

INTERFEROMETRE DE MICHELSON QUELQUES IDÉES SIMPLES.

Jean-Pierre Lecardonnel

91400 ORSAY

ad.élec. : lecardo@club-internet.fr

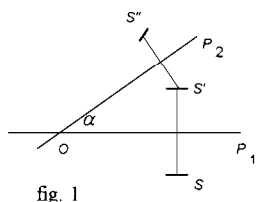
Les nouveaux programmes des classes préparatoires aux grandes écoles de seconde année, sections PC et PSI, attribuent à l'interféromètre de Michelson, notamment en travaux pratiques, un rôle accru. Pour de nombreux collègues cet instrument reste redouté, tant du point de vue expérimental (souvent, ils ne l'ont pas utilisé depuis des années) que théorique : certaines notions, comme celle de « localisation » ne paraissent pas faciles à faire passer auprès des élèves. Je voudrais proposer ici deux points de vue susceptibles, peut-être, de faciliter la présentation de cet appareil.

I. Le schéma équivalent

Comme on le sait, les raisonnements sur l'interféromètre se trouvent facilités si on le remplace par un appareil fictif « équivalent », constitué d'une « lame d'air » à faces réfléchissantes, parallèles ou non. Certains collègues ont proposé d'introduire cette propriété en effectuant le pliage, autour de l'axe constitué par la séparatrice, d'une feuille de papier calque sur lequel l'interféromètre a été représenté. C'est en effet une méthode simple et frappante pour les élèves. Mais il n'est pas difficile d'étayer cette présentation à l'aide d'un raisonnement géométrique convaincant et simple, utilisant de surcroît une propriété étudiée par les élèves en mathématiques¹.

Dans la suite, je supposerai établie l'équivalence entre le bloc séparatrice-compensatrice (convenablement réglée) et une séparatrice infiniment mince. Je préfère d'ailleurs, en ce qui me concerne, n'aborder la question de la compensatrice qu'après une première présentation au cours de laquelle l'épaisseur de la séparatrice n'est pas prise en compte.

1. Petit rappel géométrique



Je ne fais que rappeler ci-dessous une propriété classique, sans prétendre à la rigueur de nos collègues mathématiciens; on me pardonnera cette légèreté...

Considérons deux plans (P_1) et (P_2), se coupant suivant une droite (Δ). Désignons par O la trace de (Δ) dans le plan de la figure ci-contre (fig.1) et par α l'angle orienté entre (P_1) et (P_2). Considérons enfin un point S et ses transformés S' et S'' dans les « réflexions » (merci, collègues mathématiciens!)

sur (P_1) puis (P_2). Il est bien clair que :

- S , S' et S'' sont équidistants de (Δ) (propriété de la médiatrice d'un segment) ;
- l'angle $\widehat{SOS''}$ est égal à 2α (valeur et signe).

Le point S'' se déduit donc de S dans une rotation d'angle 2α autour de (Δ) , ce que je noterai dans la suite :

$$S'' = \mathcal{R}_{\Delta, 2\alpha}(S).$$

Il faut remarquer que l'angle α est en fait défini à π près (angle de deux plans). L'angle 2α l'est donc à 2π près, et la rotation est définie sans ambiguïté.

En notant maintenant $\mathcal{G}_P$ l'opération « réflexion sur un plan (P) », et « $*$ » la composition de deux opérations, nous pouvons écrire aussi (attention à respecter l'ordre!) :

$$S'' = \mathcal{G}_{P_2} * \mathcal{G}_{P_1}(S),$$

d'où finalement la propriété bien connue :

$$\mathcal{G}_{P_2} * \mathcal{G}_{P_1} = \mathcal{R}_{\Delta, 2\alpha}.$$

2. Application à l'interféromètre

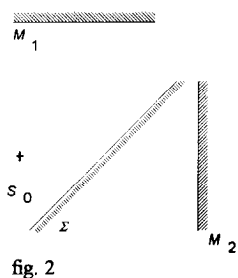


fig. 2

a. Le premier faisceau

La figure 2 schématise l'interféromètre lorsqu'il est éclairé par une source ponctuelle S_0 , en supposant nulle l'épaisseur de la séparatrice. La figure 3 indique la position des images successives de S_0 correspondant au faisceau lumineux (1). Celui-ci résulte d'une réflexion sur la séparatrice (image S'_1), puis d'une réflexion sur le miroir M_1 . Il semble provenir de la source ponctuelle S_1 , image de S'_1 donnée par ce miroir. La compréhension du trajet de ce faisceau ne comporte aucune difficulté.

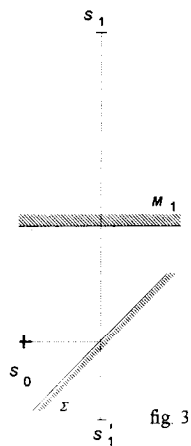


fig. 3

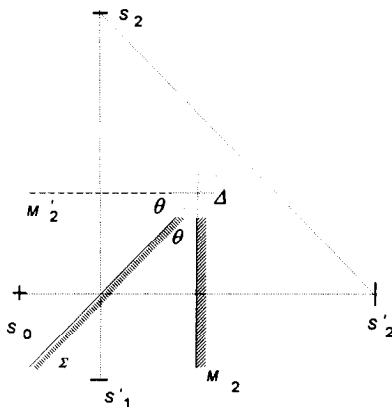


fig. 4

b. Le second faisceau

Il est issu (fig. 4), pour un observateur situé en « sortie » de l'interféromètre, de l'image ponctuelle S_2 de S_0 fournie successivement par M_2 puis par la séparatrice Σ .

Avec les notations ci-dessus : $S_2 = \mathcal{G}_\Sigma * \mathcal{G}_{M_2} (S_0)$.

D'après la propriété rappelée au 1., nous pouvons écrire aussi :

$$S_2 = \mathcal{R}_{A, 2\theta} (S_0).$$

Notons maintenant M'_2 le plan symétrique de M_2 par rapport à Σ . Il forme l'angle θ (négatif sur la figure) avec Σ . Considérons l'opération :

$$\mathcal{G}_{M'_2} * \mathcal{G}_\Sigma.$$

D'après la propriété rappelée : $\mathcal{G}_{M'_2} * \mathcal{G}_\Sigma = \mathcal{R}_{A, 2\theta}$.

Nous constatons que : $\mathcal{G}_\Sigma * \mathcal{G}_{M_2} = \mathcal{G}_{M'_2} * \mathcal{G}_\Sigma$.

Pour former S_2 , il suffit donc d'effectuer successivement une réflexion sur Σ (image ponctuelle S'_1), puis une réflexion sur M'_2 , ce qui justifie le schéma équivalent. Tout se passe comme si la lame d'air définie par M_1 et M'_2 était éclairée par la source S'_1 . Il n'est pas inutile de faire remarquer aux élèves que le miroir M'_2 , « virtuel », peut fort bien traverser le miroir M_1 lors du déplacement de M_2 par translation du chariot.

3. Différence de marche en un point

Cette propriété n'est pas tributaire du schéma équivalent, mais est compatible avec lui.

a. Différence de marche géométrique

Montrons simplement que le chemin optique L_2 entre S_0 et un point A atteint par la lumière suivant le trajet (2) est le même que celui calculé à partir de S_2 . La figure 5 illustre cette propriété, conséquence immédiate des symétries par rapport à Σ . En désignant par n l'indice de réfraction de l'air ($n \approx 1$) :

$$L_2 = n (S_0I + IJ + JA) = n S_2A.$$

On établirait de même que :

$$L_1 = n S_1A.$$

Si la réflexion sur la séparatrice n'intervenait pas, les sources S_1 et S_2 apparaîtraient en phase.

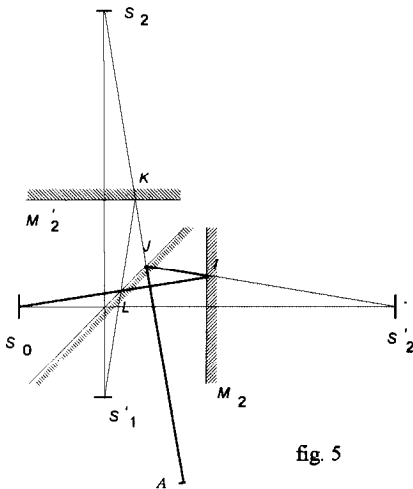


fig. 5

b. Différence de marche supplémentaire

Elle dépend du mode de traitement de la séparatrice. Nous considérerons dans la suite qu'elle est égale à $\frac{\lambda_0}{2}$, en désignant par λ_0 la longueur d'onde dans le vide de la radiation monochromatique utilisée. La différence de marche au point A entre les rayons ayant suivi les trajets (1) et (2) est alors

$$\delta = n(S_2M - S_1M) + \frac{\lambda_0}{2} \approx S_2M - S_1M + \frac{\lambda_0}{2}$$

II. L'utilisation d'une source étendue

On sait que dans ce cas les franges d'interférence sont qualifiées de « localisées » sur un « lieu » déterminé. La présentation de cette question est délicate puisque l'étude du « théorème » de localisation ne figure pas au programme. Faut-il le démontrer malgré tout ? Je pense que ce n'est pas nécessaire. Il me semble plus intéressant, d'un point de vue physique, de faire apparaître, pour chaque géométrie-type, des conditions telles que les systèmes de franges formés par les différentes sources ponctuelles incohérentes de la source étendue se superposent sans brouillage important.

1. Anneaux bien contrastés

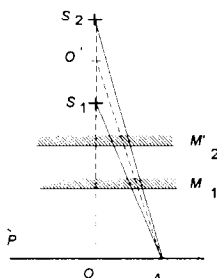


fig. 6

a. Rappels

Lorsque l'interféromètre est réglé « en anneaux », le miroir M_1 et le miroir virtuel M'_2 sont parallèles (fig. 6). Pour chaque constituant ponctuel de la source étendue considérée, l'interféromètre fournit deux sources secondaires S_1 et S_2 cohérentes entre elles, distantes de :

$$a = 2e,$$

où e désigne la distance entre M_1 et M'_2 . Nous noterons D la distance entre le milieu O' de S_1S_2 et le plan P d'observation. La différence de marche entre les ondes interférant en A s'exprime

alors en fonction de l'angle $\theta = \widehat{O'O'A}$:

$$\delta \approx a \cos \theta + \frac{\lambda_0}{2}.$$

En désignant par $p_0 + \frac{1}{2}$ l'ordre d'interférence « au centre », c'est à dire en O :

$$(0) \quad a + \frac{\lambda_0}{2} = (p_0 + \frac{1}{2}) \lambda_0.$$

Le rayon angulaire du premier anneau sombre rencontré à partir du centre vérifie :

$$(1) \quad a \cos \theta_1 + \frac{\lambda_0}{2} = (p_1 + \frac{1}{2}) \lambda_0.$$

où p_1 est le premier entier inférieur à p_0 . Et pour le $k^{\text{ème}}$ anneau sombre ($k \geq 1$) :

$$(2) \quad a \cos \theta_k + \frac{\lambda_0}{2} = (p_k + \frac{1}{2}) \lambda_0,$$

avec $p_k = p_1 - (k - 1)$.

Pour simplifier, nous admettrons que p_0 est un entier, ce qui correspond à un centre sombre. Notons que cette propriété ne dépend, pour λ_0 donné, que de la valeur de a , et est donc indépendante de la position de S_0 . Si p_0 n'est pas entier, le calcul se complique légèrement, mais les conclusions des raisonnements ci-dessous restent valables.

Par différence membre à membre entre (1) et (0), ou (2) et (0), puis développement limité, nous obtenons alors :

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2 \lambda_0}{a}} \quad \text{et :} \quad \theta_k = \sqrt{\frac{2 k \lambda_0}{a}}.$$

Pour k suffisamment grand (nous nous contenterons de 10...), l'écart angulaire entre le

$$k^{\text{ème}} \text{ et le } (k+1)^{\text{ème}} \text{ est :} \quad \theta_{k+1} - \theta_k \approx \frac{1}{2\sqrt{k}} \sqrt{\frac{2 \lambda_0}{a}}.$$

Enfin, dans ces expressions :

$$\theta_k = \frac{r_k}{D}, \text{ où } r_k \text{ désigne le rayon du } k^{\text{ème}} \text{ anneau sombre observé sur l'écran.}$$

b. Bon contraste pour une source étendue transversalement

Je qualifie de transversale l'extension de la source, à partir d'un point S_0 pris pour référence, dans les différentes directions **parallèles** à M_2 . Les différentes positions de S_1 considérées occupent alors une portion de plan perpendiculaire à $S_1 S_2$.

Considérons un déplacement ρ de S_0 dans une telle direction. Dans le plan P , le centre du système d'anneaux se déplace de la même distance. Le système d'anneaux est peu modifié si :

$$\rho \ll r_1.$$

Cette condition apparaît comme condition de bon contraste au voisinage du centre, pour une source étendue transversalement. Adoptons par exemple comme critère limite :

$$\rho_{\text{Max}} = 0,1 r_1, \quad \text{soit :} \quad \rho_{\text{Max}} = 0,1 D \sqrt{\frac{2 \lambda_0}{a}}.$$

Il est clair que ρ_{Max} est d'autant plus grand que D est plus grand, et qu'on n'obtient aucune limitation si... D devient infini. Cherchons quelle valeur de D autorise $\rho_{\text{Max}} \approx 1$ cm, pour $\frac{\lambda_0}{a} \approx 10^{-3}$ (première « coïncidence » pour le doublet jaune du sodium). Le calcul conduit à :

$$D \approx 2 \text{ m.}$$

Un critère un peu plus pointilleux consisterait à écrire que ρ doit rester faible par rapport à l'écart entre les rayons de deux anneaux consécutifs :

$$\rho \ll r_{k+1} - r_k.$$

Avec le même ρ_{Max} que ci-dessus, et pour $k = 10$, on obtient $D \approx 14 \text{ m}$: si D est trop faible, les anneaux sont d'abord brouillés à leur périphérie. Enfin, la même étude montre (et chacun peut l'observer) que le contraste d'un système d'anneaux formés à distance finie diminue lorsque l'ordre d'interférence au centre augmente. Cette conclusion ne tient que dans des conditions comparables par ailleurs, par exemple pour des situations de « coïncidence ».

c. Bon contraste pour une source étendue longitudinalement

Il s'agit ici d'étudier l'effet de la variation de D correspondant à une extension ρ' de la source perpendiculairement à M_2 . Cette variation ne correspond pas à un déplacement du centre du système d'anneaux, mais à une modification de leurs rayons. Les conditions de bon contraste s'écrivent, en désignant par Δr_k la variation du rayon du $k^{\text{ième}}$ anneau sombre :

$$\Delta r_1 \ll r_1,$$

$$\text{et : } \Delta r_k \ll r_{k+1} - r_k \text{ (} k \text{ assez grand).}$$

On obtient facilement :

$$\frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{\rho'}{D},$$

$$\text{et : } \frac{\Delta r_k}{r_{k+1} - r_k} = 2 k \frac{\rho'}{D}.$$

Cherchons à quelle condition chaque rapport reste inférieur à 0,1 pour $\rho' \approx 1 \text{ cm}$. La condition relative au premier anneau est vérifiée dès que $D = 10 \text{ cm}$! Pour $k = 10$, la seconde égalité conduit à $D \approx 2 \text{ m}$.

Ces conditions sont manifestement moins contraignantes que celles du b.

d. Condition de contraste maximum

Les conditions précédentes n'imposent pas de limitation sur ρ et ρ' lorsque D devient infini, conformément à la théorie bien connue : on ne peut jamais brouiller, sur leur lieu de localisation, des franges de type « égale inclinaison » par élargissement de la source !

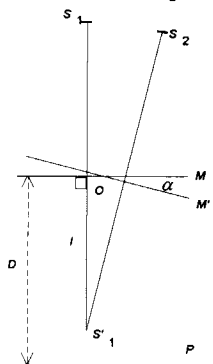


fig. 7

2. Franges rectilignes bien contrastées

a. Rappels

Les franges rectilignes sont obtenues lorsque les miroirs M_1 et M_2 forment un dièdre de petit angle α et d'arête située dans le champ observé. Dans ces conditions, la droite $(S_1 S_2)$ est quasi-parallèle à M_1 et à M_2 . Supposons d'abord que les interférences sont obtenues avec une source ponctuelle S_0 et sont observées sur un écran P parallèle à $(S_1 S_2)$, situé à la distance D de M_1 (fig. 7). La distance entre les deux sources ponctuelles cohérentes entre elles S_1 et S_2 est :

$$a = 2 \alpha l,$$

en désignant par l la distance de S_1 à M_1 . Selon la théorie classique, l'interfrange sur le plan P est :

$$i = \frac{\lambda_0 (D + l)}{2 \alpha l}.$$

b. Conditions de contraste maximum

Existe-t-il une position de P telle que les franges d'interférence dues à toutes les sources ponctuelles S_0 constituant la source étendue se superposent exactement (dans le cadre des approximations ci-dessus) ?

- Nous considérerons d'abord le rôle de l'**extension longitudinale** de la source.

- Il est au moins nécessaire, pour vérifier la condition indiquée, que les interfranges correspondant, dans le plan P , à des valeurs différentes de l soient égales. La distance l doit s'éliminer de l'expression de l'interfrange ! Cela n'est possible que pour $D = 0$. L'observation doit donc être effectuée au voisinage immédiat des miroirs. L'interfrange s'exprime alors par :

$$i = \frac{\lambda_0}{2 \alpha}.$$

- Encore faut-il qu'existe dans cette région un point où toutes les sources primaires ponctuelles produisent le même ordre d'interférence. Ce point est le point O , équidistant de S_1 , S_2 et S'_1 d'après la propriété rappelée au paragraphe I.1. de cet article. Quelle que soit la position de S_0 , on observe en O une frange sombre (ou brillante, selon le type de traitement de la séparatrice) du fait de la différence de marche supplémentaire.

- L'**extension transversale** de la source n'introduit pas de restriction supplémentaire... si elle n'est pas trop grande ! En effet, si S'_1 s'écarte trop de la perpendiculaire à M_1 passant par O , la droite (S_1S_2) ne peut plus être considérée comme quasi-parallèle à M_1 et M'_2 et les approximations rappelées au paragraphe a. ci-dessus perdent leur validité : contrairement au cas des franges de type « égale inclinaison », il est possible de brouiller des franges d'égale épaisseur, **même sur leur lieu de localisation**, par élargissement de la source.

III. Sur le concept de localisation

1. Rôle du théorème de localisation

Le théorème de localisation^{1,iv,v} identifie des points de l'espace pour lequel l'ordre d'interférence dépend très peu de la position du point source considéré : en de tels points de l'espace, une variation au premier ordre (de développement) des coordonnées du point source n'entraîne qu'une variation de l'ordre d'interférence d'un ordre (de développement) supérieur. Si l'ensemble de ces points constitue un domaine continu, les franges d'interférence fournies par les différentes sources ponctuelles constituant une source « étendue » y sont confondues, et il n'y a pas de brouillage : le contraste du système de franges prend ses valeurs maximales.

Le théorème indique que les points de l'espace vérifiant une telle condition sont localisés sur un lieu géométrique¹ bien déterminé dit **lieu de localisation**. Mais il ne fournit (en lui-même) aucune indication sur l'extension du domaine de l'espace, englobant ce lieu, pour lequel le contraste, sans être maximum, reste élevé.

2. Domaine de bon contraste et cohérence spatiale

a. Cas des anneaux.

Les anneaux d'interférence sont observables de l'infini à une distance de quelques mètres de l'interféromètre. On conviendra que ce domaine ne peut être qualifié d'étroit ! Comment nos élèves, auxquels nous enseignons que les interférences produites par une source étendue sont « localisées sur un lieu déterminé » s'y retrouvent-ils ?

Remarquons que la condition de bon contraste (au centre), présentée au II.1.b. ci-dessus peut s'écrire en faisant apparaître l'angle ε sous lequel la source est vue d'un point du champ observé :

$$\varepsilon \approx \frac{\rho_{\text{Max}}}{D}.$$

Elle s'écrit alors :

$$\frac{a \varepsilon}{2} < \frac{\lambda_0}{\varepsilon}.$$

Le second membre de cette inégalité est appelé largeur de cohérence spatiale de la lumière au point considéré. L'inégalité exprime que le contraste est bon en un point si une certaine distance caractéristique du dispositif reste petite devant la largeur de cohérence spatiale de la lumière en ce point.

b. Cas des franges rectilignes

Quiconque a placé une lampe à iode devant un interféromètre convenablement réglé sait que les franges rectilignes de lumière blanche sont observables sur l'écran, sans lentille de projection, jusqu'à des distances importantes de l'écran à l'interféromètre ; c'est alors presque un casse-tête de « forcer » la localisation !

¹Ce lieu n'est une surface que dans des cas particuliers :

- anneaux d'égale inclinaison ;
- franges du coin d'air obtenues avec une source à l'infini.

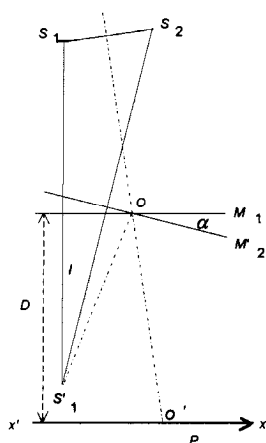


fig 8

Considérons de nouveau la configuration du coin d'air (fig. 8), et appelons O' l'intersection de P et de la médiatrice de (S_1, S_2) . Choisissons comme axe $x'x$ l'intersection du plan P et du plan de la figure 8. La différence de marche en O' se réduit, pour une composante monochromatique de la lumière blanche de longueur d'onde égale à λ_0 , à $\frac{\lambda_0}{2}$ (frange sombre).

Quelques lignes de raisonnement géométrique permettraient de montrer que les directions de (S'_1, O) et de (OO') sont symétriques par rapport aux plans bissecteurs du dièdre formé par M_1 et M_2 . Notons alors X un déplacement transversal de S'_1 . Il se traduit (pour α petit !), par un déplacement de O' dans le plan P donné par :

$$X' = -X \frac{D}{l}.$$

La condition de bon contraste s'écrit, si $|X|_{\text{Max}}$ désigne maintenant l'extension transversale maximale de la

source :

$$|X|_{\text{Max}} \frac{D}{l} \ll \frac{\lambda_0 (D + l)}{2 \alpha l}.$$

Ou, en notant $\varepsilon = \frac{|X|_{\text{Max}}}{D + l}$ (angle sous lequel les images de la source sont vues d'un point de P) :

$$2 \alpha D \ll \frac{\lambda_0}{\varepsilon}.$$

Là encore, le second membre désigne la largeur de cohérence spatiale de la lumière en un point de l'écran.

Remarquons que cette inégalité peut encore être écrite :

$$D \varepsilon \ll \frac{\lambda_0}{2 \alpha}.$$

Le second membre désigne alors l'interfrange sur le « lieu de localisation », et le premier est de l'ordre de grandeur des dimensions transversales de la source. Il est clair que cette inégalité est bien vérifiée par une interfrange de quelques millimètres et la région active d'une lampe à iode.

De plus, les deux dernières inégalités permettent de vérifier que la valeur $D = 0$ correspond à la situation optimale, comme je l'ai déjà montré en raisonnant d'abord sur l'extension longitudinale de la source.

3. En conclusion

La présentation du théorème de localisation en classe préparatoire de seconde année ne figure pas au programme. Il me semble de plus qu'elle n'est pas nécessaire pour étudier l'interféromètre de Michelson : quelques raisonnements simples utilisant l'idée que les éclaircissements s'ajoutent pour des sources incohérentes entre elles suffisent. Je ne suis pas certain que la présentation du théorème soit même souhaitable : l'expérience montre que l'élève n'en conserve souvent que l'idée tranchée selon laquelle les franges seraient visibles seulement sur un certain lieu géométrique, et nulle part ailleurs. Bien sûr, c'est un contresens. Sur le plan du vocabulaire, je propose de substituer à l'expression « lieu de localisation » celle de « lieu de contraste maximum ». Elle laisse place à l'idée que ce lieu peut être environné d'un domaine sur lequel le contraste, sans être maximum, reste notable. Enfin, si les calculs relatifs à la largeur de cohérence spatiale présentés ci-dessus sont sans doute trop complexes pour les élèves, ces derniers doivent être sensibilisés au fait que le contraste est fonction des dimensions de la source et du lieu d'observation.

'Communications aux journées d'information sur les programmes PC, PSI, ENS de Cachan, 3 avril 1996.

"Programmes de mathématiques PCSI, section « Algèbre et géométrie », § III.1.d. colonne de droite : « Étude de la décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions ». BOEN du 20/07/1995 page 267.

Notons que l'apparition du mot « réflexion » dans un programme de mathématiques a de quoi nous séduire!

ⁱⁱⁱ Je suppose connues les deux configurations types de l'interféromètre. Voir par exemple :

S. OLIVIER, *Physique des ondes*, Première édition, Technique et Documentation - Lavoisier (Paris, 1996), ou :

J.Ph. PÉREZ, *Optique (Fondements et applications)*, Cinquième édition, Masson (Paris, 1996).

^{iv} G. BRUHAT, *Cours de physique générale - Optique*, Sixième édition, Masson (Paris, 1992).

^v P. et J.P. PROVOST, *Optique, Vol.2 Optique ondulatoire et cohérence*, CEDIC/Fernand Nathan (Paris, 1980).