Calcul non conventionnel de l'énergie cinétique relativiste

par Michaël SARRAZIN
Étudiant en physique
Faculté des Sciences de Besançon - 25000 Besançon

INTRODUCTION

C'est en 1905 qu'Albert Einstein publia une série d'articles dans la revue scientifique allemande *Annalen der physik.* Le quatrième de ces articles portait sur la relativité restreinte et s'intitulait *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement.* Aujourd'hui, la relativité restreinte fait intégralement partie des fondements de la physique moderne.

Le succès de cette théorie vient du fait que ses prédictions sont en parfait accord avec certaines observations expérimentales dont la mécanique classique ne sait pas rendre compte. Ceci est tout à fait flagrant dans le cas du calcul de l'énergie cinétique d'une particule libre, cas auquel nous allons nous intéresser ici. En effet, le calcul de l'énergie cinétique dans le cadre classique donne des résultats qui divergent des observations expérimentales pour des vitesses plus ou moins proches de la célérité de la lumière. En revanche, les calculs menés dans le cadre relativiste donnent des résultats en parfait accord avec les expériences.

Nous allons montrer dans cet article, qu'il est possible de retrouver les résultats de la relativité restreinte, en ce qui concerne le calcul de l'énergie cinétique d'une particule libre, en posant un certain nombre d'hypothèses de validité générale, que nous allons développer.

L'analyse menée dans cet article n'a rien de compliqué ou de fondamental, son intérêt réside dans quelques éléments. Elle montre le caractère essentiel de certaines notions que l'on rencontre aussi bien en mécanique classique que relativiste, et permet de jeter un pont entre ces deux points de vue.

1. DÉVELOPPEMENT DES HYPOTHÈSES DE BASE

Nous allons poser quatre hypothèses en guise de base à notre réflexion.

1.1. Principe fondamental de la dynamique

Ce principe s'exprime selon :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1}$$

A priori, cette notion est valable aussi bien du point de vue classique que relativiste.

1.2. Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème est également considéré de validité générale et s'exprime selon :

$$dE_C = \vec{F}\, d\vec{r} \tag{2}$$

1.3. Notions de masse, d'inertie, et de quantité de mouvement

Il convient de distinguer les notions de masse et d'inertie. Pour préciser notre pensée, nous dirons que la masse possède les propriétés dynamiques d'une inertie, tout en constituant un invariant. En revanche, l'inertie même, n'est pas un invariant, elle dépend de la vitesse. Ainsi, l'inertie a les dimensions d'une masse, et elle est fonction de la masse et de la vitesse du corps auquel elle est associée. Pour de petites vitesses, devant la célérité de la lumière, l'inertie pourra s'identifier à la masse, et réciproquement.

Ainsi, nous pourrons relier l'inertie et la masse par une relation donnée, que nous poserons ici comme :

$$I = m\gamma(\vec{v}) \tag{3}$$

avec $$\gamma(\vec{0}) = 1$$

Par ailleurs, nous définirons le lien entre quantité de mouvement et inertie par :

$$\vec{p} = I\vec{v} \tag{4}$$

Notons, que (4) constitue une définition de l'inertie, de validité générale.

1.4. Principe d’équivalence inertie-énergie

Nous allons postuler ici le principe selon lequel toute forme d’énergie E possède une inertie I. Nous nommerons ce concept, principe d’équivalence inertie-énergie ; nous l’exprimerons selon :

$$I = E\alpha \qquad (5)$$

Où α est une constante qui assure la liaison dimensionnelle entre énergie et inertie. α a donc les dimensions de l’inverse du carré d’une vitesse. Nous discuterons plus tard du sens et de la valeur de cette constante.

Nous considérerons ce principe d’équivalence comme étant de validité générale.

2. CONSÉQUENCE DES PRINCIPES ÉNONCÉS, SUR LES PROPRIÉTÉS DE L’ÉNERGIE CINÉTIQUE

2.1 Calcul standard de l’énergie cinétique en mécanique classique

En mécanique classique, tout corps de masse m, se déplaçant à une vitesse constante v, possède une énergie cinétique que l’on calcule comme suit :

$$(2) \Leftrightarrow dE_C = \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \qquad dE_C = \frac{d\vec{p}}{dt}\, d\vec{r} = \vec{v}\, d\vec{p} \qquad \text{avec} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

selon (4) on a alors : $dE_C = \vec{v}\, d\,(I\vec{v})$

En mécanique classique, l’inertie s’identifie à la masse, I = m, on a alors :

$$dE_C = \vec{v}\, d\,(m\vec{v}) = v^2 dm + \frac{m}{2}\, dv^2$$

Sachant que la masse est une constante, et que l’énergie cinétique est nulle pour une vitesse nulle, on intègre l’expression :

$$E_C = \int_0^{E_C} dE_C = \int_0^{v} \frac{m}{2}\, dv^2 = \frac{1}{2}\, mv^2$$

Ainsi, $E_C = \frac{1}{2} mv^2$ constitue l’expression de l’énergie cinétique, en mécanique classique.

2.2. Calcul non standard de l'énergie cinétique

On procède, au départ, comme dans le calcul standard :

$$(2) \Leftrightarrow dE_C = \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \qquad dE_C = \frac{d\vec{p}}{dt}\, d\vec{r} = \vec{v}\, d\vec{p} \qquad \text{avec} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

selon (4) on a alors :

$$dE_C = \vec{v}\, d\,(I\vec{v}) \qquad (6)$$

L'hypothèse sur l'équivalence inertie-énergie traduite par (5) implique que l'inertie n'a plus pour unique contribution la masse m. En effet, l'énergie cinétique doit selon (5) posséder elle même une inertie qui doit donc intervenir dans le calcul. Finalement, l'inertie a ici deux contributions, l'inertie de la masse et l'inertie de l'énergie cinétique, ce que l'on peut traduire par :

$$I = m + E_C\alpha$$

et donc avec (6) on obtient :

$$dE_C = \vec{v}\, d\left((m + E_C\alpha)\vec{v}\right)$$

En développant et en simplifiant quelque peu l'expression, il vient successivement :

$$dE_C = \alpha dE_C v^2 + \alpha\, \frac{E_C}{2}\, dv^2 + \frac{m}{2}\, dv^2$$

puis

$$(1 - \alpha v^2)\, dE_C = \frac{1}{2}\left(E_C + \frac{m}{\alpha}\right) d\,(\alpha v^2)$$

et finalement

$$\frac{dE_C}{E_C + \frac{m}{\alpha}} = \frac{1}{2}\, \frac{d\,(\alpha v^2)}{1 - \alpha v^2}$$

On intègre l'expression ainsi obtenue, ce qui nous donne :

$$\int_0^{E_C} \frac{dE_C}{E_C + \frac{m}{\alpha}} = \int_0^{v} \frac{1}{2}\, \frac{d\,(\alpha v^2)}{1 - \alpha v^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln\left(\frac{\alpha E_C}{m} + 1\right) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha v^2}}$$

On tire alors facilement :

$$E_C = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha v^2}} - 1\right)\frac{m}{\alpha}$$

En posant $c = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, on peut écrire l'expression de l'énergie cinétique sous la forme :

$$E_C = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) mc^2$$

On voit alors apparaître c comme une vitesse limite. En effet, pour des vitesses qui s'approchent de c, l'énergie cinétique tend vers l'infini !

On retrouve donc une expression identique à celle de l'énergie cinétique calculée, pour une particule libre, dans le cadre de la relativité.

Comme on le fait dans le cadre de la relativité, on pourra identifier c à la célérité de la lumière.
Cette hypothèse pourra être confirmée par l'expérience.

CONCLUSION

Nous venons de montrer que le calcul de l'énergie cinétique par une procédure de type «classique», moyennant une hypothèse quant aux propriétés d'inertie de l'énergie, conduit à retrouver l'expression relativiste de l'énergie cinétique.

Bien que l'on postule le concept d'équivalence inertie-énergie, la démarche peut être considérée comme classique, dans la mesure où l'on fait abstraction des remises en question concernant le caractère absolu de l'espace-temps, et où l'on n'utilise aucun des concepts relatifs aux transformations de Lorentz.

On voit, dans notre présentation, l'importance de l'équivalence inertie-énergie dans la mesure où c'est elle qui conduit pour l'essentiel à notre résultat final.

Dans cette vision des choses, il serait alors intéressant de voir si la relation d'équivalence inertie-énergie peut être posée autrement qu'empiriquement et sans faire intervenir la relativité restreinte.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier M. J.-M. LEVY-LEBLOND, pour ses remarques et conseils, ainsi que : MM. N. DAHER, C.-A. RISSET et J.-M. VIGOUREUX.

BIBLIOGRAPHIE

– Le lecteur pourra trouver de plus amples détails sur la notion d'inertie et d'équivalence masse-énergie dans *«Les Entretiens de la Villette 1994 - L'énergie après Einstein»* de J.-M. LEVY-LEBLOND.

– On trouvera la démonstration de la relation d'équivalence masse-énergie dans le cadre de la relativité, dans *«L'Univers sous le regard du temps»* de H. ANDRILLAT aux éditions Masson.

– Le lecteur trouvera un historique et une description de la relativité dans *«Histoire d'une grande idée, la relativité»* de B. HOFFMANN aux éditions Belin.