

L'INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON - Quelques aspects théoriques et expérimentaux

Mots clés :

- Interférométrie
- Cohérence spatiale et temporelle
- Localisation

Résumé :

Dans cet article, nous étudions les différentes possibilités offertes par l'interféromètre de Michelson pour l'obtention de franges d'interférences non localisées ou localisées à distance finie ou localisées à l'infini. Ces notions sont introduites dans une première partie, à partir d'un interféromètre théorique ne comportant qu'une lame semi-réfléchissante d'épaisseur nulle. Dans une deuxième partie, nous étudions l'interféromètre réel avec lame séparatrice et lame compensatrice. Ce qui nous permet d'introduire les tolérances requises pour l'obtention de franges de bon contraste, en ce qui concerne les identités de ces deux lames, leurs qualités de surface et de parallélisme, ainsi que les qualités de planéité des miroirs. Cette partie nous permet également d'aborder les problèmes de chromatisme introduits par ces lames et leur traitement de surface. Enfin, la troisième partie aborde la cohérence temporelle, déjà traitée dans cette revue[†], partie dans laquelle nous proposons un certain nombre d'expériences comme dans la partie 1.

[†] BUP n°552, Fév.1973

TABLE DES MATIERES

Première partie : L'interféromètre théorique	18
I - Introduction	18
II - Calcul de la différence de marche	19
II - 1 La source est à distance finie	20
II - 2 La source est à l'infini	21
III Les différents types d'interférences observables	23
III - 1 Franges non localisée	23
III - 2 Franges localisées à une distance finie	24
III - 3 Franges localisées à l'infini	24
III - 4 Calcul de la visibilité des franges	25
III - 5 Résumé	26
IV Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air	26
IV - 1 La source est à distance finie	26
IV 1.1 Calcul de $\Delta 0$	26
IV 1.2 Influence de la largeur de la source	27
IV - 2 La source est à l'infini	30
IV 2.1 Calcul de $\Delta 0$	30
IV 2.2 Influence de la largeur de la source	30
IV - 3 Expériences avec l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air	32
V - Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air	32
V - 1 La source est à distance finie	32
V 1.1 Calcul de $\Delta 0$	32
V 1.2 Influence de la largeur de la source	33
V - 2 La source est à l'infini	35
V 2.1 Calcul de $\Delta 0$	35
V 2.2 Influence de la largeur de la source	35
V - 3 Expériences avec l'interféromètre de michelson réglé en lame d'air ²	37
Deuxième partie : l'interféromètre réel	38
I - Introduction	38
II - Nécessité d'une lame compensatrice	39
II - 1 Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air	39

II - 2 Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air	42
III - Tolérance de fabrication	43
III - 1 Qualité des miroirs	43
III - 2 Tolérance sur l'identité de l'épaisseur de la compensatrice et le séparatrice	44
III - 3 Effets des défauts de planéité et de parallélisme des faces	44
III 3.1 Planéité	44
III 3.2 Parallélisme des faces	44
IV - Réglage du parallélisme de la lame séparatrice et de la lame compensatrice : tolérance et réalisation	45
V - Etude de l'interféromètre de Michelson réel réglé en coin d'air	46

Troisième partie : Quelques notions sur la cohérence temporelle et son étude à l'aide de l'interféromètre de Michelson

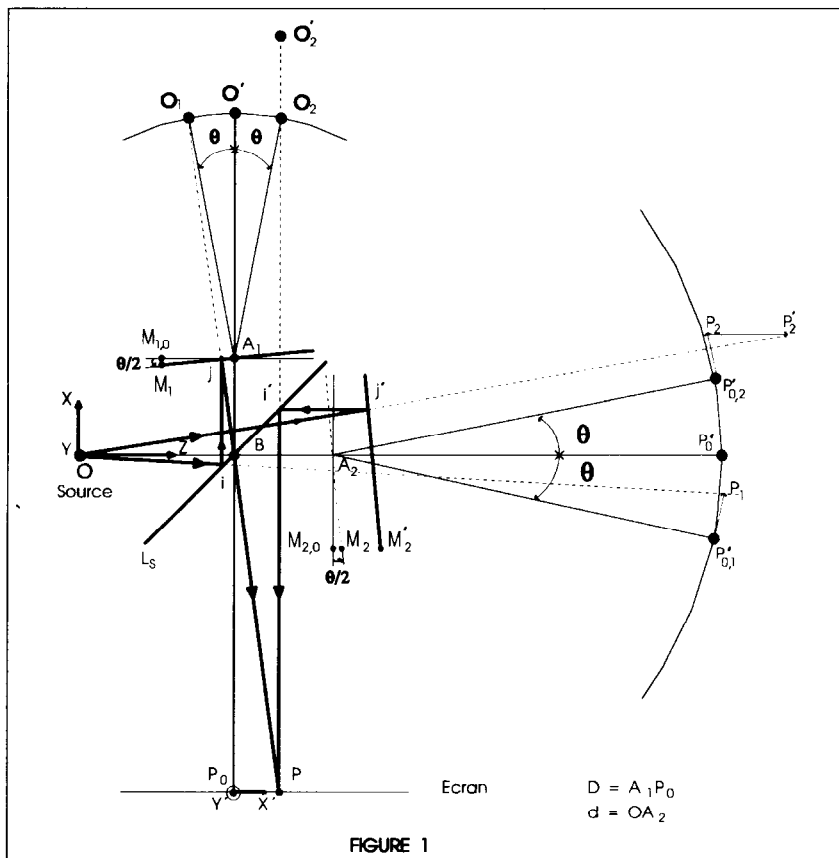
I - Interférences en lumière polychromatique	48
II - Exemples de sources en lumière polychromatique	50
II - 1 Densité spectrale rectangulaire	49
II - 2 Densité spectrale gaussienne	50
II - 3 Densité spectrale lorentzienne	50
III - 4 Conclusion	50
III - Modèle de source incohérente	51
III - 1 Introduction	51
III - 2 Modèle simple de source incohérente	51
III 2.1 Théorème de Wiener-Khintchine	51
III 2.2 Modèle du train d'onde	52
III - 3 Application au calcul du degré de cohérence	53
IV - Modèle de source cohérente : laser à gaz	54
IV - 1 Modèle du train d'onde	54
IV - 2 Spectre de l'émission laser	55
V - Expérience	55
V - 1 Expériences en projection	55
V - 2 Expériences en enregistrement	56

Annexe : protocole de réglage de l'interféromètre (observation à l'oeil) Annexe

Première partie - L'interféromètre théorique

I- Introduction

L'interféromètre est constitué (figure 1)



- d'une lame séparatrice semi-réfléchissante L_s (que l'on supposera dans une première étape, très fine avec des coefficients de réflexion et de transmission égaux à 0.5, et n'introduisant pas de déphasage) à 45 degrés des directions OBA_2 et P_0BA_1 , qui sont dans le plan de la figure.
- de deux miroirs plans M_1 et M_2 qui, dans les positions $M_{1,0}$ et $M_{2,0}$ sont perpendiculaires aux directions précédentes et symétriques par rapport à la lame semi-réfléchissante.

Les deux miroirs peuvent tourner autour des axes A_1 et A_2 perpendiculaires au plan de la figure. Sur la figure 1, l'angle de rotation est le même pour les deux miroirs - on le note $\theta/2$ - pour simplifier les constructions géométriques (cela ne restreint en rien les développements qui seront faits ultérieurement). De plus, M_2 peut se translater en M'_2 , parallèlement à OBA_2 , d'une valeur e variable.

II- Calcul de la différence de marche

On considère une source ponctuelle et monochromatique placée en O , et l'on se propose d'étudier l'état d'interférence au point P sur un écran E perpendiculaire à A_1BP_0 : c'est-à-dire de calculer la différence de marche des vibrations qui interfèrent en ce point. Il s'agit tout d'abord de construire les rayons qui, issus de O , vont se couper au point P .

Ces rayons doivent passer par les conjugués P_1 et P'_2 du point P dans l'espace d'entrée de l'interféromètre. Ce sont les images de P respectivement par réflexion sur M_1 puis L_S et par réflexion sur L_S puis M'_2 . De même, les rayons émergents doivent passer par les conjugués O_1 et O'_2 du point O dans l'espace de sortie de l'interféromètre.

Ces constructions se font aisément à partir des conjugués P_0 et O' de P_0 et de O lorsque M_1 et M'_2 sont dans les positions $M_{1,0}$ et $M_{2,0}$.

On reviendra d'ailleurs sur cette construction en III-1 pour calculer les coordonnées de P_1 et de P'_2 .

La différence de marche des vibrations qui interfèrent en P est donc :

$$\Delta_0 = OJ'P - OIJ P$$

Mais, du fait des symétries :

$$OIJ P = O_1 P = OP_1$$

$$\text{et } OJ'P = O'_2 P = OP'_2$$

Δ_0 peut donc se mettre sous l'une des deux formes :

$$\Delta_0 = O'_2 P - O_1 P \quad (1)$$

$$\Delta_0 = OP'_2 - OP_1 \quad (2)$$

Remarque :

$$\Delta_0 = (OP)_2 - (OP)_1$$

où $(OP)_1$ et $(OP)_2$ sont les chemins optiques le long des voies 1 et 2. On a :

$$(OP)_1 = (OO_1P) = (OO_1)_1 + O_1P$$

$$(OP)_2 = (OO'_2P) = (OO'_2)_2 + O'_2P$$

Or $(OO_1)_1 = 0$ et $(OO'_2)_2 = 0$ car il s'agit de chemins optiques entre deux conjugués par réflexion sur des miroirs plans. On retrouve ainsi, de façon plus générale, le résultat précédent $\Delta_0 = O'_2 P - O_1 P \quad (1)$.

De même,

$$(OP)_1 = OP_1 + (P_1P)_1$$

$$(OP)_2 = OP'_2 + (P'_2P)_2$$

Or

$$(P_1P)_1 = 0 \text{ et } (P'_2P)_2 = 0. \text{ On retrouve donc le résultat}$$

$$\Delta_0 = OP'_2 - OP_1 \quad (2)$$

L'expression (1) de la différence de marche Δ_0 permet d'avoir une idée de la forme des franges sur l'écran E . En effet, des franges brillantes définies par

$$\Delta_0 = k \lambda \quad (k \in \mathbb{Z})$$

sont à l'intersection du réseau d'hyperboloïdes de révolution autour de O_1O_2 défini par

$$O_2P - O_1P = k \lambda$$

et de l'écran E. Dans le champ d'interférences, ce sont donc pratiquement des portions de droites, parallèles et équidistantes, si O_1O_2 est parallèle à E, des portions de coniques (hyperboles, paraboles ou ellipses) lorsque O_1O_2 s'incline par rapport à E, avec des courbures de plus en plus grandes au voisinage du plan de symétrie.

La forme (2) est particulièrement intéressante pour étudier l'influence de l'élargissement de la source O sur la différence de marche en P, et donc sur le contraste du phénomène d'interférences en ce point. Pour ce faire, munissons l'espace (figure 2) d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, O étant le centre de la source lorsque celle-ci est à distance finie, $y = 0$ le plan de symétrie lorsque $\theta \neq 0$, $(O, \vec{k})$ l'axe normal à M_2O . Nous allons étudier successivement deux cas : source à distance finie et source à l'infini.

II-1 La source est à distance finie

Supposons que le point O se déplace en $S(x, y, 0)$ (figure 2).

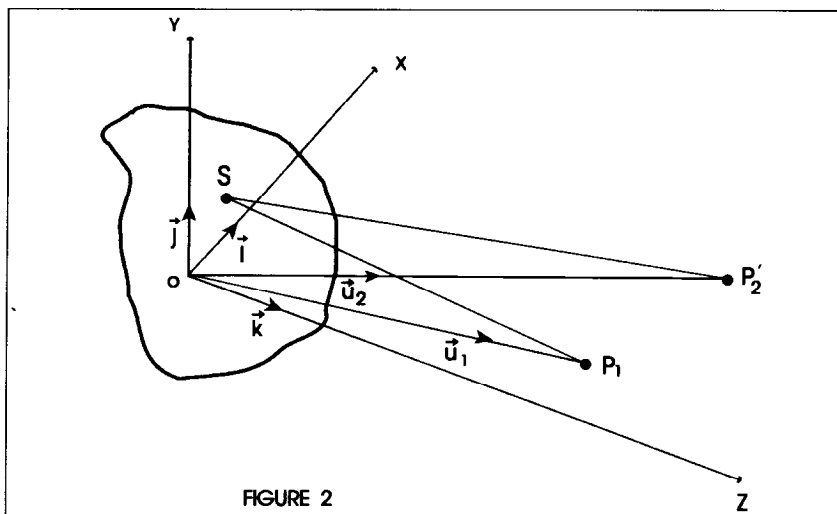


FIGURE 2

La différence de marche des vibrations qui interfèrent en P est alors :

$$\Delta = SP'_2 - SP_1$$

(x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) étant les coordonnées de P_1 et de P'_2 :

$$\Delta = \left[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2 \right]^{1/2} - \left[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z_1^2 \right]^{1/2}$$

Si S est voisin de O, on peut écrire :

$$\Delta(x, y) = \Delta(0,0) + \left[x \frac{\partial \Delta}{\partial x}(0,0) + y \frac{\partial \Delta}{\partial y}(0,0) \right] + \frac{1}{2} \left[x^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2}(0,0) + \dots \right] + \dots$$

Les dérivées de $\Delta(x, y)$ en $x = 0$ et $y = 0$ se calculent aisément et l'on est conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) = & OP_2' \cdot OP_1 \quad \text{terme } \Delta_0 \\ & + x \left(\frac{x_1}{OP_1} \cdot \frac{x_2}{OP_2'} \right) + y \left(\frac{y_1}{OP_1} \cdot \frac{y_2}{OP_2'} \right) \quad \text{termes du 1^{er} ordre en } x, y : \Delta_1 \\ & \cdot \frac{1}{2} x^2 \left[\frac{1}{OP_1} \left(1 - \frac{x_1^2}{OP_1^2} \right) \cdot \frac{1}{OP_2} \left(1 - \frac{x_2^2}{OP_2'^2} \right) \right] \\ & \cdot \frac{1}{2} y^2 \left[\frac{1}{OP_1} \left(1 - \frac{y_1^2}{OP_1^2} \right) \cdot \frac{1}{OP_2'} \left(1 - \frac{y_2^2}{OP_2'^2} \right) \right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{termes de 2^e ordre en } x, y : \Delta_2 \\ \text{termes de 3^e ordre en } x, y : \Delta_3 \\ \text{etc...} \end{array} \right\} \\ & \cdot xy \left[\frac{x_2 y_2}{OP_2'^3} - \frac{x_1 y_1}{OP_1^3} \right] \end{aligned}$$

et $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots$

Remarque 1 :

Dans ce développement, nous considérons les différents points de la source dans le plan d'équation $z = 0$. Or la plupart des sources sont volumiques (lampe à décharge par exemple) et il faudrait, pour être plus général, introduire la variable z pour définir la position de S . Cela peut se faire sans difficulté mais alourdit le texte et n'apporte aucune modification aux résultats fondamentaux de cette étude, en particulier sur la localisation des phénomènes d'interférence. On considérera donc, dans toute la suite, une source plane, ensemble de points sources incohérents entre eux, obtenue pratiquement en formant, à l'aide d'un condenseur, l'image d'une source primaire sur un diaphragme plan.

Remarque 2 :

Les coefficients de x et de y des termes du 1^{er} ordre Δ_1 font apparaître les coordonnées sur $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ des vecteurs unitaires $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des directions OP_1 et OP_2' , et Δ_1 peut se mettre sous la forme classique :

$$\vec{OS} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$$

Mais le développement analytique précédent permet d'expliciter sous une forme simple les termes du second ordre qui jouent un rôle très important, en particulier lorsque le premier ordre est identiquement nul.

II- 2 La source est à l'infini

Supposons que la source O soit à l'infini sur l'axe $(O, \vec{k})$. Ses conjugués O_1 et O_2 sont également à l'infini et on voit que la forme (1) de la différence de marche des vibrations en P est indéterminée

$(\infty - \infty)$. Par contre la forme (2) permet de lever cette indétermination. En effet les deux rayons qui vont se couper en P sont les deux rayons passant par P_1 et par P_2 et parallèles à l'axe $(O, \vec{k})$ dans l'espace d'entrée (figure 3).

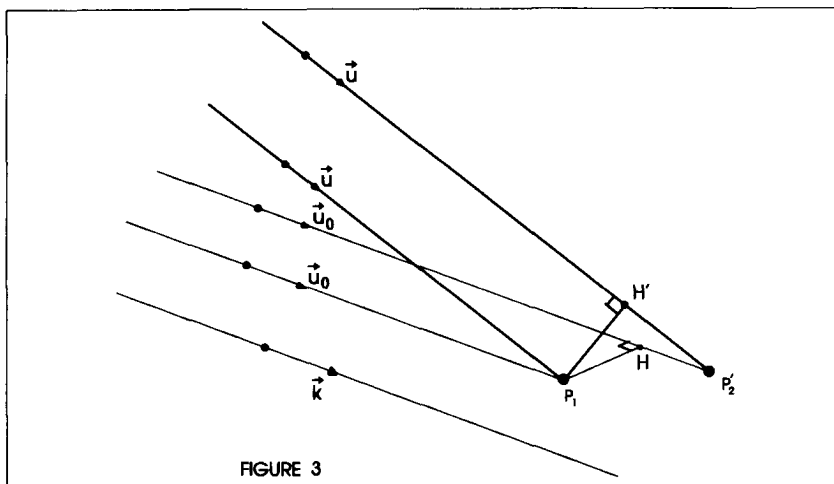


FIGURE 3

La différence de marche est :

$$\Delta_0 = \overrightarrow{HP_2} = \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}_0$$

La source S, voisine de O, à l'infini dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ de composantes (α, β, γ) crée en P deux vibrations dont la différence de marche est :

$$\Delta = \overrightarrow{HP_2} = \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}$$

Soit :

$$\Delta = (x_2 - x_1)\alpha + (y_2 - y_1)\beta + (z_2 - z_1)\gamma$$

Or :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \alpha \text{ et } \beta \text{ étant en général petits devant } 1 :$$

$$\gamma \approx 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \text{ (au 4ème ordre près)}$$

et Δ peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta &= z_2 - z_1 && \text{terme } \Delta_0 \\ &+ \alpha(x_2 - x_1) + \beta(y_2 - y_1) && \text{terme du 1er ordre en } \alpha \text{ et } \beta \\ &- \frac{1}{2}(z_2 - z_1)(\alpha^2 + \beta^2) && \text{terme du 2e ordre en } \alpha \text{ et } \beta \\ &+ \dots \end{aligned}$$

On dispose d'une source à l'infini en plaçant un diaphragme dans le plan focal d'une lentille L de focale f' , dont l'axe optique coïncide avec BA_2 , et placée à une distance d_0 du miroir M_{20} . On considère que tous les points à l'intérieur de ce diaphragme sont incohérents entre eux : on peut

supposer que, pour ce faire, on forme à l'aide d'un condenseur de grande ouverture, l'image d'une source primaire sur ce diaphragme (comme à la page 5 remarque 1). En présence de cette lentille, il faut prendre garde que les points P_1 et P'_2 ne reçoivent pas de vibrations de tous les points du plan focal, c'est-à-dire de tous les points de la source, en particulier lorsque la distance $D + d_0$ devient grande devant f' (D étant la distance P_0A_1). On s'en rend compte sur la figure 4, où les points P_1 et P'_2 ont, dans l'espace objet, comme conjugués P''_1 et P''_2 proches du plan focal objet. Ainsi P_1 ne reçoit que les vibrations issues des points de la source situés à l'intérieur du cercle de diamètre a_1b_1 , et P'_2 ne reçoit que les vibrations issues des points de la source situés à l'intérieur du cercle de diamètre a_2b_2 .

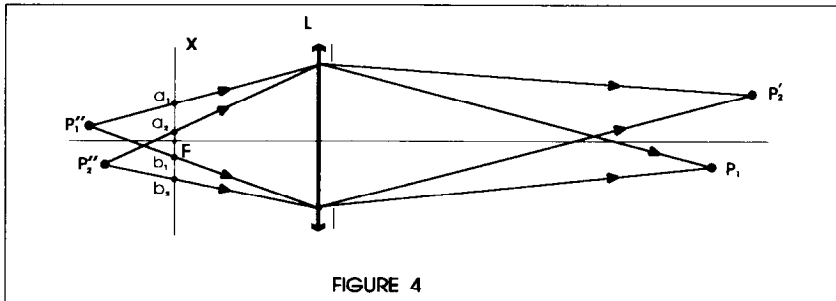


FIGURE 4

Les conséquences de cette remarque seront étudiées dans les paragraphes IV.2.2 et V.2.2.

Nous disposons maintenant des outils nécessaires à l'étude de l'influence des dimensions d'une source monochromatique sur le contraste des franges d'interférence que l'on peut obtenir avec un interféromètre de Michelson. Cela va nous permettre de montrer que l'on peut obtenir trois sortes d'interférences : des interférences non localisées, des interférences localisées à distance finie, et enfin des interférences localisées à l'infini, le contraste de ces dernières étant indépendant de la dimension de la source.

III- Les différents types d'interférences observables

On considère maintenant une source étendue, de largeur spectrale négligeable, incohérente. L'intensité produite en P est la somme des intensités dues à chacun de ses éléments.

III- 1 Franges non localisées

Supposons que la source, quoique étendue, est suffisamment petite pour qu'en tout point P la variation de Δ avec S soit très petite devant λ (même si on est dans le cas général où le premier ordre du développement de Δ avec S n'est pas identiquement nul). De ce point de vue, la source peut être considérée comme quasi ponctuelle : en chaque point P de l'espace de sortie qui a deux conjugués vus tous les deux du point source O , on a une différence de marche parfaitement définie et égale à :

$$\Delta_0 = OP'_2 - OP_1$$

On obtient donc des franges non localisées. Afin de préciser les dimensions maximales de la source permettant de la considérer comme quasi ponctuelle on étudiera en IV 1.2.a) et V 1.2.a) comment la dimension de la source et la variation de Δ avec S à l'ordre 1 viennent contribuer à la diminution du contraste des franges

III- 2 Franges localisées à distance finie

Dorénavant, on considère le cas où la source ne peut plus être considérée comme quasi ponctuelle. Plus précisément, on suppose qu'elle est assez étendue pour que les variations de $\Delta_1(S,P)$ avec S brouillent les franges presque partout, sauf au voisinage des points P tels que le premier ordre du développement de Δ soit identiquement nul. Ces points privilégiés sont tels que :

$$\text{et } \frac{x_1}{OP_1} - \frac{x_2}{OP'_2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{y_1}{OP_1} - \frac{y_2}{OP'_2} = 0 \quad (2)$$

Donc $u_1 = u_2$, c'est-à-dire que O , P_1 et P'_2 sont alignés, les deux rayons issus de O étant confondus.

Ce cas ne peut se rencontrer qu'aux points P , intersections des deux rayons émergents provenant d'un même rayon incident issu du point source O . Cet ensemble de points est appelé "lieu de localisation" pour l'interféromètre et le point source O . Les équations (1) et (2) sont fonctions des coordonnées de P_1 et de P'_2 , donc des coordonnées (x', y', z') de P : elles sont donc équivalentes à deux équations :

$$H_1(x', y', z') = 0 \quad (1')$$

$$H_2(x', y', z') = 0 \quad (2')$$

qui représentent les équations de deux surfaces. Le lieu de localisation est donc à l'intersection de ces deux surfaces, qui dans le cas général est une courbe. Le fait qu'a priori le lieu de localisation soit une courbe plutôt qu'une surface ne doit pas surprendre : en général, les rayons émergents issus d'un même rayon incident ne sont pas coplanaires et donc ne se coupent pas.

Si les équations (1') et (2') sont équivalentes, elles représentent alors la même surface qui contient l'ensemble des points P .

En ces points P , la différence de marche des vibrations qui interfèrent ne dépend qu'au second ordre près des dimensions de la source et si la partie utile de celle-ci est trop étendue, les variations de Δ_2 avec S peuvent dépasser λ et brouiller les franges sur le lieu de localisation aussi. Ce cas sera étudié au IV- 1.2 b).

III- 3 Franges localisées à l'infini

Pour éviter ce brouillage dû à Δ_2 on cherche s'il existe des points P où les termes du premier ordre et du second ordre du développement de $\Delta(x,y)$ sont identiquement nuls.

Si le premier ordre est nul, les points O , P_1 et P_2 sont alignés (III.2). Alors dans le terme du deuxième ordre, puisque $\frac{x_1^2}{OP_1^2} - \frac{x_2^2}{OP_2^2}$, le coefficient de x^2 se met sous la forme

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OP_1} - \frac{1}{OP_2} \right) \left(1 - \frac{x_1^2}{OP_1^2} \right).$$

Il doit être nul, ce qui entraîne $OP_1 = OP_2$. Les points P_1 et P_2 sont donc confondus. On montre que l'annulation des termes en y^2 et en xy du développement de Δ conduit à la même condition. Cela entraîne que tous les termes d'ordre supérieur sont nuls aussi et $\Delta = \Delta_0$ quelle que soit la dimension de la source.

Dans le cas de l'interféromètre de Michelson :

1. si $\theta \neq 0$, cela n'est possible que si P est sur l'arête A_1 (ou A_2), c'est-à-dire en $\Delta_0 = 0$.
2. si $\theta = 0$ et $e = 0$, quel que soit P , les deux conjugués P_1 et P'_2 sont confondus et $\Delta_0 = 0$ dans tout le champ d'interférences : **on a une teinte plate non localisée.**
3. si $\theta = 0$ et $e \neq 0$, P_1 et P'_2 ne peuvent être confondus qu'à l'infini, ce qui n'est possible que si P est lui-même à l'infini. On est donc dans le cas où un rayon incident issu de O donne naissance à deux rayons émergents parallèles. **On obtient alors des franges localisées à l'infini** (franges d'égale inclinaison) dont le contraste est indépendant de la dimension de la source. Ce type d'interférences sera étudié en V 1.2 b).

Nous avons établi ces résultats en considérant la source à distance finie ; on est amené à des conclusions identiques avec la source à l'infini. La seule différence que l'on peut noter se situe au niveau de la localisation à distance finie. En effet, $y = 0$ étant plan de symétrie, $y_1 = y_2$ pour tout point P et le premier ordre du développement en α et β est nul si $x_1 - x_2 = 0$. Cela entraîne toujours que P_1 et P_2 sont alignés avec la source O à l'infini sur l'axe $(O, \vec{k})$: de plus $x_1 - x_2 = 0$ est équivalent à $H_1(x', y', z') = 0$ et l'ensemble des points P est sur cette surface.

III-4 Calcul de la visibilité des franges

Si la source est ponctuelle, de largeur spectrale $\Delta\sigma$ très faible, autour du nombre d'onde σ_0 (c'est-à-dire telle que $|\Delta\sigma| \ll \Delta\sigma = \frac{1}{\Delta\sigma}$, (voir 3^e partie II4), l'intensité au point P peut se mettre sous la forme

$$I = 2 I_0(0,0) (1 + \cos 2\pi \sigma_0 \Delta_0)$$

si les intensités envoyées en P par les voies 1 et 2 sont égales.

Si la source est étendue, elle s'écrit

$$I = 2 \int_S I_0(x, y) [1 + \cos 2\pi \sigma_0 \Delta(x, y)] dx dy$$

avec $\Delta(x, y) = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots \Delta_i$ étant le terme d'ordre i du développement de Δ .

$$\text{Soit } I = 2 \int_S I_0(x, y) dx dy + 2 \operatorname{Re} \left[\int_S I_0(x, y) e^{2\pi j \sigma_0 (\Delta_0 + \Delta_1 + \dots)} dx dy \right]$$

(Re X signifie partie réelle de X)

$$\text{D'où } I = I_1 \left\{ 1 + \operatorname{Re} \left[e^{2\pi j \sigma_0 \Delta_0} \frac{\int_S I_0(x, y) e^{2\pi j \sigma_0 (\Delta_1 + \dots)} dx dy}{\int_S I_0(x, y) dx dy} \right] \right\}$$

$$\text{avec } I_1 = 2 \int_S I_0(x, y) dx dy$$

$$\text{On pose } V = \frac{\int_S I_0(x, y) e^{2\pi j \sigma_0 [\Delta_1 + \dots]} dx dy}{\int_S I_0(x, y) dx dy}$$

En général, compte tenu des symétries, V est réel, c'est le facteur de visibilité des franges, ou contraste.

On a :

$$I = I_1 (1 + V \cos 2\pi \sigma_0 \Delta_0)$$

III- 5 **Résumé**

Type d'interférences	Influence de la largeur de la source	Observations avec l'interféromètre de Michelson
Franges non localisées	$\Delta = \Delta_0$ au 1er ordre près	Interféromètre en coin d'air Interféromètre en lame d'air
Franges localisées à distance finie	$\Delta = \Delta_0$ au 2e ordre près	Interféromètre en coin d'air
Franges localisées à l'infini	$\Delta = \Delta_0$ à tout ordre	Interféromètre en lame d'air

IV Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air

IV- 1 - **La source est à distance finie**IV- 1.1 Calcul de Δ_0

En chaque point P de l'espace de sortie qui a deux conjugués, vus tous les deux de la source O, on a une différence de marche parfaitement définie et égale à

$$\Delta_0 = OP'_2 - OP_1.$$

Avec une source ponctuelle, on a donc des franges non localisées dans un certain volume, ou champ d'interférences. Exprimons les coordonnées de P₁ et de P'₂ (figure 1) en fonction de celles de P(x', y'). Nous avons :

$$\vec{OP}_1 = \vec{OP'_{0,1}} + \vec{P'_{0,1}P_1}$$

En posant $D = OA_2P'_0$ et $d = OA_2$, les coordonnées de P₁ sont

$$P_1 \begin{cases} x_1 = -D \sin\theta + x' \cos\theta \\ y_1 = y' \\ z_1 = d + D \cos\theta + x' \sin\theta \end{cases}$$

De même :

$$\vec{OP'_2} = \vec{OP'_{0,2}} + \vec{P'_{0,2}P'_2} + \vec{P'_2P_2}$$

d'où les coordonnées de P'₂ :

$$P'_2 \begin{cases} x_2 = D \sin\theta + x' \cos\theta \\ y_2 = y' \\ z_2 = d + 2e + D \cos\theta - x' \sin\theta \end{cases}$$

Dans les expériences, on est conduit à donner à l'angle θ des valeurs de quelques minutes. On fera donc les approximations $\sin\theta \cong \theta$ et $\cos\theta \cong 1$. D'autre part, lorsque l'on prend le point P à l'extérieur de l'interféromètre, les termes en x'^2 et y'^2 sont petits devant $(D + d)^2$; de même, $2e$ est petit devant D et d . Dans ces conditions, on pourra mettre OP₁ et OP'₂ sous les formes :

$$\begin{aligned}
 * \quad OP_1 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2} = \left[(D+d)^2 + 2d\theta x' + x'^2 + y'^2 \right]^{1/2} \\
 \text{donc } OP_1 &\cong D+d + \frac{d \cdot \theta}{D+d} x' + \frac{1}{2} \frac{x'^2 + y'^2}{D+d} \\
 * \quad OP_2 &= (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2} = \left[(D+d+2e)^2 - 2d\theta x' + x'^2 + y'^2 \right]^{1/2} \\
 \text{donc } OP_2 &\cong D+d+2e - \frac{d \cdot \theta}{D+d+2e} x' + \frac{1}{2} \frac{x'^2 + y'^2}{D+d+2e}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \Delta_0 = OP_2 - OP_1 = 2e - \frac{2d\theta}{D+d} x' - \frac{e}{(D+d)^2} (x'^2 + y'^2)$$

On obtient donc des franges rectilignes perpendiculaires au plan de symétrie $y = 0$ si $e = 0$. Si e augmente, ces franges ont une courbure qui augmente avec e . Ce résultat est tout à fait conforme avec la remarque faite sur la forme des franges (paragraphe II), et avec l'expérience qui sera décrite ci-dessous.

Lorsque $e = 0$, les franges sont régulièrement espacées, avec un interfrange :

$$i = \frac{\lambda(D+d)}{2d\theta}$$

qui diminue lorsque P se rapproche de l'interféromètre, et tend vers $\frac{\lambda}{2\theta}$ sur les miroirs (point P virtuel).

IV- 1.2 Influence de la largeur de la source

a) *Le premier ordre n'est pas identiquement nul*

La différence de marche des vibrations issues de $S(x,y,0)$ est alors égale, au second ordre près en x et y , à

$$\Delta = \Delta_0 + x \left[\frac{x_1}{OP_1} - \frac{x_2}{OP_2} \right] + y \left[\frac{y_1}{OP_1} - \frac{y_2}{OP_2} \right]$$

Avec les approximations :

$$\theta^2 \ll 1, \quad \frac{x'^2 + y'^2}{(D+d)^2} \ll 1, \quad \frac{2e}{D+d} \ll 1, \quad \text{et } OP_1, OP_2 \cong (D+d)^2$$

Δ se met sous la forme simple

$$\Delta = \Delta_0 - x \frac{2D\theta}{D+d} + yy' \frac{\Delta_0}{(D+d)^2}$$

Considérons les deux sources ponctuelles $O(0,0,0)$ et $S(\frac{x_0}{2}, 0, 0)$ telles que

$$\frac{x_0}{2} \cdot \frac{2D\theta}{D+d} = \frac{\lambda}{2}$$

Elles créent en P deux états d'interférences complémentaires $1 + \cos 2\pi \frac{\Delta_0}{\lambda}$ et $1 - \cos 2\pi \frac{\Delta_0}{\lambda}$ qui

se détruisent. Si l'on a sur l'axe $(O, \vec{i})$ une distribution continue de sources ponctuelles entre

$-\frac{x_0}{2}$ et $+\frac{x_0}{2}$, on peut les associer deux à deux, de telle sorte que l'état d'interférence se détruise pour chaque couple. On imposera à la source d'avoir une dimension en abscisse ℓ telle que :

$$\frac{\ell}{2} \frac{2D\theta}{D+d} < \frac{\lambda}{2}$$

Pour avoir un bon contraste en P , on prendra

$$\frac{\ell}{2} \frac{2D\theta}{D+d} = \frac{\lambda}{4}$$

On peut retrouver ce résultat à partir du facteur de visibilité (III 4) : considérons la source d'intensité uniforme limitée par une fente perpendiculaire au plan de symétrie de largeur ℓ parallèle à ox et de hauteur h parallèle à oy ; V est alors égal à :

$$V = \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{2D\theta}{D+d} \ell}{\frac{\pi}{\lambda} \frac{2D\theta}{D+d} \ell} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} y' \frac{\Delta_0}{(D+d)^2} h}{\frac{\pi}{\lambda} y' \frac{\Delta_0}{(D+d)^2} h}$$

V est le produit de deux facteurs : le premier dépend de la largeur ℓ , le second de la hauteur h de la fente. Dans les observations courantes, c'est-à-dire au voisinage de la différence de marche nulle, on a par exemple $\Delta_0 = 10\lambda$, $h = 40$ mm, $y' = 50$ mm et $D + d \cong 500$ mm. Dans ces conditions :

$$\frac{\pi}{\lambda} y' \frac{\Delta_0}{(D+d)^2} h \cong \frac{\pi}{12,5}$$

et le deuxième facteur vaut 0,99, c'est-à-dire qu'à une faible différence de marche, la hauteur de la fente influe très peu sur la visibilité des franges.

Le premier facteur s'annule pour :

$$\frac{\ell}{2} \frac{2D\theta}{D+d} = \frac{\lambda}{2}$$

et nous retrouvons à l'aide du facteur de visibilité la condition établie précédemment.

Remarquons que $\frac{\ell}{2} \frac{D\theta}{D+d}$ représente l'écart maximum de la différence de marche des vibrations issues de O et de celles issues du point $S(\frac{\ell}{2}, 0, 0)$. Pour avoir un bon contraste en P on prend souvent, par convention, cet écart égal à $\frac{\lambda}{4}$; dans ces conditions $V \cong 0,64$.

b) Le premier ordre est identiquement nul :

Pour que le premier ordre du développement de Δ soit nul quel que soit le point source S il faut que :

$$\frac{x_1}{OP_1} = \frac{x_2}{OP_2} \text{ et } \frac{y_1}{OP_1} = \frac{y_2}{OP_2}$$

$$\text{soit } \vec{u}_1 = \vec{u}_2$$

Les deux rayons émergents doivent provenir du même rayon incident issu de O . Pour que les deux rayons réfléchis par M_1 et par M_2 se coupent, il est nécessaire qu'ils soient dans un même plan d'incidence. Dans le cas où la source est à distance finie, les points P sont donc dans le plan d'incidence passant par O et perpendiculaire à M_1 et à M_2 . L'ensemble des points P est donc dans le plan $y = 0$. La figure 5 représente la construction d'un tel point P : les deux rayons émergents passent par O_1 et par O_2 (points fixes) et font entre eux un angle constant quel que soit le point P et égal à 2θ . Les points P sont donc sur le cercle de centre C passant par O_1 et par O_2 et tel que $(PO_1, PO_2) = 2\theta$ (si $e = 0$, le point A_1 appartient de façon évidente à cet ensemble).

ces franges localisées au voisinage des miroirs avec une source de grande surface. Par contre, il n'en est pas de même si Δ_0 devient important (de l'ordre de $10^3\lambda$) et nous étudierons ce cas lorsque la source est à l'infini.

IV- 2 La source est à l'infini

Nous avons vu qu'au second ordre près, la différence de marche des vibrations interférant en P pouvait se mettre sous la forme :

$$\Delta = z_2 - z_1 + \alpha(x_2 - x_1) + \beta(y_2 - y_1)$$

IV- 2.1 Calcul de Δ_0

Nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= z_2 - z_1 \\ \Delta_0 &= 2e \cdot 2x'\theta\end{aligned}$$

Les franges sont rectilignes, perpendiculaires au plan de symétrie, et d'interfrange

$$i = \frac{\lambda}{2\theta} \text{ indépendant de } D.$$

IV- 2.2 Influence de la largeur de la source

a) *Le premier ordre n'est pas identiquement nul*

Nous avons $x_2 - x_1 = 2D\theta$ et $y_1 = y_2$.

On pourra donc utiliser, en prenant le même critère qu'en IV 1.2 a) une fente, parallèle à Oy de largeur α telle que

$$\frac{\alpha}{2} 2D\theta = \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{soit } \alpha = \frac{i}{2D}$$

La hauteur de la fente n'influe qu'au second ordre près.

Si l'on prend pour réaliser l'expérience une fente au foyer d'une lentille L de focale f' , il faut s'assurer que les points P_1 et P_2 reçoivent bien des vibrations de chaque point de la fente (figure 4). Intéressons-nous à la frange centrale. Si P''_1 et P''_2 sont les conjugués de P_1 et de P_2 à travers L, on a, dans le cas où $e = 0$:

$$P''_1 P''_2 = \left| (x_1 - x_2) \frac{f'}{D + d_0 - f'} \right| \cong \left| x_1 - x_2 \right| \frac{f'}{D + d_0}.$$

Les faisceaux lumineux issus de P''_1 et de P''_2 et convergents en P_1 et en P_2 découpent dans le plan focal de L deux traces circulaires de diamètres $a_1, b_1 \cong a_2, b_2 = 2r$ avec $r = \rho \frac{f'}{D + d_0}$ (2ρ diamètre

utile de L et en supposant $D + d_0 \gg f'$, avec $S_1 S_2 = P''_1 P''_2 \cong \left| (x_1 - x_2) \frac{f'}{D + d_0} \right|$ (S_1 et S_2 centres des traces).

Il faut que ces deux traces se chevauchent pour que P_1 et P_2 reçoivent des vibrations d'un même point de la source, donc que $\left| (x_1 - x_2) \frac{f'}{D + d_0} \right| < 2r$

soit $2D\theta < 2\rho$.

Exemple :

Le rayon des miroirs M_1 et M_2 de l'interféromètre impose pratiquement la valeur de ρ .

Soit $\rho = 10 \text{ mm}$; avec un interférange $i = 1 \text{ mm}$ à 589 nm $\theta = 3.10^{-4} \text{ rd}$. $D < 30 \text{ m}$, condition toujours réalisée dans les expériences courantes où $D + d_0$ n'excède pas 1 m .

Si on prend $D = 1 \text{ m}$ et $f' = 100 \text{ mm}$, $r = 1 \text{ mm}$ et la largeur de la fente pour avoir un bon contraste est $\ell = f' \frac{i}{2D} \cong 0,05 \text{ mm}$, bien inférieure à r .

C'est donc bien, dans cet exemple, la largeur de la fente qui impose la dimension de la source suivant $(O, \vec{i})$, mais pas sa hauteur car h est très grand devant $r \cong 1 \text{ mm}$.

b) Le premier ordre est identiquement nul

Pour que la différence de marche en P ne dépende de la dimension de la source qu'au second ordre près en α et en β , il faut que :

$$x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2$$

donc $\vec{P_1 P_2}$ est parallèle à l'axe $(O, \vec{k})$.

Le point P correspondant est à l'intersection de deux rayons émergents provenant du même rayon incident parallèle à l'axe $(O, \vec{k})$, donc provenant du point source O à l'infini sur cet axe. Les deux rayons réfléchis sont dans le même plan d'incidence $y = y'$ et l'ensemble des points P est dans le plan confondu avec $M_{0,1}$ (sur la figure 5, si O tend vers l'infini sur $(O, \vec{k})$, le centre du cercle lieu de P également, et ce cercle se confond avec sa tangente en A_1 : de plus il y a invariance par translation suivant $(O, \vec{j})$). **Dans ce cas, le lieu de P est donc le plan confondu avec $M_{0,1}$.**

Au point P , la différence de marche s'écrit alors au second ordre :

$$\Delta = \Delta_0 - \frac{1}{2} \Delta_0 (\alpha^2 + \beta^2)$$

Si la source est limitée par un diaphragme de rayon R , centré au foyer de la lentille L , le facteur de visibilité se met sous la forme

$$V = \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\Delta_0}{2} \cdot \frac{R^2}{f^2}}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\Delta_0}{2} \cdot \frac{R^2}{f^2}}$$

V s'annule une première fois pour

$$\frac{1}{2} \Delta_0 \frac{R^2}{f^2} = \lambda \text{ soit } \alpha^2 = \frac{R^2}{f^2} = \frac{2\lambda}{\Delta_0}$$

Exemple :

$R = 20 \text{ mm}$, $f' = 100 \text{ mm}$, $\lambda = 589 \text{ nm}$.

V s'annule pour $\Delta_0 \cong 30 \mu\text{m}$, c'est-à-dire un déplacement du miroir M_2 de l'ordre de $15 \mu\text{m}$.

Partant de cette position de visibilité nulle, si l'on réduit la dimension du diaphragme à $R = 10 \text{ mm}$, on retrouve une visibilité de $V = 0,9$.

Il est préférable de réaliser l'expérience de l'influence de la dimension de la source sur le contraste des franges localisées avec la source à l'infini, car ces franges sont localisées dans un plan, donc plus faciles à projeter sur un écran. D'autre part, nous verrons comment évaluer expérimentalement la dimension du diaphragme qui permet l'annulation de V , lorsque nous aurons étudié les franges de l'interféromètre du Michelson réglé en lame d'air.

IV- 3- Expériences avec l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air

Partant de l'interféromètre de Michelson réglé en teinte plate de différence de marche nulle (en utilisant le protocole indiqué dans l'annexe), on dispose devant l'interféromètre, au plus près, une fente réglable en largeur et dont la grande dimension est verticale. On met, derrière cette fente, une lampe à vapeur de mercure, moyenne ou basse pression, en faisant en sorte que les deux miroirs soient éclairés sur toute leur surface (un condenseur n'est pas indispensable). On doit ainsi obtenir, sur un écran placé à une distance de 1 m, un champ éclairé de l'ordre de 200 mm de diamètre, si les miroirs ont un diamètre de 20 mm. On tourne ensuite le miroir M_1 d'un angle θ autour d'un axe vertical, de façon à faire apparaître une dizaine de franges sur l'écran. On améliore au mieux le contraste de ces franges en diminuant la largeur de la source et en réglant son parallélisme avec les franges, en agissant soit sur la rotation de la fente, soit sur les vis de réglage fin de M_1 .

A partir de là, on peut réaliser un certain nombre d'expériences qui illustrent la théorie développée dans les paragraphes précédents :

- - Variation de l'interfrange avec la distance d de la fente aux miroirs M_1 et M_2 , avec la distance D , avec l'angle θ (IV 1.1).
- - Variation de la courbure des franges : on revient à la position initiale de la fente et de l'écran, avec une dizaine de franges bien rectilignes sur l'écran. A partir de cette position, on éloigne le miroir M_2 de sa position ; on observe que les franges présentent une courbure de plus en plus marquée vers la droite de l'observateur regardant l'écran. On constate le même phénomène, mais avec une courbure des franges dans l'autre sens si l'on rapproche M_2 de l'interféromètre à partir de sa position initiale (IV 1.1). Cette expérience permet d'ailleurs de retrouver rapidement la frange centrale.
- - Influence de la largeur de la fente sur la délocalisation des franges : partant de la position où l'écran est à 1 m de l'interféromètre, on ouvre la fente jusqu'au premier brouillage des franges ; en rapprochant l'écran de l'interféromètre, les franges réapparaissent. On recommence cette opération pour plusieurs positions de l'écran, de plus en plus proches de l'interféromètre ; lorsqu'on est très près de l'interféromètre, on remplace la fente par un diaphragme circulaire d'ouverture variable (2 mm - 40 mm), et l'on dispose à la sortie de l'interféromètre une lentille de 150 mm de focale, permettant de projeter sur un écran différents plans parallèles à M_1 et intérieurs à l'interféromètre. On met ainsi en évidence la localisation au voisinage des miroirs au fur et à mesure que l'on ouvre le diaphragme source. On revient à $e_0 = 0$, et l'on place le diaphragme au foyer d'une lentille L de 100 mm de focale ; on projette les franges localisées sur les miroirs, le diaphragme étant ouvert au maximum. Partant de cette position, on translate M_2 : pour une certaine valeur de e_0 , on obtient un premier brouillage des franges. On retrouve un contraste correct en refermant le diaphragme (IV 1. 2. a) b) et IV 2).

V- Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

V- 1 La source est à distance finie

Avec une source ponctuelle O , on a, comme dans le cas de l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, des franges non localisées dans le champ d'interférences.

V- 1.1 Calcul de Δ_0

$$\Delta_0 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2} - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}$$

Avec les hypothèses $\frac{x_1^2 + y_1^2}{z_1^2}$ et $\frac{x_2^2 + y_2^2}{z_2^2}$ petits devant 1, et compte tenu de la géométrie du montage ($x_1 = x_2 = x'$ et $y_1 = y_2 = y'$), Δ_0 se met sous la forme :

$$\Delta_0 = 2e \cdot \frac{1}{2} \cdot 2e \cdot \frac{x'^2 + y'^2}{(D+d)^2} \text{ en posant } z_1 \cdot z_2 = (D+d)^2.$$

On obtient un système d'anneaux non localisés centrés en $x' = y' = 0$.

V- 1.2 Influence de largeur de la source

a) Le premier ordre n'est pas identiquement nul

Il se met sous la forme :

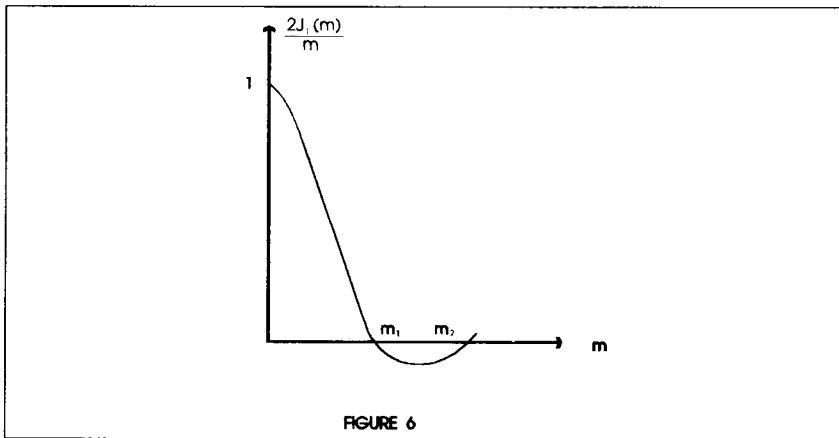
$$\Delta_1 = \left(\frac{1}{OP_2} - \frac{1}{OP_1} \right) (xx' + yy') \text{ soit } \Delta_1 = - \frac{\Delta_0}{(D+d)^2} (xx' + yy')$$

Nous prendrons une source d'intensité uniforme, dans le plan Oxy, limitée par un diaphragme circulaire de rayon R centré en $x = 0$ et $y = 0$. Compte-tenu de la symétrie de révolution autour de l'axe $(O, \vec{k})$, nous pouvons calculer la visibilité des franges suivant $y' = 0$. Nous sommes alors conduits au même calcul que pour l'amplitude diffractée à l'infini par une pupille circulaire : Soit :

$$V = \frac{\int_{-R}^{+R} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta_0}{(D+d)^2} xx' dx \cdot \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy}{\iint dx dy}$$

$$V = \frac{2J_1(m)}{m} \text{ avec } \begin{cases} J_1(m) \text{ fonction de Bessel d'ordre 1} \\ m = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta_0}{(D+d)^2} R \cdot x' \end{cases}$$

Le calcul a été fait pour $y' = 0$; il est donc valable compte tenu de la symétrie de révolution pour $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.



La variation de V est indiquée sur la figure 6. Nous obtenons donc des anneaux dont le contraste diminue lorsqu'on s'éloigne du centre, s'annule pour $m = m_1$ c'est-à-dire $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta_0}{(D+d)^2} R \rho'_1 = 3.832$ et devient négatif entre m_1 et m_2 , et ainsi de suite...
De la relation :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta_0}{(D+d)^2} R \rho'_1 = 3,832$$

on peut tirer les conséquences suivantes :

- Pour Δ_0 et $D+d$ fixés, ρ'_1 est d'autant plus grand que R est plus petit.

Cela explique que l'on peut voir, avec une source étendue de lumière blanche, comme on le fait souvent une teinte de Newton quasi uniforme sur les miroirs parallèles (et pas seulement à l'infini).

- Pour Δ_0 et R fixés, ρ'_1 est d'autant plus grand que D est plus grand ; si D tend vers l'infini, ρ'_1 également.

- Enfin pour R et D fixés, ρ'_1 est d'autant plus grand que Δ_0 est plus petit.

L'influence de ces différents paramètres sera montrée dans l'expérience décrite ci-dessous.

b) Le premier ordre est identiquement nul

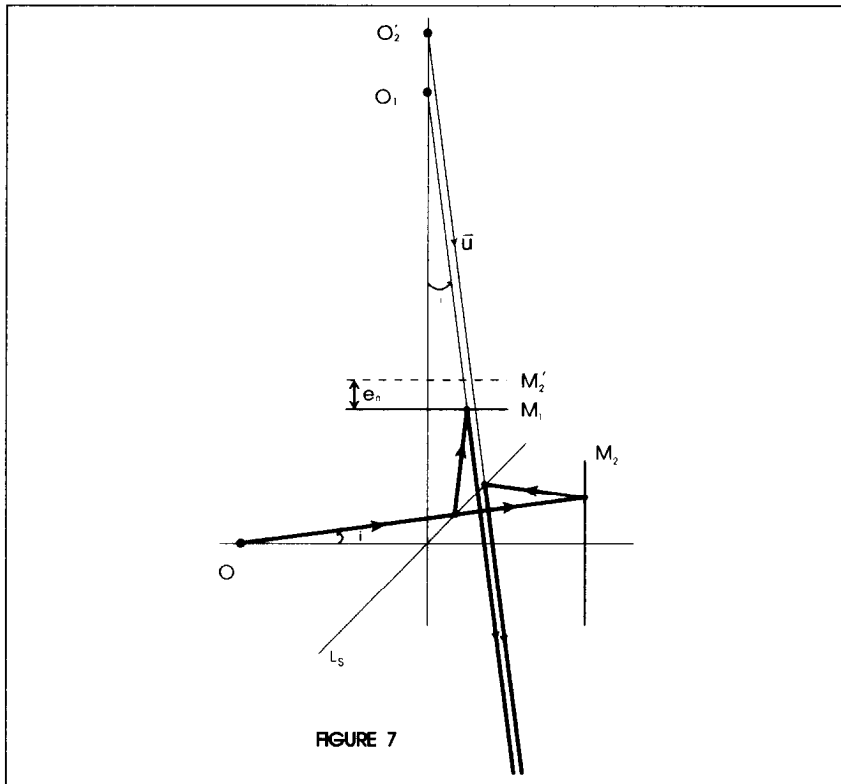
Pour qu'il en soit ainsi, il faut que $OP_1 = OP'_2$; P_1 et P'_2 se déduisant l'un de l'autre par une translation de vecteur $2e \cdot \vec{k}$; la condition $OP_1 = OP'_2$ n'est remplie que si P_1 et P'_2 sont confondus.

. Si P_1 et P'_2 sont confondus à distance finie, quel que soit P , cela entraîne que e doit être égal à zéro, et donc que $\Delta_0 = 0$. On a alors une teinte plate, de différence de marche nulle, non localisée, dont le contraste est indépendant de la dimension de la source : $\Delta = \Delta_0 = 0$ quel que soit S .

. Si P_1 et P'_2 sont confondus à l'infini (P est également à l'infini) et Δ_1 peut être identiquement nul avec O_1 et O_2 distincts, i.e. sans que e soit nul.

Dans ces conditions (figure 7).

$$\Delta = \Delta_0 = \vec{O_1 O_2} \cdot \vec{u} = \vec{S_1 S_2} \cdot \vec{u} = 2e_0 \cos i \text{ où } i = (\vec{k}, \vec{O_1 P_1})$$



On obtient des anneaux localisés à l'infini, dont le contraste est égal à 1, quelle que soit la dimension de la source.

Dans le cas où l'on a un centre noir le rayon du $p^{\text{ième}}$ anneau est défini par

$$r_p^2 = p \cdot \frac{2\lambda}{\Delta_0}$$

V- 2. La source est à l'infini

V- 2.1. Calcul de Δ_0

On a $\Delta_0 = z_2 \cdot z_1$
 $\Delta_0 = 2e_0$ car O est à l'infini dans la direction normale au miroir.

V- 2.2. Influence de largeur de la source

Comme $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, nous avons

$$\Delta = \Delta_0 \cdot \frac{1}{2} \Delta_0 (\alpha^2 + \beta^2) + \dots$$

Δ ne dépend de la dimension de la source qu'au second ordre. Si celle-ci est au foyer d'un objectif de focale f' , limitée par un diaphragme de rayon R , la visibilité se met sous la forme

$$V = \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \Delta_0 \frac{R^2}{f'^2}}{\frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \Delta_0 \frac{R^2}{f'^2}}$$

Δ_0 étant fixé, V s'annule pour une valeur R_1 de R telle que

$$\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \Delta_0 \frac{R_1^2}{f'^2} = \pi$$

$$\text{soit } \frac{R_1^2}{f'^2} = \frac{2\lambda}{\Delta_0}$$

Cette condition est indépendante de la distance de P_1 et de P_2 à l'interféromètre. Cependant, si on considère les points P_1 et P_2 sur l'axe $(O, \vec{k})$ à une distance D grande devant f' , ces points ne reçoivent que les vibrations issues d'un petit domaine autour de O de rayon $r = \rho \frac{f'}{D+d_0}$, ρ étant le rayon utile de l'objectif (figure 8) et si $r < R_1$, on aura une visibilité non nulle au point P qui a pour conjugués P_1 et P_2 . Si D tend vers l'infini, r tend vers zéro et la visibilité est donc égale à 1 pour les points P_1 et P_2 à l'infini sur l'axe $(O, \vec{k})$.

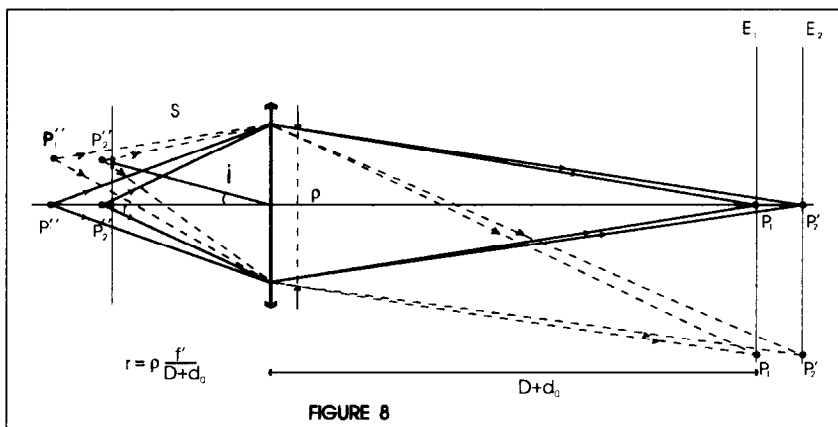


FIGURE 8

Si l'on considère maintenant un point P , ayant comme conjugués P_1 et P_2 , en dehors de l'axe $(O, \vec{k})$, de la même façon que ci-dessus ces points ne reçoivent que les vibrations issues d'un petit domaine de la source au voisinage de S dans la direction i à l'infini (figure 8). La différence de marche des vibrations venant de cette source est

$$\Delta = 2e_0 \cos i$$

et la visibilité en P sera suffisante si le domaine autour de S est assez petit.

Ce raisonnement assez qualitatif montre donc que, lorsqu'on éclaire l'interféromètre à l'aide d'une source étendue placée au foyer d'un objectif, on peut obtenir à distance finie -et pas seulement à l'infini- des anneaux de bon contraste. A partir de la relation

$$\frac{R_1^2}{f^2} = \frac{2\lambda}{\Delta_0}$$

on voit que cette délocalisation est d'autant plus grande que Δ_0 est plus petit.

V- 3 Expériences avec l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

Partant de l'interféromètre de Michelson réglé en teinte plate de différence de marche nulle (en utilisant le protocole indiqué dans l'annexe), on dispose au plus près devant l'interféromètre un diaphragme circulaire d'ouverture variable, et derrière ce diaphragme une lampe à vapeur de mercure moyenne pression, placée de façon à obtenir sur un écran placé à 1 m un champ éclairé d'une vingtaine de centimètres de diamètre. Lorsque l'on translate M_2 , on voit apparaître sur l'écran un système d'anneaux tel que le rayon du premier anneau diminue lorsque M_2 s'éloigne de sa position initiale. A partir d'une certaine valeur de la translation, on observe une zone floue circulaire dont le centre est celui du système d'anneaux. Le rayon de cette zone augmente ou diminue suivant que l'on éloigne ou rapproche l'écran de l'interféromètre. Pour une position de l'écran, ce rayon diminue si l'on continue à augmenter la translation de M_2 (on augmente Δ_0) ou si l'on augmente l'ouverture du diaphragme (V. 1.1). Par contre, si l'on place l'écran dans le plan focal d'une lentille de 1 m de focale, le système d'anneaux a un très bon contraste, quels que soient Δ_0 et l'ouverture du diaphragme (V 2). Si l'on dispose maintenant le diaphragme, avec une ouverture maximum, au foyer d'un objectif de 100 mm de focale, toujours éclairé par une lampe à vapeur de mercure basse pression, on observe sur un écran placé à 1 m des anneaux dont le contraste diminue lorsque Δ_0 augmente, et si l'on ferme le diaphragme, on diminue le champ sans modifier le contraste (V 2). Par contre, si l'on replace l'écran dans le plan focal de la lentille de 1 m de focale, on observe à nouveau des anneaux de très bon contraste quel que soit Δ_0 . Notons que, dans cette expérience, on observe sur l'écran à la fois des anneaux et l'image du diaphragme source.

Le diaphragme étant ouvert au maximum, on règle Δ_0 de façon à avoir une douzaine d'anneaux dans le champ et un centre noir avec la raie verte du mercure isolée par un filtre interférentiel. On ferme alors le diaphragme de sorte que son image ait un rayon angulaire égal à celui du premier anneau noir i_1 tel que $i_1^2 = \frac{2\lambda}{\Delta_0}$ (V 1.2). A partir de ce réglage, on tourne le miroir M_1 pour créer un

coin d'air de même différence de marche Δ_0 , coin d'air que l'on projette sur l'écran en remplaçant la lentille de 1 m de focale par celle de 150 mm de focale. On aperçoit alors des franges de très faible contraste, contraste que l'on améliore en fermant le diaphragme. On retrouve donc ainsi expérimentalement la condition d'obtention de franges du coin d'air de bon contraste, à savoir que si α est le rayon angulaire du diaphragme, on doit avoir $\alpha^2 < \frac{2\lambda}{\Delta_0} = i_1^2$.

Deuxième partie - L'interféromètre réel

I- Introduction

Dans la première partie, nous avons supposé que la lame séparatrice était plane et infiniment mince, et qu'elle n'introduisait pas de déphasage ; nous avons également supposé que les deux miroirs M_1 et M_2 étaient parfaitement plans. Or, du fait des tolérances de fabrication, on ne peut obtenir que des planités de l'ordre d'une fraction de longueur d'onde pour des pièces optiques dont le diamètre est comprise entre 20 à 50 mm, et il est bon d'évaluer la précision de planéité requise pour l'application envisagée. Ces exigences de planéité imposent aux pièces optiques d'avoir des épaisseurs importantes, de l'ordre de 5 à 10 mm pour la lame séparatrice par exemple. De ce fait, dans l'interféromètre de Michelson, avec une lame séparatrice seule, on n'a plus de symétrie optique sur les deux voies de l'interféromètre, compte tenu de cette épaisseur devenue importante. Pour rétablir cette symétrie, on ajoute une lame, dite compensatrice, qui doit avoir la même épaisseur, mais avec quelle précision ? D'autre part, ces deux lames doivent avoir également leurs deux faces bien parallèles, mais, là encore, se pose le problème de précision sur le parallélisme de ces faces.

Il faudra donc introduire, en plus de la différence de marche calculée dans l'interféromètre théorique, que l'on appellera Δ_L , la différence de marche Δ_L introduite par ces deux lames, qui ne peuvent pas, par construction, être rigoureusement identiques. Cette différence de marche Δ_L dépend de l'indice du matériau dans lequel elles sont fabriquées, donc de la longueur d'onde.

D'autre part, on sait que, sous des incidences obliques, ces lames introduisent, à leurs interfaces, des déphasages à la transmission et à la réflexion, en particulier pour la face traitée de la lame séparatrice ; ces déphasages sont fonction de la longueur d'onde et de la polarisation de la lumière incidente. La prise en compte rigoureuse de ce dernier phénomène sort du cadre de cette étude, et l'auteur renvoie le lecteur aux articles plus spécialisés sur ce sujet de A.L. FYMAT^{1, 2, 3}. Nous retiendrons, dans la suite des développements, que ce phénomène introduit une différence de marche supplémentaire Δ_i (t comme traitement), fonction notamment de la longueur d'onde, mais dont la valeur reste faible (quelques fractions de longueur d'onde).

L'introduction de ces deux lames à faces parallèles entraîne qu'une hypothèse fondamentale, faite dans la première partie pour le calcul rigoureux de la différence de marche au point P, n'est plus valable. En effet, l'hypothèse d'épaisseur nulle de la lame séparatrice nous a permis d'exploiter le stigmatisme rigoureux entre les couples de points conjugués (O, O_1) , (O, O_2) , (P, P_1) , (P, P_2) . Cette hypothèse n'est plus valable si ces points sont à distance finie, en présence des lames à faces parallèles constituées par la séparatrice et la compensatrice. Or, si l'on veut étudier les franges non localisées ou le coin d'air (P à distance finie), il faut exclure l'utilisation de P_1 et de P_2 pour le calcul de la différence de marche en P. Par contre, on peut considérer O à l'infini, et, dans ces conditions, il y a également stigmatisme rigoureux pour les couples (O, O_1) et (O, O_2) . Cela revient donc à considérer une onde plane incidente dans l'interféromètre, qui fournit deux ondes planes sur les voies (1) et (2) de l'interféromètre, ondes qui, après avoir traversé ces lames et s'être réfléchies sur M_1 et M_2 , vont atteindre le point P, à distance finie ou à l'infini, avec une différence de marche Δ égale à $\Delta_L + \Delta_i$ (si l'on néglige Δ_i). Dans toute l'étude qui va suivre, nous prendrons une source à l'infini, c'est-à-dire que nous considérerons que l'interféromètre de Michelson est éclairé par un collimateur, ce qui est généralement le cas dans la pratique courante.

De même, les deux miroirs M_1 et M_2 doivent avoir une planéité qu'il faut pouvoir évaluer afin d'obtenir des franges de bon contraste.

II- Nécessité de la lame compensatrice

II- 1 Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

Considérons l'interféromètre réglé en lame d'air, éclairé en lumière monochromatique, avec des miroirs que l'on suppose parfaits et une lame séparatrice d'épaisseur e que l'on suppose parfaite en ce qui concerne la planéité des faces et leur parallélisme (figure 9).

Nous allons étudier le phénomène d'interférences à l'infini. Si l'on considère une onde plane dont le vecteur d'onde est orthogonal à M_2 , il est commode de "déplier" l'interféromètre comme cela est indiqué sur la figure 9, afin d'énumérer les lames à faces parallèles que va rencontrer cette onde plane sur les deux voies de l'interféromètre.

- sur la voie 1 : la lame L_S après réflexion sur M_1 , soit L'_{S1} symétrique de L_S par rapport à M'_1 , lui-même symétrique de M_1 par rapport à L_S .
- sur la voie 2 : la lame L_S , à nouveau L_S après réflexion sur M_2 soit L'_{S2} , puis à nouveau L_S , donc L''_{S2} , après réflexion sur la partie réfléchissante de L_S .

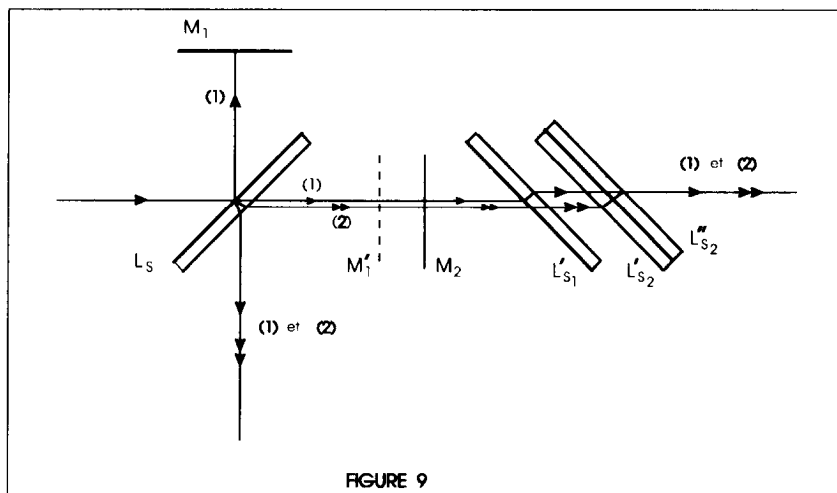


FIGURE 9

Schéma "déplié" de l'interféromètre n'indiquant que les *directions* des rayons

L'_{S1} sur la voie 1 compense exactement L''_{S2} (ou L'_{S2}) sur la voie 2 : ce sont deux lames à faces parallèles, parallèles entre elles, de même épaisseur, et cela quel que soit l'onde incidente.

Dans ces conditions, une onde plane de direction normale $\vec{r}$ donne, à la sortie de l'interféromètre, deux ondes planes parallèles de direction normale $\vec{r}$ (figure 10), qui vont interférer à l'infini dans cette direction, avec une différence de marche :

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_{L_S} + \Delta_{L'_{S2}}$$

avec $\Delta_1 = 2e_0 \cos i_0$ si i_0 est l'incidence sur les miroirs M_1 et M_2 :

$\Delta_{L_S} = e(n \cos r_1 - \cos i_1)$ différence de marche d'une vibration ayant traversé une lame d'indice n , d'épaisseur e , sous l'incidence i_1 (avec $\sin i_1 = n \sin r_1$) par rapport à la même vibration ayant traversé la même épaisseur d'air sous la même incidence :

$$\Delta_{L'_{S2}} = e(n \cos r_2 - \cos i_2).$$

Pour expliciter Δ , il suffit donc de calculer i_1 , i_2 et i_0 en fonction de la direction du vecteur unitaire $\vec{r}$ de coordonnées (α, β, γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(O, \vec{k})$ étant l'axe normal de M_2 . $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ deux axes orthogonaux dans un plan perpendiculaire à $(O, \vec{k})$.

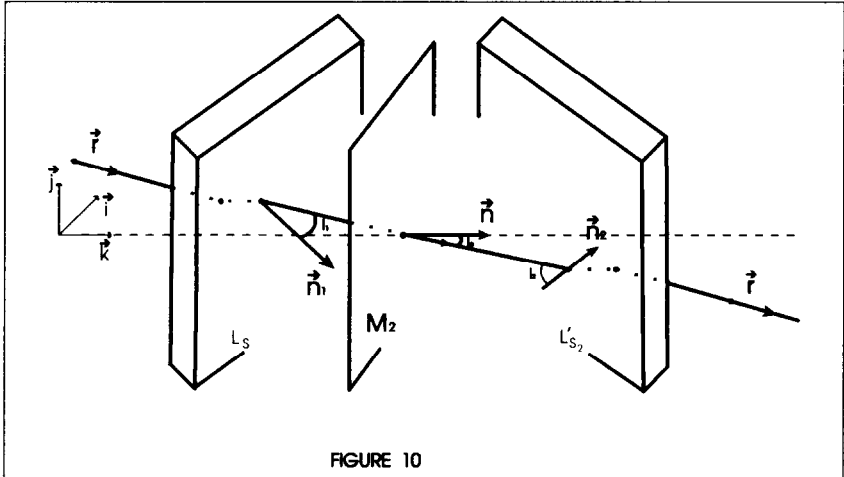


FIGURE 10

Si on se réfère à la figure 10, où apparaissent les angles i_1 , i_2 et i_0 respectivement avec les normales $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}$ aux lames L_s et L'_{s2} et à M_2 , on a :

$$\cos i_1 = \vec{n}_1 \cdot \vec{r}$$

$$\cos i_2 = \vec{n}_2 \cdot \vec{r}$$

$$\cos i_0 = \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

Or $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont parallèles au plan $y = 0$ et à 45° de l'axe $(O, \vec{k})$, d'où leurs coordonnées :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \cos i_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \gamma)$$

$$\cos i_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \gamma)$$

$$\cos i_0 = \gamma$$

α et β étant petits devant γ , on peut écrire

$$\gamma \cong 1 - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2)$$

Avec cette approximation, $n \cdot \cos r_1$ se met facilement sous la forme :

$$n \cos r_1 = (n^2 - 1 + \cos^2 i_1)^{1/2}$$

$$n \cos r_1 = \left[n^2 - 1 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma) \right]^{1/2}$$

$$n \cos r_1 = \left[n^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\beta^2 + 2\alpha\gamma) \right]^{1/2}$$

$$n \cos r_1 \cong \frac{1}{\sqrt{2}} (2n^2 - 1)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2n^2 - 1} \right)$$

On a donc

$$\Delta_{LS} = \frac{e}{\sqrt{2}} \left[(2n^2 - 1)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2n^2 - 1} \right) - (-\alpha + 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)) \right]$$

$$\Delta_{LS2} = \frac{e}{\sqrt{2}} \left[(2n^2 - 1)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2n^2 - 1} \right) - (\alpha + 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)) \right]$$

$$\Delta_1 = 2e_0 \left(1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right)$$

$$\text{et } \Delta = \frac{e}{\sqrt{2}} \left[2(2n^2 - 1)^{1/2} + \alpha^2 + \beta^2 \left(1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{1/2}} \right) \right]$$

$$+ 2e_0 \left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \right]$$

On obtient donc des franges qui sont des coniques d'axes Ox et Oy dont l'ellipticité dépend de e_0 distance $\overline{M_2 M'_1}$. Mais on peut remarquer qu'il n'est pas possible d'obtenir une teinte plate car les coefficients de α et de β ne peuvent pas s'annuler simultanément.

Examinons ce qui se passe lorsque la différence de marche est nulle au centre. Pour cela il faut donner à e_0 la valeur :

$$e_{00} = - \frac{e}{\sqrt{2}} \left[(2n^2 - 1)^{1/2} - 1 \right]$$

Notons que cette valeur, étant fonction de n , est également fonction de la longueur d'onde.

Nous avons alors :

$$\Delta = \frac{e\sqrt{2n^2 - 1}}{\sqrt{2}} \left[\alpha^2 + \frac{2n^2}{2n^2 - 1} \beta^2 \right]$$

Les franges sont elliptiques et il est intéressant de calculer la dimension de l'ellipse correspondant à la première frange.

Application numérique :

La lame a une épaisseur $e = 5 \text{ mm}$; $n = 1,517$; $\lambda = 589 \text{ nm}$. On observe les franges dans le plan focal d'une lentille de focale $f = 1 \text{ m}$. Ce plan est muni d'un repère orthogonal tel que

$\alpha = \frac{X}{f}$ et $\beta = \frac{Y}{f}$. Alors $e_{00} = -3,17 \text{ mm}$; les demi-axes de l'ellipse ont comme valeurs :

$$\text{sur le 1}^{\text{er}} \text{ axe : } a^2 = f^2 \frac{\sqrt{2}}{e\sqrt{2n^2 - 1}} \cdot \lambda \quad \text{donc } a = 9,3 \text{ mm}$$

sur le 2^{ème} axe : $b^2 = f^2 \frac{\sqrt{2}}{e} \frac{\sqrt{2n^2 - 1}}{2n^2} \cdot \lambda$ donc $b = 8,3 \text{ mm}$

On trouverait $e'_{00} = -3,248 \text{ nm}$ à $\lambda' = 405 \text{ nm}$ où $n = 1,530$.

Si l'on fixe e_0 à la valeur $3,17 \text{ mm}$, on a une différence de marche nulle au centre du champ pour

$\lambda = 589 \text{ nm}$ et un ordre d'interférence égal à $p = \frac{2[e'_{00} - e_0]}{\lambda'} \cong 385$ pour $\lambda' = 405 \text{ nm}$.

On obtient donc, en lumière blanche, du blanc d'ordre supérieur, et en lumière monochromatique, des franges en forme de coniques ; il est donc quasiment impossible d'exploiter un tel interféromètre et la mise en place d'une lame compensatrice est indispensable.

II-2 Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, l'effet de l'inclinaison des rayons, introduit par la seule lame séparatrice, sur la différence de marche.

Considérons pour simplifier une onde plane incidente normale à $M_{20} (\alpha = 0, \beta = 0)$, c.a.d. une source ponctuelle à l'infini, car l'étude d'une source à distance finie est plus compliquée.

- sur la voie 1 : cette onde, après réflexion sur L_S et M_1 , traverse L_S sous l'incidence $\pi/4 - \theta$;

- sur la voie 2 : l'onde traverse L_S sous l'incidence $\pi/4$, puis après réflexion sur M_2 , traverse deux fois L_S sous l'incidence $\pi/4 + \theta$.

La différence de marche entre les deux ondes planes émergentes et qui font entre elles un angle égal à 2θ est, en un point P de coordonnées (x', y', z') :

$$\Delta = \Delta_1 + 2\Delta_{LS} (\pi/4 + \theta) + \Delta_{LS} (\pi/4) - \Delta_{LS} (\pi/4 - \theta)$$

$$\text{où } \Delta_1 = 2e_0 \cdot 2\theta x'$$

$$\Delta_{LS} (i) = e[n \cos r - \cos i] \quad \text{avec } \sin i = n \sin r$$

En développant les termes Δ_{LS} au premier ordre en θ , on trouve :

$$\Delta = 2e_0 + e\sqrt{2} \left[(2n^2 - 1)^{1/2} - 1 \right] + \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} e \left(1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{1/2}} \right) \cdot 2x' \right] \theta + \dots$$

Comme en II-1, on peut, en se plaçant en lumière monochromatique, annuler le terme indépendant de θ en déplaçant M_2 de

$$e_0 = - \frac{e}{\sqrt{2}} \left[(2n^2 - 1)^{1/2} - 1 \right]$$

et l'on obtient des franges rectilignes centrées en

$$x' = \frac{3\sqrt{2}}{4} e \left[1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{1/2}} \right]$$

et d'interfrange $\frac{\lambda}{2\theta}$.

On peut donc, dans le cas de l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, et équipé seulement de la lame séparatrice, étudier les franges fournies en lumière monochromatique, et avec une source de petite dimension. Ceci limite très fortement les possibilités expérimentales d'un tel système, et milite en faveur de la mise en place d'une compensatrice.

III- Tolérances de fabrication

III- 1 Qualité des miroirs

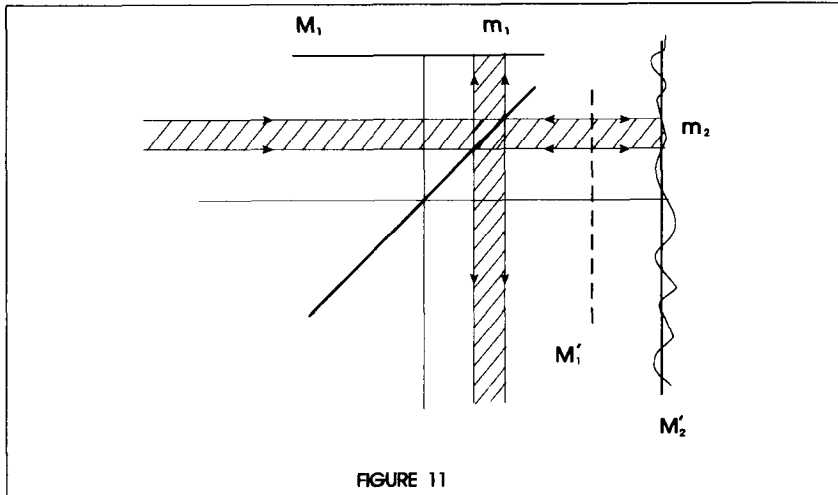


FIGURE 11

Considérons l'interféromètre réglé en lame d'air et éclairé en lumière monochromatique; intéressons-nous à l'intensité lumineuse au centre des anneaux. On peut décomposer cet interféromètre (figure 11: on considère M_1 parfait et M_2 avec des défauts d'épaisseur). en N interféromètres élémentaires (m_1 , m_2) dont l'épaisseur e varie de façon aléatoire autour d'une valeur moyenne e_0 avec une distribution $f(e)$. Nous avons donc : $dn = N f(e) de$. nombre d'interféromètres élémentaires dont l'épaisseur est comprise entre e et $e + de$. L'intensité au centre des anneaux sera égale à :

$$I = 2 I_0 \int \left(1 + \cos 2\pi \frac{\Delta_0}{\lambda} \right) dn$$

soit

$$I = N \cdot 2 I_0 \int \left(1 + \cos 2\pi \frac{2e}{\lambda} \right) f(e) de$$

Si l'on prend pour $f(e)$ une distribution uniforme, égale à $\frac{1}{\epsilon}$ pour $e_0 - \frac{\epsilon}{2} < e < e_0 + \frac{\epsilon}{2}$ et nulle ailleurs, on obtient

$$I = N \cdot 2 I_0 \left(1 + V \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2e_0 \right)$$

avec

$$V = \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} \epsilon}{\frac{2\pi}{\lambda} \epsilon}$$

Si l'on veut que la visibilité V ne soit pas trop affectée par l'amplitude du défaut ϵ

(par exemple $V = 0.9$) il faut que ϵ soit de l'ordre de $\frac{\lambda}{10}$.

C'est là l'ordre de grandeur habituel de la qualité requise pour les miroirs d'un interféromètre de Michelson.

III- 2 Tolérance sur l'identité d'épaisseur de la compensatrice et de la séparatrice

On considère l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. Les lames compensatrice et séparatrice, bien que fabriquées et usinées simultanément, présentent toujours une petite différence d'épaisseur $\Delta e = \varepsilon$. Le calcul de la différence de marche se fait comme précédemment ; il suffit simplement de remplacer e par ε . Les fabricants garantissent des différences d'épaisseur au plus égales à $1 \mu\text{m}$.

Si l'on prend cette valeur dans l'application numérique précédente, on trouve (en négligeant Δ_1) :

$$e_0 = -6,34 \cdot 10^{-4} \text{ mm pour } \lambda = 589 \text{ nm}$$

$$e'_0 = -6,49 \cdot 10^{-4} \text{ mm pour } \lambda = 405 \text{ nm}$$

On a donc une variation d'ordre d'interférence très faible, inférieure au dixième pour toutes les longueurs d'onde du spectre visible.

D'autre part, on a toujours des franges de forme elliptique ; et si l'on calcule les dimensions angulaires de la première frange brillante, comme on l'a fait précédemment, pour $\lambda = 589 \text{ nm}$ et $e_0 = -6,34 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ on trouve des angles de l'ordre de 40° ce qui peut être considéré dans la pratique comme une teinte plate. Mais dans cette position, les déphasages dus en particulier au traitement de la lame semi-réfléchissante ne sont plus négligeables et des effets chromatiques peuvent apparaître.

III- 3 Effet des défauts de planéité et de parallélisme des faces

III- 3.1 Planéité

Si l'on reprend la même démarche que pour l'étude de la planéité des miroirs, et en supposant ceux-ci parfaits, on trouve que l'intensité lumineuse au centre des anneaux peut se mettre sous la forme :

$$I = N \cdot 2I_0 \left(1 + V \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2e_0\right)$$

$$\text{avec : } V = \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} d \Delta_L}{\frac{2\pi}{\lambda} d \Delta_L}$$

$$d \Delta_L = \frac{2e_0}{\sqrt{2}} \left[(2n^2 \cdot 1)^{1/2} \cdot 1\right]$$

où e_0 représente l'écart maximum de la différence d'épaisseur des deux lames pour chaque interféromètre de Michelson élémentaire. Si l'on veut que, là également, $d \Delta_L$ soit de l'ordre de $\frac{\lambda}{10}$, il faut, avec le verre utilisé à $\lambda = 589 \text{ nm}$, que e_0 soit de l'ordre de $0,8 \frac{\lambda}{10}$; ceci impose à

chaque lame une planéité des faces de l'ordre de $\frac{\lambda}{20}$.

III- 3.2 Parallélisme des faces

Pour étudier l'effet du non-parallélisme des faces, on peut considérer une onde plane incidente dans l'interféromètre réglé de façon que M'_1 et M_2 soient parallèles. Les deux lames se comportent comme deux prismes de très petit angle, qui vont provoquer une déviation de cette onde. A la sortie, on aura donc deux ondes planes faisant entre elles un petit angle (fonction de la longueur d'onde). Si cet angle est faible, on peut l'annuler en jouant sur la rotation des miroirs lorsque l'on règle

l'interféromètre. Le parallélisme des lames utilisées est caractérisé par l'angle de leurs deux faces qui est en général inférieur à 30°. Dans ces conditions, le chromatisme introduit par ces lames prismatiques est négligeable.

IV- Réglage du parallélisme de la lame séparatrice et de la lame compensatrice : tolérances et réalisation

On suppose que ces deux lames sont optiquement parfaites et de même épaisseur e , et que l'interféromètre est réglé en lame d'air d'épaisseur e_0 .

Si, partant de la position où ces deux lames sont parallèles, on tourne la compensatrice autour d'un axe vertical d'un angle Δi , on crée sur le chemin 1, sans modifier la direction de propagation des ondes, une variation de différence de marche :

$$\delta = \frac{\partial \Delta_{LC}}{\partial i} \cdot 2 \Delta i$$

$$\text{avec } \Delta_{LC} = e [n \cos r \cdot \cos i]$$

$$\text{soit } \delta = 2e \sin i \left[1 - \frac{\cos i}{n \cos r} \right] \Delta i$$

la différence de marche au centre du champ est alors :

$$\Delta = 2e_0 + \delta$$

Si $\Delta i = 0$, $\Delta = 0$ pour $e_0 = 0$, et cela quelle que soit la longueur d'onde.

Si $\Delta i \neq 0$, Δ dépend de λ par l'intermédiaire de δ , c'est-à-dire de n et de r .

Dans le but d'étudier l'effet du chromatisme (en omettant Δc), et afin d'obtenir un ordre de grandeur de la tolérance sur le parallélisme des deux lames, on cherche à obtenir un ordre d'interférence $\frac{\Delta}{\lambda}$ nul pour $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$, et avec une variation au plus égale à $\frac{\lambda}{10}$ sur l'ensemble du domaine spectral visible (400 nm - 800 nm) de façon à obtenir une teinte plate achromatique.

Avec un verre courant, commercialisé sous l'appellation BK7, on obtient l'ensemble des valeurs suivantes :

$\lambda_i (\mu\text{m})$	0.405	0.502	0.589	0.694	0.786
$n (\lambda_i)$	1.530	1.521	1.517	1.513	1.511
$\delta (\lambda_i) (\text{mm})$	3.386 Δi	3.358 Δi	3.346 Δi	3.333 Δi	3.327 Δi
$\frac{\delta(\lambda_i)}{\lambda_i}$	98.8 Δi	23.9 Δi	0	-18.7 Δi	-24.2 Δi

Si l'on fixe l'épaisseur de la lame d'air à la valeur e_0 telle que

$$\Delta(0.589 \mu\text{m}) = 2e_0 + \delta(0.589 \mu\text{m}) = 0$$

$$\text{Soit } 2e_0 = -3.346 \text{ mm} \cdot \Delta i$$

on a pour $\frac{\Delta(\lambda_i)}{\lambda_i}$ les valeurs indiquées dans le tableau ci-dessus.

Il faut donc, en prenant la plus grande valeur de $\left| \frac{\Delta(\lambda_i)}{\lambda_i} \right|$, que $98.8 \Delta i = \frac{1}{10}$

soit

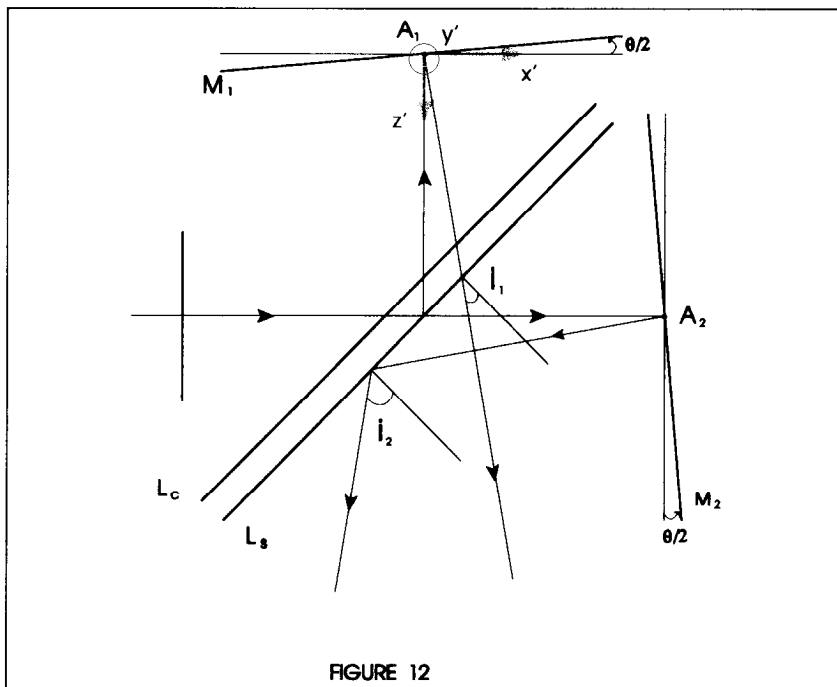
$$\Delta i = 10^{-3} \text{ rad ou } 3.5'$$

Il faudra donc régler le parallélisme de la séparatrice et de la compensatrice avec une précision au moins égale à 3.5'. Cette opération est facile à réaliser en observant les images réfléchies par les faces de ces deux lames lorsque l'interféromètre est éclairé par un collimateur constitué d'un objectif de 200 mm de focale, avec un diaphragme de 1 mm de diamètre en son foyer. Lorsque $\Delta i = 10^{-3} \text{ rad}$,

on obtient deux images distantes de $2\Delta i \times 200 \text{ mm} = 0.4 \text{ mm}$, donc pratiquement distantes d'une longueur égale au rayon du diaphragme.

V- Etude de l'interféromètre réel de Michelson réglé en coin d'air

On suppose que les lames séparatrice et compensatrice sont parfaites, d'épaisseur égale au micron près et strictement parallèles, que les miroirs M_1 et M_2 font un angle $\frac{\theta}{2}$ avec leurs positions $M_{1,0}$ et $M_{2,0}$, et que $e_0 = 0$.



Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, l'épaisseur de L_c et L_s n'étant pas représentée

Conformément à la remarque de la page 21, sur le non-stigmatisme rigoureux des couples (P, P_1) et (P, P_2) , nous considérons une source ponctuelle à l'infini dans le plan de figure, créant à l'entrée de l'interféromètre une onde plane tombant sur la lame séparatrice sous une incidence $\frac{\pi}{4} + i$ (i petit, de l'ordre d'un dixième de radian).

Cette onde plane traverse :

- sur la voie 1, deux fois la lame compensatrice sous l'incidence $\frac{\pi}{4} + i$, puis après réflexion sur M_1 , elle traverse ces deux lames sous l'incidence $i_1 = \frac{\pi}{4} + i - \theta$.

- sur la voie 2, les deux lames sous l'incidence $\frac{\pi}{4} + i$, puis, après réflexion sur M_2 , elle traverse la lame séparatrice deux fois sous l'incidence $i_2 = \frac{\pi}{4} + i + \theta$.

En un point P de coordonnées (x', y', z') , la différence de marche des vibrations transportées par ces deux ondes s'écrit, comme les phases des deux ondes incidentes en $A_1(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$ sont égales :

$$\Delta = [-\sin(\theta + i) \cdot \sin(\theta - i)]x' + [\cos(\theta + i) - \cos(\theta - i)]z' + \Delta_L$$

soit : $\Delta \cong -2\theta x' - 2\theta i z' + \Delta_L$

avec $\Delta_L = 2 \Delta_L(i_2) - 2 \Delta_L(i_1)$ et $\Delta_L(i) = e[n \cos i \cdot \cos i]$.

En développant les cosinus des angles i_1, i_2, r_1 et r_2 au deuxième ordre en $(i+\theta)$, on trouve :

$$\Delta_L = 2 e\sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{1/2}} \right] \cdot \theta + 2e\sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{3/2}} \right] \cdot i \cdot \theta.$$

Pour une longueur d'onde λ_0 , à laquelle correspond l'indice n_0 , la position de la frange d'ordre zéro, pour $i = 0$, sur un écran de cote z' quelconque, est :

$$x'_0 = e\sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{1/2}} \right] \cdot \theta.$$

La différence de marche ne dépend de i qu'au second ordre près dans le plan d'équation

$$z'_0 = e\sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{3/2}} \right] \cdot \theta$$

qui est le plan de localisation des franges.

Des calculs d'optique géométrique montreraient que le point $A_1(x'_0, 0, z'_0)$ est le conjugué astigmatique du point $A_1(0, 0, 0)$ à travers la lame séparatrice et la lame compensatrice, au voisinage d'une incidence de $\frac{\pi}{4}$. Le plan de localisation est donc perpendiculaire au plan de figure et passe par A_1 :

les franges sont rectilignes, également perpendiculaires au plan de figure, et d'interfrange $i = \frac{\lambda}{2\theta}$.

Le calcul précédent nous montre que Δ est fonction de la longueur d'onde par l'intermédiaire de n , et que ce phénomène s'amplifie avec θ .

Nous allons maintenant étudier l'influence de λ sur les interférences en nous plaçant dans le plan de localisation.

Dans ce plan :

$$\Delta = -2\theta x' + 2e\sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{1/2}} \right] \theta.$$

La frange achromatique est définie par

$$\left(\frac{\partial \Delta / \lambda}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = 0 \quad (\text{différence de phase stationnaire au voisinage de } \lambda_0).$$

Nous prendrons $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$, longueur d'onde voisine du maximum de sensibilité de l'oeil.

La position de la frange achromatique est :

$$x'_a = e\sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{1/2}} \right] \cdot \lambda_0 e\sqrt{2} \frac{2n}{(2n^2 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda}$$

$x'_0 = e\sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{(2n^2 - 1)^{1/2}} \right]$ étant la position de la frange d'ordre zéro ; pour $\lambda = 589 \text{ nm}$ et, en

prenant pour le verre BK7, une loi de dispersion définie par

$$n = 1,504 + \frac{0,00422}{\lambda^2} \quad (\lambda \text{ en } \mu\text{m})$$

on trouve $x'_0 = 3,346 \text{ mm}$

et $x'_a = 3,346 \text{ mm} + 0,076 \text{ mm}$.

Si l'on impose, pour avoir en lumière blanche des franges très voisines de celles que donnerait l'interféromètre idéal, la condition $x'_a - x'_o < \frac{i}{10}$ (i étant l'interfrange à $\lambda = 589 \text{ nm}$), on est conduit à :

$$0,076 < \frac{\lambda}{200} (\lambda \text{ en nm})$$

soit $0 < 1,3^\circ$.

Cet angle correspond à un interfrange de $0,76 \text{ mm}$; or, dans l'exploitation courante de l'interféromètre de Michelson, on travaille toujours avec des interfranges beaucoup plus grands, si bien que l'on peut considérer qu'avec le coin d'air également la compensation est très bonne. Nous n'avons pas tenu compte des déphasages chromatiques dus au traitement de la lame séparatrice. Cet effet, bien que faible, va prendre de l'importance au voisinage de la frange d'ordre zéro, et l'on observe, en particulier en lumière blanche, que les couleurs de part et d'autre de la frange centrale ne sont pas symétriques.

Troisième partie - Quelques notions sur la cohérence temporelle et son étude à l'aide de l'interféromètre de Michelson

I- Interférences en lumière polychromatique

Dans la première partie, nous avons écrit l'intensité au point P où interfèrent deux vibrations monochromatiques de nombre d'onde σ_0 , issues de la source ponctuelle O , sous la forme :

$$I = 2I_0 (1 + \cos 2\pi \sigma_0 \Delta).$$

Dans le cas d'une source polychromatique caractérisée par une densité spectrale d'intensité $i(\sigma)$, et en faisant l'hypothèse que les différents éléments spectraux $i(\sigma)d\sigma$ de la source sont incohérents entre eux, l'intensité devient :

$$I = 2 \int_0^{+\infty} i(\sigma) (1 + \cos 2\pi \sigma \Delta) d\sigma$$

soit, en posant $I_1 = \int_0^{+\infty} i(\sigma) d\sigma$

$$I = 2I_1 \left[1 + \frac{\int_0^{+\infty} i(\sigma) \cos 2\pi \sigma \Delta d\sigma}{I_1} \right]$$

On pose $\hat{i}(\Delta) = \int_0^{+\infty} i(\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta d\sigma$

$\hat{i}(\Delta)$ est appelé l'interférogramme, il peut s'écrire en changeant σ en $-\sigma$

$$\hat{i}(\Delta) = \int_{-\infty}^0 i(-\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta d\sigma$$

$$\text{D'où } \hat{i}(\Delta) = \int_0^{+\infty} i_p(\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} i_p(\sigma) e^{2\pi i\sigma\Delta} d\sigma$$

avec $i_p = \frac{1}{2} [i(\sigma) + i(-\sigma)]$ fonction paire.

L'interférogramme $\hat{i}(\Delta)$ est la transformée de Fourier (TF) de $i_p(\sigma)$ et, compte tenu des propriétés de cette transformation, nous avons également :

$$i_p(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{i}(\Delta) e^{-2\pi i\sigma\Delta} d\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{i}(\Delta) \cos 2\pi\sigma\Delta d\Delta$$

II- Exemples de sources polychromatiques

II- 1 Densité spectrale rectangulaire

$$i(\sigma) = i_0 \quad \text{si } |\sigma - \sigma_0| \leq \frac{\Delta\sigma}{2}$$

$$i(\sigma) = 0 \quad \text{si } |\sigma - \sigma_0| > \frac{\Delta\sigma}{2}$$

Nous avons alors :

$$\hat{i} = i_0 \cdot \Delta\sigma \left[1 + \frac{\sin\pi \Delta\sigma \Delta}{\pi \Delta\sigma \Delta} \cos 2\pi \sigma_0 \Delta \right]$$

$$\text{et } I = 2 i_0 \cdot \Delta\sigma \left[1 + \frac{\sin\pi \Delta\sigma \Delta}{\pi \Delta\sigma \Delta} \cos 2\pi \sigma_0 \Delta \right]$$

Le contraste des franges est égal à 1 pour $\Delta = 0$ et décroît pour s'annuler une première fois pour

$$\Delta = \frac{1}{\Delta\sigma}$$

Remarque : Une telle source peut s'obtenir en utilisant un monochromateur centré sur σ_0 , éclairé en lumière blanche, et utilisant une fente d'entrée de largeur très petite devant celle de la fente de sortie qui joue le rôle de source.

Exemple : Avec le monochromateur II_{20} , comportant un réseau de 1200 traits par millimètre de Jobin-Yvon, une fente de 0.1 mm à l'entrée et une fente de 2 mm à la sortie, on a une source de densité spectrale quasiment rectangulaire de $\Delta\lambda = 8$ nm.

II- 2 Densité spectrale gaussienne

$$i(\sigma) = i_0 e^{-\pi \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\Delta\sigma} \right)^2}$$

densité centrée en σ_0 et de largeur à mi-hauteur sensiblement égale à $\Delta\sigma$.

$$i(\Delta) = i_0 \cdot \Delta\sigma e^{-\pi(\Delta \cdot \Delta\sigma)^2} \cos 2\pi\sigma_0\Delta$$

$$\text{et } I = 2 i_0 \cdot \Delta\sigma \left[1 + e^{-\pi(\Delta \cdot \Delta\sigma)^2} \cos 2\pi\sigma_0\Delta \right]$$

Pour $\Delta = \frac{1}{\Delta\sigma}$, le contraste est égal à $e^{-\pi} \cong 0.04$, donc très faible.

II- 3 Densité spectrale lorentzienne

$$i(\sigma) = i_0 \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\Delta\sigma} \right)^2} \quad \Delta\sigma \text{ largeur à mi-hauteur}$$

$$\text{Nous avons } i(\Delta) = i_0 \cdot \Delta\sigma e^{-\pi|\Delta \cdot \Delta\sigma|} \cos 2\pi\sigma_0\Delta$$

et si $\Delta \cdot \Delta\sigma = 1$, le contraste est égal à 0.04 donc également très faible.

II- 4 Conclusion

On voit sur ces trois exemples que, dès que la différence de marche Δ devient supérieure à une différence $\Delta_c = \frac{1}{\Delta\sigma}$, le contraste des franges devient très faible. Cela résulte de la relation par

transformation de Fourier qui existe entre $i(\Delta)$ et $i(\sigma)$. Nous avons $\Delta_c \cdot \Delta\sigma = 1$ que l'on écrit

$$\text{également } \frac{\Delta_c}{\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

où : $\frac{\Delta_c}{\lambda} = p_c$ ordre d'interférence limite ou nombre de franges visibles N

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = F \text{ finesse de la raie.}$$

$$N = F$$

Exemple : Avec une lampe à vapeur de mercure basse pression, $\Delta\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$ nm pour la raie $\lambda = 546$ nm ; $N \cong 10000$ franges. Soit $\Delta_c = 10^4 \cdot \lambda = 5.46$ mm obtenue avec un déplacement du miroir du Michelson $e_0 = 2.73$ mm tout à fait réalisable. L'interféromètre est donc bien adapté à l'étude de la largeur des raies spectrales. La dernière conclusion que l'on peut tirer de cette étude est que les phénomènes observables en interférométrie à deux ondes, mettant en jeu des sources polychromatiques, peuvent s'interpréter simplement à partir de la seule connaissance de la densité spectrale d'énergie $i(\sigma)$ de la source, fonction que l'on peut connaître de façon exacte, à la résolution près du spectromètre utilisé pour l'acquérir. Notons également que l'acquisition de l'interférogramme et le calcul de sa TF permettent de retrouver la densité spectrale de la source et constituent actuellement la spectrométrie interférentielle par TF, qui joue un rôle très important dans les problèmes d'analyse spectrale, en particulier dans l'infrarouge. L'interférométrie permet aussi de valider les modèles que l'on peut élaborer pour représenter la vibration lumineuse, et c'est sur ce point que nous allons nous pencher maintenant.

III- Modèle de source incohérente

III- 1 Introduction

En I. nous avons mis l'expression de l'intensité au point P où interfèrent les deux vibrations sous la forme :

$$I = I_1 \left(1 + \frac{i(\Delta)}{i(0)} \right)$$

$$\text{avec } i(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} i_p(\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta \, d\sigma.$$

Dans la suite on utilisera les variables :

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi c\sigma$$

$$\text{et } \tau = \frac{\Delta}{c}$$

$$\text{On aura alors : } i(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} i_p\left(\frac{\omega}{2\pi c}\right) \cos \omega\tau \cdot \frac{d\omega}{2\pi c}$$

Soit, en posant

$$g(\tau) = i(\tau) \text{ et } i_p\left(\frac{\omega}{2\pi c}\right) \frac{d\omega}{2\pi c} = G_p(\omega) d\omega$$

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_p(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega$$

$$\text{et } G_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau$$

III- 2 Modèle simple de source incohérente

On considère une source ponctuelle formée de N atomes dans un gaz, excités par une décharge électrique. Ces émetteurs produisent chacun un champ de même fréquence ω_0 et de même amplitude A_0 , avec une phase $\varphi_k(t)$ où ($k \in \{1, 2, \dots, N\}$) dépendant de l'émetteur considéré. La vibration lumineuse ainsi produite en un point P éloigné de cette source s'obtient comme une superposition scalaire de tous les champs :

$$S(t) = A_0 \sum_{k=1}^N e^{j(\omega_0 t + \varphi_k)}$$

On suppose de plus que chaque émetteur change de phase φ_k de façon aléatoire, après un temps lui-même aléatoire.

III- 2.1 Théorème de Wiener-Khinchine

Si l'on éclaire l'interféromètre de Michelson avec une telle source, l'intensité $I(P)$ au point d'observation P est donnée par

$$I(P) = \overline{|S(t) + S(t + \tau)|^2}$$

$$I(P) = \overline{|S(t)|^2} + \overline{|S(t+\tau)|^2} + 2 \operatorname{Re} \overline{S(t) \cdot S^*(t+\tau)}$$

$$\overline{|S(t)|^2} = \overline{|S(t+\tau)|^2} = A_0^2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i(\varphi_{\mathbf{k}'} - \varphi_{\mathbf{k}})}$$

L'hypothèse du caractère aléatoire de $\varphi_{\mathbf{k}}$ entraîne que seuls sont différents de zéro -et égaux à un- les termes de la suite pour lesquels $\mathbf{k}=\mathbf{k}'$.

D'où, en posant $N A_0^2 = I_0 = \overline{S(t) \cdot S^*(t)}$ et $I_1 = 2I_0$

$$I(P) = I_1 \left[1 + \frac{2 \operatorname{Re} \overline{S(t) \cdot S^*(t+\tau)}}{I_1} \right]$$

On définit la fonction de corrélation du champ -également appelée degré de cohérence temporelle- par :

$$g(\tau) = \frac{\overline{S(t) \cdot S^*(t+\tau)}}{\overline{S(t) \cdot S^*(t)}}$$

d'où $I(P) = I_1 [1 + \operatorname{Re} g(\tau)]$

En identifiant avec le calcul fait à partir de la densité spectrale :

$$I(P) = I_1 \left[1 + g(\tau) \right]$$

On voit immédiatement que

$$g(\tau) = \operatorname{Re} g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_p(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

On retrouve ici le théorème de Wiener-Khinchine :

La partie réelle de la fonction de corrélation du champ $S(t)$ est égale à la TF de la densité spectrale d'énergie.

III- 2.2 Modèle du train d'onde

Revenons au modèle de source décrit précédemment, et supposons que le changement de phase de l'émission d'un atome soit dû à la collision avec un autre atome. Appelons $P(t)$ la probabilité pour que l'émission de l'atome ne change pas de phase entre les instants 0 et t, c'est-à-dire que l'atome ne subisse pas dans cet intervalle de temps un choc avec un autre atome.

D'après la théorie cinétique des gaz parfaits, la probabilité pour qu'un atome subisse une collision pendant un intervalle de temps dt , est uniforme et vaut $\frac{dt}{\tau_c}$ où τ_c est le temps caractéristique de

collision, déterminé par le libre parcours moyen ℓ_c , et la vitesse moyenne $\bar{v}$: $\tau_c = \frac{\ell_c}{\bar{v}}$.

Notre but, dans ce qui va suivre, est de déterminer la loi $P(t)$.

Appelons A l'évènement : "pas de collision entre t et t+dt" ;

B l'évènement : "pas de collision entre 0 et t".

Calculons la probabilité pour qu'il n'y ait pas de collision entre t et t+dt (évènement A) sachant qu'il n'y en a pas eu entre 0 et t (évènement B) :

$$P(A \text{ si } B) = \frac{P(A \text{ et } B)}{P(B)}$$

Or : $P(A \text{ et } B) = P(t + dt)$ et $P(B) = P(t)$

L'évènement "une collision entre t et t+dt" est le contraire de l'évènement A si B.

$$\text{Donc } \frac{P(t+dt)}{P(t)} = 1 - \frac{dt}{\tau_c}$$

$$P(t+dt) = P(t) \left(1 - \frac{dt}{\tau_c} \right)$$

$$\text{D'où } \frac{P'(t)}{P(t)} = - \frac{1}{\tau_c}$$

$$\text{et } P(t) = e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

Nous négligeons le facteur de normalisation de cette loi de probabilité, sans importance du point de vue des conséquences physiques. $P(t)$ tend vers zéro pour t grand devant τ_c . Si l'on fait une observation sur un temps court devant τ_c , $S(t)$ nous apparaît comme une vibration quasi-monochromatique avec une phase bien définie ; par contre, si le temps d'observation est grand devant τ_c , $S(t)$ se présente comme une succession de trains d'onde dont les phases varient de façon aléatoire.

III- 3 Application au calcul du degré de cohérence $g(\tau)$

Appliquons ce modèle au calcul de $g(\tau)$

$$g(\tau) = \frac{\overline{S(t) \cdot S^*(t+\tau)}}{|\overline{S(t)}|^2}$$

$$\overline{S(t) \cdot S^*(t+\tau)} = A_0^2 e^{j\omega_0 \tau} \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^N e^{j(\varphi_k(t) - \varphi_{k'}(t+\tau))}$$

Seuls les termes où $k = k'$ peuvent donner une contribution non nulle à cette somme.

$$\text{Donc } \overline{S(t) \cdot S^*(t+\tau)} = A_0^2 e^{j\omega_0 \tau} \sum_{k=1}^N e^{j(\varphi_k(t) - \varphi_k(t+\tau))}$$

Pour les atomes qui n'ont pas subi de choc, donc dont les vibrations n'ont pas été déphasées entre t et $t + \tau$, nous avons $e^{j(\varphi_k(t) - \varphi_{k'}(t+\tau))} = 1$. Pour les autres, la contribution est nulle. Or la proportion du nombre d'atomes qui n'ont pas subi de choc est égale, par définition même de la probabilité, à $P(\tau)$

$$\text{D'où : } \overline{S(t) \cdot S^*(t+\tau)} = A_0^2 e^{j\omega_0 \tau} (N e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}) = I_1 e^{j\omega_0 \tau} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$$

$$\text{et } g(\tau) = e^{j\omega_0 \tau} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$$

Nous avons supposé dans notre calcul $\tau \geq 0$. Si τ est négatif, on peut refaire le même calcul en remplaçant τ par $-|\tau|$ et on trouve en définitive :

$$g(\tau) = e^{j\omega_0 \tau} \cdot e^{-\frac{|\tau|}{\tau_c}}$$

La densité spectrale d'énergie correspondant à ce modèle, en utilisant le théorème de Wiener-Khinchine, est alors :

$$G_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|\omega|\tau}{\tau_c}} \cos \omega \tau \, d\tau$$

$$G_p(\omega) = \frac{2\tau_c}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \tau_c^2 (\omega - \omega_0)^2}$$

$$\text{ou } i_p(\sigma) = 2\pi c G_p(\omega) = 2 \cdot c \tau_c \cdot \frac{1}{1 + 4\pi^2 c^2 \tau_c^2 (\sigma \pm \sigma_0)^2}$$

qui est une distribution lorentzienne centrée en σ_0 si $\sigma > 0$ et de largeur à mi-hauteur

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\pi c \tau_c}. \text{ Or nous avons défini en II.3 l'ordre d'interférence limite par } \Delta_\epsilon = \frac{1}{\Delta\sigma}. \text{ Soit :}$$

$$\Delta_\epsilon = \pi c \tau_c.$$

IV- Modèle de source cohérente : laser à gaz

IV- 1 Modèle du train d'onde

Dans une source cohérente, les émetteurs ont leurs vibrations en phase. Cette mise en phase est obtenue dans la construction de l'onde laser à l'intérieur de la cavité Fabry-Pérot, dans laquelle le milieu amplificateur est placé. A chaque instant, l'émission induite est en phase avec l'onde qui se propage dans la cavité, si bien qu'il existe une relation de phase bien définie entre tous les émetteurs. Dans de telles sources, il existe néanmoins des fluctuations de phase, pouvant être caractérisées par un temps de corrélation τ_c . La grande différence avec le modèle de source incohérente étudié ci-dessus est que ces fluctuations affectent tous les émetteurs ensemble. La lumière émise peut ainsi être décrite par une vibration du type :

$$S(t) = A_0 e^{j\omega_0 t} e^{-j\Phi(t)}$$

où la phase $\Phi(t)$ correspond à un processus aléatoire. Avec une telle source éclairant un interféromètre à deux ondes, le degré de cohérence temporelle s'écrit :

$$g(\tau) = e^{j\omega_0 \tau} \overline{e^{j[\Phi(t) - \Phi(t+\tau)]}}$$

Si l'on compare source incohérente et source laser, on a :

$$\text{source incohérente : } \overline{S_i(t) \cdot S_i^*(t+\tau)} = A_0^2 e^{j\omega_0 \tau} \sum_{k=1}^N \overline{e^{j[\varphi_k(t) - \varphi_k(t+\tau)]}}$$

$$\text{source laser : } \overline{S_L(t) \cdot S_L^*(t+\tau)} = N^2 A_0^2 e^{j\omega_0 \tau} \overline{e^{j[\Phi(t) - \Phi(t+\tau)]}}$$

Ces deux expressions utilisent les variables aléatoires

$$x_k(\tau) = \varphi_k(t) - \varphi_k(t+\tau)$$

$$X(\tau) = \Phi(t) - \Phi(t+\tau)$$

où $\varphi_k(t)$ et $\Phi(t)$ sont des processus effectuant une "marche au hasard". L'étude statistique de cette marche au hasard ou du mouvement brownien^{iv} montre, comme nous l'avons démontré dans le cas de la source incohérente, que

$$\overline{e^{j[\Phi(t) - \Phi(t+\tau)]}} = e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$$

τ_c étant le temps caractéristique pendant lequel $\Phi(t)$ est constant.

Remarque : le caractère aléatoire de Φ_k entraîne que

$$S_s(t) = A_0 e^{j\omega_0 t} \sum e^{j\Phi_k(t)}$$

suit un processus aléatoire effectuant une marche au hasard à deux dimensions dans le plan complexe. Les fluctuations de phase se traduisent donc par des fluctuations d'intensité.

Par contre, $S_s(t) = A_0 e^{j\omega_0 t} e^{j\Phi(t)}$; dans le plan complexe, l'affixe de $S_s(t)$ se déplace de façon aléatoire sur un cercle et l'intensité ne présente donc pas de fluctuations.

La densité spectrale d'énergie correspondant à $S_s(t)$ est, en utilisant le théorème de Wiener-Khinchine, une densité lorentzienne de largeur à mi-hauteur $\Delta\omega = \frac{2}{\tau_c}$. Dans le cas de l'émission

induite, on a des temps caractéristiques τ_c beaucoup plus grands que dans le cas de l'émission spontanée, ce qui doit nous conduire à des finesse de raies également beaucoup plus grandes.

IV- 2 Spectre de l'émission laser

Dans le cas, par exemple, d'un laser Hélium-Néon, le mélange est placé dans un tube de petit diamètre (quelques millimètres) et de quelques décimètres de longueur ; la raie de longueur d'onde $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ - soit $\nu = 4.74 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ - est associée à une transition du néon ($3s - 2p$). L'émission stimulée peut avoir lieu à l'intérieur du domaine spectral de la raie d'émission spontanée de cette transition, de largeur $\Delta\nu = 10^9 \text{ Hz}$. Ce mélange est placé à l'intérieur d'une cavité Fabry-Pérot de longueur ℓ , qui favorise uniquement l'amplification des modes longitudinaux de fréquence

ν_k telle que $\nu_k = k \frac{c}{2\ell}$. L'écart de fréquence entre deux ondes est donc $\Delta\nu_m = \frac{c}{2\ell}$. Pour

$\ell = 30 \text{ cm}$, $\Delta\nu_m = 0.5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$.

Une telle cavité permet donc l'émission de deux modes. La largeur de chaque mode dépend fortement des instabilités de la cavité : cette largeur ne peut de toute façon être inférieure à une limite fondamentale $\delta\nu_{ST}$ "largeur de SCHALOW-TOWNES" liée au champ de phase aléatoire correspondant à l'émission inévitable de photons spontanés sur le même mode. Si l'on prend, par

exemple $\delta\nu = \frac{1}{100} \Delta\nu_m$, on trouve $\Delta\nu = \frac{c}{\delta\nu} = 60 \text{ m}$.

V- Expériences

V- 1 Expériences en projection

Pour illustrer la relation qui a été établie entre l'interférogramme et la densité spectrale d'énergie, on présente l'un à côté de l'autre, sur le même écran, le spectre d'une source de lumière blanche à l'aide d'un prisme à vision directe, et les franges de l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, avec la frange centrale au milieu du champ. L'observation de l'écran se faisant avec l'œil comme détecteur, on peut considérer que le spectre de la source $L_0(\sigma)$ est centré à $0.6 \mu\text{m}$, avec une largeur à mi-hauteur de l'ordre de $0.2 \mu\text{m}$; il a donc une finesse de 3, et l'on ne voit effectivement que quelques franges de part et d'autre de la frange centrale. On modifie la densité spectrale de l'ensemble œil-source en plaçant des filtres de plus en plus sélectifs (verre coloré vert, filtre interférentiel vert centré à $\lambda=546 \text{ nm}$) ; on observe que le nombre de franges visibles dans le champ augmente. La mesure de leur nombre permet d'évaluer la bande passante du filtre. On peut réaliser également un filtre périodique avec une lame de quartz d'épaisseur $e = 1 \text{ mm}$, taillée parallèlement à l'axe, et placée entre un polariseur et un analyseur, dont les directions sont perpendiculaires entre elles, et à 45° des axes de la lame. Un tel dispositif a une transparence $\tau = \tau_0(1 - \cos 2\pi\sigma \Delta_0)$

avec $\Delta_0 = e \Delta n$, Δn étant la biréfringence de la lame de quartz: $\Delta n \approx 10^{-2}$; cette transparence est périodique en σ , et sa périodicité est de l'ordre de 10^3 cm^{-1} . Si ce filtre est placé dans le spectrographe, on voit sur l'écran une dizaine de cannelures. Si on le place dans l'interféromètre, on observe l'interférogramme :

$$i(\Delta) = \int \tau L_0(\sigma) \cos 2\pi \sigma \Delta d\sigma =$$

$$= \tau_0 \int L_0(\sigma) \cos 2\pi \sigma \Delta d\sigma + \frac{1}{2} \tau_0 \int L_0(\sigma) \cos 2\pi(\Delta + \Delta_0)\sigma d\sigma + \frac{1}{2} \tau_0 \int L_0(\sigma) \cos 2\pi(\Delta - \Delta_0)\sigma d\sigma$$

$$i(\Delta) = \tau_0 i_0(\Delta) + \frac{1}{2} \tau_0 i_0(\Delta + \Delta_0) + \frac{1}{2} \tau_0 i_0(\Delta - \Delta_0)$$

On observe donc, au facteur τ_0 près, les mêmes franges que sans le filtre $i_0(\Delta)$, et des franges identiques, centrées respectivement en $+\Delta_0$ et en $-\Delta_0$ et de contraste $\frac{1}{2}$.

La mesure du déplacement de la frange centrale, donc de Δ_0 , et celle de l'épaisseur e de la lame, permettent d'évaluer la valeur moyenne de Δn dans le spectre visible.

Remarque : Si l'on place les différents filtres, non pas devant la source, mais devant l'oeil qui regarde l'écran, on observe exactement le même interférogramme. Il faut donc être bien conscient que la densité spectrale que l'on introduit ci-dessus est la densité de la source vue par le détecteur à travers les composantes de l'interféromètre (lames, objectifs,...) : si $i(\sigma)$ est la densité spectrale de la source, $\tau(\sigma)$ la transparence des composants et $s(\sigma)$ la sensibilité spectrale du détecteur, il faut dans les calculs remplacer $i(\sigma)$ par $i(\sigma) \cdot \tau(\sigma) \cdot s(\sigma)$.

V-2 Expériences en enregistrement

Ces expériences se prêtent bien à l'évaluation de la largeur d'une raie, ou à la mesure de l'écart entre deux raies (raies jaunes du mercure ou du sodium). Pour les réaliser, il faut s'affranchir de la dimension spatiale de la source qui, comme on l'a vu dans le cas du coin d'air, peut jouer sur le contraste des franges : pour ce faire, on utilise l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air, avec les anneaux localisés dans le plan focal d'un objectif, ce qui permet de régler la position d'un diaphragme disposé au centre des anneaux, devant le détecteur, qui peut être un photomultiplicateur ou une photodiode au silicium. Dans ce dernier cas, le détecteur étant sensible également dans l'infra-rouge, il faut absolument éliminer les raies infra-rouges que peut émettre la source en disposant dans le montage un filtre interférentiel centré sur la raie ou le doublet que l'on veut analyser. La dimension du diaphragme placé devant le photodétecteur doit être d'autant plus petite que la différence de marche à atteindre est plus grande. On montre que son rayon angulaire doit être au plus égal à :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{2\Delta}}$$

Dans le cas de la raie verte du mercure, $\Delta = 5.46 \text{ mm}$:

$$\alpha \approx 0.7 \cdot 10^{-2}$$

d'où $r = f \alpha \approx 1.4 \text{ mm}$ pour $f = 200 \text{ mm}$.

Annexe -
***Protocole de réglage de l'interféromètre
 (observation à l'oeil)***

Dans ce protocole, on utilise les résultats de l'étude développée sur la cohérence spatiale et temporelle dans les parties 1,2 et 3.

1- Premier contact avec l'interféromètre : on rend les deux bras à peu près symétriques (au mm près) en utilisant éventuellement un régleur (sans toucher à la surface des miroirs) par une simple observation à l'oeil, puis on positionne les vis de réglage de M_1 et M_2 à mi-course.

2- Réglage du parallélisme des lames séparatrice et compensatrice : le plus simple consiste à éclairer l'interféromètre à l'aide d'un collimateur constitué d'un diaphragme d'ouverture variable (2 mm - 40 mm) placé au foyer d'un objectif de 200 mm de focale. Pour régler ce parallélisme, on occulte une des voies de l'interféromètre grâce à un carton placé devant l'un des miroirs ; puis on utilise comme source d'éclairage une lampe à vapeur de mercure basse pression ou une lampe de sodium (on pourrait utiliser une lampe blanche, mais pour la suite l'une de ces deux lampes spectrales est indispensable). Si l'on observe à l'oeil nu accommodant à l'infini, on voit une série d'images du diaphragme (fermé à sa dimension minimum) dues aux réflexions entre les deux lames; une de ces images, due à la réflexion sur L_s est beaucoup plus lumineuse que les autres. En jouant sur les vis de réglage de la compensatrice, on fait en sorte de superposer au mieux toutes ces images.

3- Premier réglage du parallélisme de M_1 et de M'_2 : A ce stade, l'interféromètre a toutes les chances de présenter un coin d'air avec un angle θ important et une différence de marche $\Delta_0 = 2e_0$ importante également. Dans une première étape, on va diminuer l'angle θ . A partir du montage précédent, on dégage la deuxième voie de l'interféromètre ; on doit alors observer deux images du diaphragme d'autant plus séparées que l'angle θ est grand. En jouant sur les deux vis de réglage grossier de M_2 , on superpose ces deux images ; avec ces deux vis encore, on parfait le réglage jusqu'à l'apparition de franges localisées sur les miroirs. Si l'on ne voit pas ces franges, il peut y avoir deux raisons :

- l'oeil est trop près des miroirs et ne peut accommoder sur ceux-ci : la solution consiste à s'éloigner de l'interféromètre.

- si cet essai ne donne rien, il est possible que, malgré les précautions prises en 1, la différence de marche soit trop importante pour la cohérence temporelle de la lampe utilisée ; ou encore on peut être dans une anticoincidence des deux raies jaunes de la lampe au sodium. On joue alors sur la translation du miroir M_2 : cette translation peut se faire rapidement car, avec ces deux sources lumineuses, on a des franges sur un domaine de différence de marche important.

Les franges étant visibles, on les élargit, toujours à l'aide des vis de réglage grossier si l'interfrange est très petit, puis avec les vis de réglage fin dès que l'on n'a plus qu'une dizaine de franges sur les miroirs, et cela jusqu'à l'obtention d'une teinte plate sur les miroirs.

4- Réglage fin du parallélisme de M_1 et de M'_2 : en accommodant maintenant à l'infini, on voit des anneaux. L'observation se faisant à l'oeil, et du fait de la diaphragmation par la pupille de l'oeil, l'observation isole une portion du couple de miroirs (M_1 M'_2) présentant une différence de marche $2e$; si les deux miroirs ne sont pas parallèles, cette différence de marche va varier lorsque l'oeil se déplace d'un bord à l'autre des miroirs et entraîner un défilement des anneaux. En déplaçant l'oeil horizontalement de gauche à droite et de droite à gauche alternativement, tout en actionnant la vis de réglage fin de M_1 qui fait tourner ce miroir autour d'un axe vertical, on arrête ce défilement. On fait de même pour le réglage fin de M_1 autour de l'axe horizontal.

5- Recherche du contact optique : ensuite on translate M_2 afin d'augmenter le rayon des anneaux jusqu'à ne plus voir qu'une teinte uniforme. Pour ce dernier réglage, on utilise les résultats

établis sur la cohérence temporelle (3^{ème} partie) : en lumière blanche, on n'obtient des franges, et en petit nombre, qu'au voisinage de la différence de marche nulle. On éclaire donc l'interféromètre avec une lampe quartz-iode et l'on translate le miroir M_2 à l'aide de la vis micrométrique qui commande cette translation, jusqu'à l'obtention de couleurs qui défilent dans le champ, puis d'une teinte blanche uniforme. Au sujet de cette vis, il faut avoir en mémoire qu'une division du tambour représente une translation d'un centième de millimètre, donc une variation de différence de marche de 20 μm , ce qui correspond au défilement au centre du champ d'une quarantaine de franges. Aussi faut-il, dans cette opération, agir très lentement dans la rotation de la vis micrométrique. Pour rendre cette recherche de la différence de marche nulle moins fastidieuse, on peut se placer en coin d'air et mettre devant la source blanche un bon filtre interférentiel -de 10 nm de bande passante par exemple- : dans ces conditions, on a une cinquantaine de franges de part et d'autre de la frange de différence de marche nulle, donc beaucoup plus qu'en lumière blanche : d'autre part, la symétrie du contraste des franges autour de la frange centrale permet de trouver cette dernière beaucoup plus rapidement.

Remerciements

Je remercie Mireille Tadjeddine qui m'a encouragé à écrire cet article dans le cadre d'une formation des professeurs de classe préparatoire des académies de Paris Versailles et Créteil, qui s'est tenue à l'ENS Cachan en octobre 1996.

J'ai pu également bénéficier pour la réalisation de ce document de très nombreuses et fructueuses discussions avec mes collègues André Galais et Gisèle Krebs, en particulier sur le plan expérimental : qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Luc Dettwiller a relu le manuscrit et m'a fait part de remarques pertinentes sur le fond et la forme, remarques dont j'ai tenu le plus grand compte et qui ont permis d'enrichir cet article : je le remercie très vivement. Enfin un dernier merci à Zina Challal et Christian Ollier qui ont participé à la réalisation du document.

Gérard FORTUNATO
Professeur à l'ENS Cachan

¹ A. L. FYMAT, "Jones's Matrix Representation of Optical Instruments. 1: Beam Splitters", Appl. Opt., 10, 2499, 1971.

² A. L. FYMAT, "Jones's Matrix representation of Optical Instruments. 2: Fourier Interferometers (Spectrometers and Spectropolarimeters)", Appl. Opt., 10, 2711, 1971.

³ A. L. FYMAT, "Polarization Effects in Fourier Spectroscopy. 1: Coherency Matrix Representation", Appl. Opt., 11, 160, 1972.

⁴ "Eléments de physique statistique", Bernard DIU, HERMANN, 1989

⁵ "Introduction aux lasers et à l'optique quantique", Tome 1 - Grynberg, Aspect et Fabre, Ecole Polytechnique, Edition du bicentenaire, 91128 Palaiseau cedex