ensuite, le diagramme du module de la fonction de transfert :



Puis, le diagramme de phase de la fonction de transfert :



Enfin, le diagramme de Nyquist :



3.4. Comparaison des méthodes

Nous notons une amélioration très sensible des résultats sur la phase. Les avantages de l'utilisation de la réponse indicielle pour identifier $H(jw)$ par rapport à la méthode de la réponse impulsionnelle, sont les suivants :

- la réponse indicielle théorique n'est pas discontinue à l'origine, ce qui nous évite des problèmes numériques d'estimation de sa TF cf section 4.
- la réponse indicielle a une amplitude beaucoup plus importante que la réponse du circuit à l'impulsion de la section 3.3.1.

Cependant, par construction, $\check{H}(jw)$ est le produit de la TFD de $V_S(t)$ par jw, donc cette méthode a le défaut d'amplifier les hautes fréquence de tout bruit blanc parasite s'additionnant à $V_S(t)$: nous nous en rendons compte expérimentalement sur les courbes pour les fréquences $\geq 10\ kHz$ [5].

4. Analyse spectrale de signaux transitoires

Dans les deux méthodes d'identification proposées, que l'entrée soit un Dirac ou un échelon, il nous faut estimer numériquement la transformée de Fourier de la sortie du filtre $y(t)$:

$$Y(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\exp(-jwt)dt \tag{4.1}$$

Or, $y(t)$ est un signal transitoire ($y(+\infty) = 0$), il est donc caractérisé par un intervalle de temps $\Delta = [0; T_{eff}]$ sur lequel il est effectivement non nul. Ainsi, pour estimer (4.1), nous allons réaliser un échantillonnage régulier de $y(t)$ à la période T_e sur un intervalle de temps $\Gamma = [0; NT_e]$ incluant Δ, pour obtenir une séquence de N échantillons $\{y(t_k)\}_{k=0,\ldots,N-1}$. A partir des N échantillons, la manière la plus simple d'estimer l'intégrale (4.1), est de calculer :

$$\overset{\circ}{Y}(jw) = T_e \sum_{k=0}^{N-1} y(t_k)\exp(-jwt_k) \tag{4.2}$$

pour diverses valeurs de la pulsation w. Mais plutôt que de programmer directement la relation (4.2), nous préférons utiliser la TFD de la séquence des N échantillons $\{y(t_k)\}_{k=0,..,N-1}$ définie pour $n = 0, .., N-1$, par :

$$\widehat{Y}(j2\pi\frac{n}{NT_e}) = T_e \sum_{k=0}^{N-1} y(t_k)\exp(-j\frac{2\pi nkT_e}{NT_e}) \tag{4.3}$$

Remarquons que si $w = \frac{2\pi n}{NT_e}$ et $t_k = kT_e$ pour $0 \leq k \leq N-1$, (4.2) est équivalent à (4.3). L'avantage de (4.3) par rapport à (4.2) résulte d'un gain en temps de calcul : si le nombre d'échantillons N est une puissance de 2, il est possible de calculer (4.3) par l'algorithme rapide de la FFT. Son désavantage par rapport à (4.2) est d'imposer la résolution fréquentielle, elle est égale à $\frac{1}{NT_e}$.

La question qui se pose maintenant est la suivante : comment bien choisir N, T_e et les instants t_k pour que (4.3) approxime convenablement (4.1) ?

4.1. Durée d'observation - période d'échantillonnage

L'utilisation de la TFD en (4.3) résulte d'un double échantillonnage du signal $y(t)$: l'un en temps à la période T_e, et l'autre en fréquence avec un pas en $\frac{1}{NT_e}$. Pour pouvoir conserver, par ce double échantillonnage, toutes les informations sur $y(t)$, il faudrait vérifier d'une part le théorème d'échantillonnage classique qui impose que $Y(jw)$ ait un support spectral limité, et d'autre part un théorème d'échantillonnage en fréquence, dual du précédent, qui impose que $y(t)$ ait une durée limitée. Or, il est rigoureusement impossible qu'un signal satisfasse à ces deux contraintes : un signal à durée limitée a un support spectral illimité (comme c'est le cas pour $y(t)$ à durée T_{eff} limitée) et réciproquement un signal à support spectral borné a une durée illimitée [1], [2], [4].

Cependant, pour les signaux $y(t)$ que nous avons étudiés, le module de $Y(jw)$ tend vers 0 quand $w \to +\infty$ et donc devient négligeable au-delà d'une certaine fréquence limite f_m. Nous pouvons donc considérer que le support spectral de $Y(jw)$ est limité par f_m sans risquer une trop grande perte d'information par échantillonnage. En conséquence, le théorème d'échantillonnage impose :

$$T_e \leq \frac{1}{2f_m} \tag{4.4}$$

Ainsi, nous avons pris la fréquence d'échantillonnage $1/T_e$ environ 200 plus grande que les fréquences de coupure à $-3\ dB$ des deux filtres.

Une fois T_e fixée, le choix du nombre d'échantillons N est équivalent à celui de la durée d'observation NT_e et est guidé par la recherche d'une résolution fréquentielle $\frac{1}{NT_e}$ satisfaisant au théorème d'échantillonnage en fréquence. Il est possible de montrer [4] que ce théorème est rigoureusement satisfait dans le cas de signaux transitoires, si :

$$\frac{1}{NT_e} \leq \frac{1}{2T_{eff}} \tag{4.5}$$

c'est à dire si la durée d'observation est au moins 2 fois plus grande que la durée effective de $y(t)$. Les résultats expérimentaux ont été satisfaisants pour

$NT_\epsilon \geq 3T_{eff}$ (en pratique, nous pourrions échantillonner $y(t)$ uniquement sur Δ, et rajouter au moins autant de 0 que d'échantillons non nuls de manière à avoir un nombre total d'échantillons égal à une puissance de 2).

Le respect des relations (4.4) et (4.5) conduisent nécessairement à une bonne estimation expérimentale du module de $H(jw)$ en assurant un recouvrement spectral très faible et une interpolation correcte entre les différentes valeurs de $\left|\tilde{H}\,(j\frac{2\pi n}{NT_\epsilon})\right|$. Par contre, une estimation correcte de la phase de $H(jw)$ nécessite en plus des précautions sur la position des instants d'échantillonnage.

4.2. Position des instants d'échantillonnage - estimation de la phase

Pour plus de précision sur ce problème d'estimation correcte de la phase, nous vous invitons à consulter la référence [3] ; donnons cependant quelques explications. Comme nous l'avons déjà dit, la manière la plus simple d'estimer (4.1) est d'utiliser (4.2). Par ailleurs, échantillonner $y(t)$ à la période T_ϵ sur l'intervalle $\Gamma = [0; NT_\epsilon]$ revient à définir N sous-intervalles $[iT_\epsilon; (i+1)T_\epsilon]$ dans lequel on prélève un échantillon. Or, il s'avère que pour éviter une sous-estimation ou une sur-estimation numérique de $Y(jw)$ en utilisant (4.2), il vaut mieux choisir les échantillons au milieu des sous-intervalles [2], c'est à dire aux instants $t_k = (k+1/2)T_\epsilon$:

$$\tilde{Y}\,(jw) = T_\epsilon \sum_{k=0}^{N-1} y((k+\frac{1}{2})T_\epsilon)\exp(-jw(k+\frac{1}{2})T_\epsilon) \tag{4.6}$$

Ainsi, la relation (4.6) constitue la meilleure manière d'estimer numériquement (4.1). Mais, nous avons déjà souligné l'intéret d'utiliser la TFD du (4.3) plutot qu'une relation du type (4.6) : or, si $t_k = (k+1/2)T_\epsilon$ pour $k = 0, ..., N-1$, $\tilde{Y}\,(j\frac{2\pi n}{NT_\epsilon})$ et $\hat{Y}(j\frac{2\pi n}{NT_\epsilon})$ sont reliées par :

$$\begin{aligned}\tilde{Y}\,(j\frac{2\pi n}{NT_\epsilon}) &= T_\epsilon \sum_{k=0}^{N-1} y((k+\frac{1}{2})T_\epsilon)\exp(-j\frac{2\pi n(k+\frac{1}{2})T_\epsilon}{NT_\epsilon}) \\ &= \exp(-j\frac{\pi n T_\epsilon}{NT_\epsilon})\cdot\hat{Y}(j\frac{2\pi n}{NT_\epsilon})\end{aligned} \tag{4.7}$$

Donc, nous obtenons la meilleure estimation de la phase à la pulsation $\frac{2\pi n}{NT_\epsilon}$ en multipliant la TFD de $y(t)$ à cette meme pulsation par $\exp(-j\frac{\pi n T_\epsilon}{NT_\epsilon})$ comme nous l'avons indiqué dans les relations (2.2) et (3.3).

Malheureusement, il n'est pas toujours possible de choisir les instants d'échantillonnage selon $t_k = (k+1/2)T_\epsilon$, $k = 0, .., N-1$, nous pouvons meme ignorer où t_0 se place dans $[0; T_\epsilon]$. Il peut en résulter des distorsions de phase irrémédiables comme le suggère le cas de la réponse impulsionnelle du circuit R-L-C. Cependant, plusieurs cas se présentent :

- la phase expérimentale du filtre passe-bas se corrige bien selon (4.7) : en effet, quelque soit l'instant t_0 où est prélevé le premier échantillon, à condition qu'il le soit dans le début de la partie décroissante de $V_S(t)$, la courbe apparait toujours comme la même exponentielle décroissante (à un faible facteur multiplicatif près) et donc on peut supposer que $t_0 = T_\epsilon/2$.

- la phase expérimentale du filtre passe-bande obtenue à l'aide de sa réponse indicielle, se corrige bien selon (4.7) car la réponse indicielle est très faible au voisinage de l'origine. Si l'on prend comme premier échantillon, la première valeur non nulle de $y(t)$, il suffit de corriger $\widehat{Y}(j\frac{2\pi n}{NT_e})$ en le multipliant par $\exp(-j\alpha\frac{\pi n T_e}{NT_e})$ où $\alpha \simeq 1$.
- enfin, la phase expérimentale du filtre passe-bande obtenue d'après (1.1), ne se peut pas se corriger selon (4.7) : l'impossibilité de réaliser $t_k = (k + 1/2)T_e$ est ici désastreuse car la réponse impulsionnelle est discontinue à l'origine et ne présente pas les bonnes propriétés d'une fonction exponentielle. De surcroît, la distorsion de phase est accentuée par φ_0.

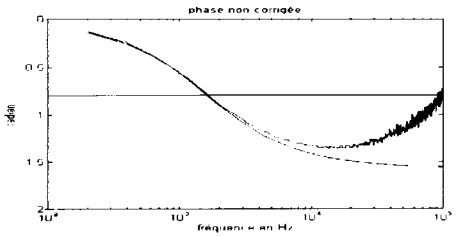
4.3. Programmation dans le cas du filtre passe-bas

Le programme est en *Matlab*. les données sont rangées dans un fichier noté *fichier.prn* :

load fichier.prn ↦ *charge les données pour Matlab*
a=fichier(:,2); ↦ *on ne garde que la deuxième colonne pour faire sa TFD*
N=size(a); ↦ *nombre d'échantillons enregistrés (= 2000)*
Te=fichier(2,1)-fichier(1,1) ↦ *calcul de la période d'échantillonnage*
for i=1:N
b(i)=(i-1)/(Te*N(1)); ↦ *échelle des fréquences*
v(i)=exp(-j*pi*(i-1)/N); ↦ *correction de phase*
end
p=(Te/(E*T))*v.'.*fft(a) ↦ *calcul de la TFD des données (phase corrigée)*
h=abs(p); ↦ *calcul du module de la TFD*
the=angle(p); ↦ *calcul de l'argument de la TFD*
plot(b(1:100),h(1:100)) ↦ *tracé du module de la fonction de transfert*
semilogx(b(1:100),20*log10(h(1:100))) ↦ *diagramme de Bode du module*
semilogx(b(1:100),the(1:100)) ↦ *diagramme de Bode de la phase*
plot(p)↦ *diagramme de Nyquist de la fonction de transfert*

4.4. Réponse impulsionnelle du filtre passe-bas

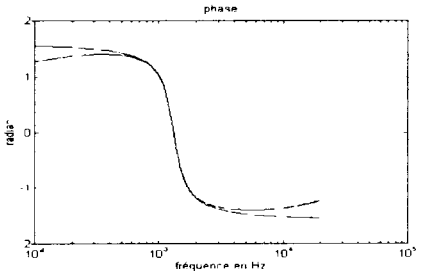
La courbe de phase indiquée en 2.2.1 est obtenue en prenant comme premier échantillon celui où commence la décroissance des échantillons ($t_0 = 12.5\ \mu s$). Sans la correction (4.7), nous aurions obtenu :



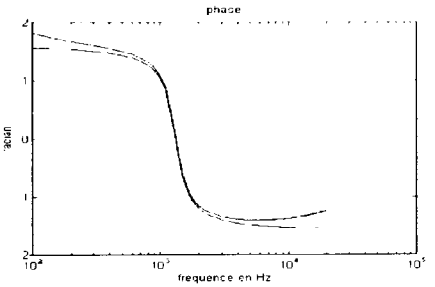
4.5. Réponse impulsionnelle du filtre passe-bande

Le problème de la distorsion de phase accentuée par déphasage supplémentaire φ_0 ne peut donc pas se résoudre selon (4.7). Donnons les résultats obtenus en calculant la TFD à partir des échantillons théoriques de $h(t)$ avec $T_\epsilon = 5\ \mu s$:

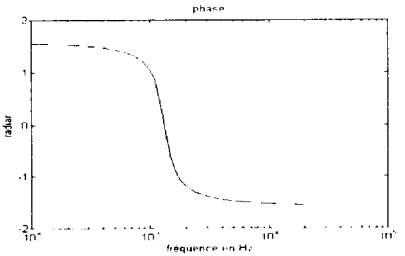
- Phase calculée avec $N = 2000$ échantillons $h(0), h(T_\epsilon), ..., h((N-1)T_\epsilon)$:



- Phase calculée avec $N = 2000$ échantillons $h(T_\epsilon), ..., h(NT_\epsilon)$:



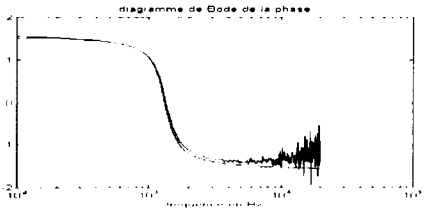
- Phase calculée avec $N = 2000$ échantillons $h(T_\epsilon/2)... h((N-1/2)T_\epsilon)$ et corrigée selon (4.7) :



Seule la séquence $\{h(T_\epsilon/2), h(3T_\epsilon/2), ..., h((N-1/2)T_\epsilon)\}$ permet donc d'estimer correctement la phase.

4.6. Réponse indicielle du filtre passe-bande

La courbe indiquée en 3.3.2 est obtenue en prenant comme premier échantillon celui correspondant à la première valeur non nulle de $V_S(t)$: la correction de phase effectuée est exactement celle de (4.7). Sans cette correction de phase, nous aurions obtenu :



5. Conclusion

Nous avons essayé de présenter quelques résultats concernant l'identification de systèmes linéaires invariants dans le temps à partir de leur réponse impulsionnelle et indicielle. Nous avons alors précisé les précautions à prendre pour l'analyse spectrale de ces signaux transitoires, c'est à dire l'estimation de leur TF. Nous remarquons qu'une fois ces précautions prises, les spectres d'amplitude et de phase estimés sont très satisfaisants et quasiment non biaisés: notons bien la différence par rapport à l'estimation du spectre d'un signal à durée illimitée (par exemple périodique) qui est, sauf cas particulier, biaisée par les inéluctables opérations de fenetrage. Signalons enfin l'existence d'autres méthodes d'identification telles que par exemple, les méthodes statistiques ou paramétriques.

6. Bibliographie

[1] F. de Coulomb	Théorie et traitement des signaux	Dunod
[2] M. Kunt	Traitement numérique des signaux	Dunod
[3] J.M. Lemasquerier	Calcul numérique de la transformée de Fourier	Sigma, Maroc
[4] J. Max	Méthodes et techniques de traitement du signal	Masson
[5] J.P. Norton	An introduction to identification	Acad. Press
[6] B. Picinbono	Théorie des signaux et des systèmes	Dunod

Remerciements

Nous remercions J.M. Lemasquerier pour ses remarques concernant ce travail.