Vase de Tantale et trajectoire de phase expérimentale

par Éric CASTET
Professeur stagiaire agrégé
Lycée Gaston Fébus - 64300 Orthez

Niveaux concernés

Classe de terminale scientifique et éventuellement les classes supérieures.

Prérequis

Professeur : utilisation du logiciel LABO muni de la carte d'acquisition CANDIBUS.

Élève : définition d'un oscillateur et caractéristiques.

1. OBJET DE L'ARTICLE

– Acquisition informatique du niveau d'eau au sein d'un vase de Tantale et traitement numérique afin de visualiser la trajectoire de phase de cet oscillateur non linéaire.

– Objectifs de l'élève : déterminer le type et les caractéristiques de l'oscillateur non linéaire «Vase de Tantale».

2. INTRODUCTION HISTORIQUE

Qui était Tantale ?

Tantale était un roi de la mythologie grecque. Envoyé aux enfers, il fût condamné par Jupiter à subir une faim et une soif perpétuelles.

Selon Homère (Odyssée XI 582), Tantale était plongé dans un lac bordé de beaux arbres fruitiers. Dès qu'il tentait de tremper les lèvres, le liquide fuyait. Une branche pleine de fruits pendait au-dessus de sa tête, mais elle se redressait hors de portée de lui dès qu'il tendait la main. C'est le «supplice de Tantale».

Le nom de Tantale a été donné au vase muni d'un siphon. Nous rappelons brièvement son fonctionnement.

3. RAPPELS SUR LE VASE DE TANTALE

Présentation

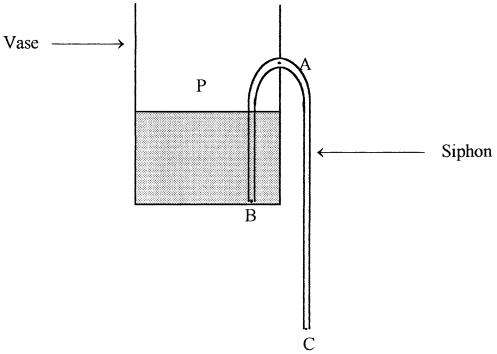

Figure 1

Le vase de Tantale de section S est alimenté en liquide par une source de débit constant noté Q_0 et muni d'un siphon de section s faible devant S (voir figure 1).

Phase de remplissage

Le vase et la partie gauche du siphon se remplissent. Lorsque la surface libre (point P) atteint le niveau du col du siphon (point A), le siphon s'amorce.

Phase de vidange

Le vase se vide alors par le siphon (évacuation du liquide au niveau du point C). Lorsque la surface libre arrive au niveau du point B, de l'air pénètre dans le siphon. Il se désamorce et se vide complètement. Puis, le vase se remplit à nouveau et le cycle recommence.

Nota

Le débit de la source qui alimente le vase ne doit pas dépasser une valeur maximale pour pouvoir observer les différentes phases ci-dessus.

Remarque : Pour en revenir au mythe, nous imaginons bien Tantale, placé dans le vase (lac) de telle sorte que sa tête soit située en permanence au-dessus de la côte du point A !

Rappels théoriques

Le point P appartient à la surface libre du vase, surface de séparation entre le liquide et l'air ambiant. On note $z_P(t) = z(t)$, l'évolution de la côte du point P au cours du temps.

En exprimant la conservation du volume de liquide contenu dans une tranche élémentaire du vase, d'épaisseur dz et de section constante S, entre les instants t et t + dt, on obtient l'équation différentielle vérifiée par z(t).

Phase 1 : $Q_0 \cdot dt = S \cdot dz$

Phase 2 : $S \cdot dz = Q_0 \cdot dt - sv_C \cdot dt$

v_C : vitesse d'écoulement du fluide au niveau du point C.

Remarque : Compte tenu de l'inégalité s << S, on peut assimiler le régime établi à un régime permanent d'un fluide parfait. On applique alors le théorème de Bernoulli pour en déduire l'expression de la vitesse v_C .

On obtient :

$$v_C = \sqrt{2g\,(h + z_P - z_B)} \qquad \text{avec} \quad h = z_B - z_C \tag{1}$$

La solution de cet oscillateur non linéaire de relaxation est de la forme :

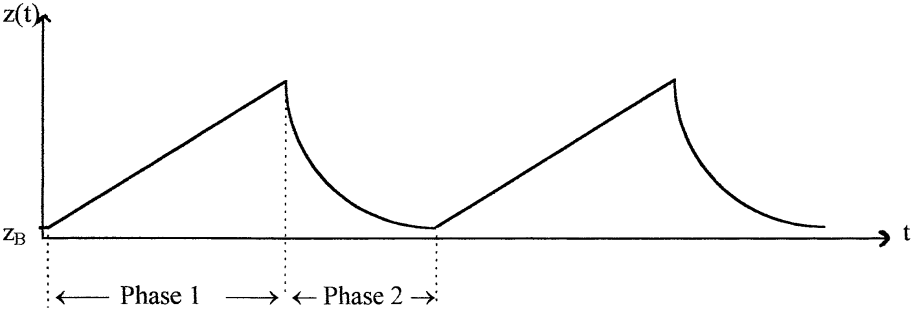

Figure 2

La première phase est représentée par un segment de droite, la seconde par un arc de parabole.

4. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Ce dispositif doit nous permettre d'acquérir la cote de la surface libre (z_p) au cours du temps. Par traitement, nous en déduirons la vitesse du point P, $v_p(t)$. Par suite de ces deux tracés, nous obtiendrons la trajectoire de phase de l'oscillateur en question, à savoir le tracé de v_p en fonction de z_p .

Position du problème

Dans les cas classiques de l'utilisation de la cuve rhéographique (pendule, chute libre...), les bornes positive (P) et négative (N) sont fixes dans l'espace et correspondent à des potentiels électriques constants (V_P et V_N).

La grandeur mécanique qui nous intéresse, en général la position d'un point M situé entre P et N, varie au cours du temps et, par suite, il en est de même pour le potentiel électrique V_M associé à ce point.

Théoriquement, nous utilisons le fait que le champ électrique $\vec{E}$ entre les bornes P et N est uniforme. Les équipotentielles correspondent aux plans horizontaux z = cte.

On a : $$E = \frac{U_{PN}}{PN} = \frac{U_{MN}}{MN} \qquad \text{avec} \quad PN = z_P - z_N \tag{2}$$

Les variations de la position du point M (grandeur mécanique) sont proportionnelles aux variations du potentiel au point M (grandeur électrique associée).

Dans la relation (2), le premier rapport est une constante, de même que la position du point z_N. De la mesure de la tension U_{MN} , on déduit la position du point intermédiaire, z_M.
Ce cas de figure est à exclure en ce qui concerne notre expérience.

Nous choisissons de positionner le point N au fond du vase (V_N et z_N sont constants). z_P est la variable et V_P est constant. Par conséquent, l'électrode de mesure M sera fixe et son potentiel V_M sera variable.

D'après la relation (2), nous avons : $U_{PN} \times MN = Cte$ (constante expérimentale connue), donc $U_{MN} \times PN = Cte$.

Dans cette configuration, de la mesure de la tension U_{MN}, nous déduirons la position du point P, c'est-à-dire z_P , sachant que $z_N = 0$.

Montage expérimental

L'acquisition a été effectuée à partir du montage décrit sur la figure 3. Le fonctionnement de ce dispositif est rigoureusement le même que celui représenté sur la figure 1.

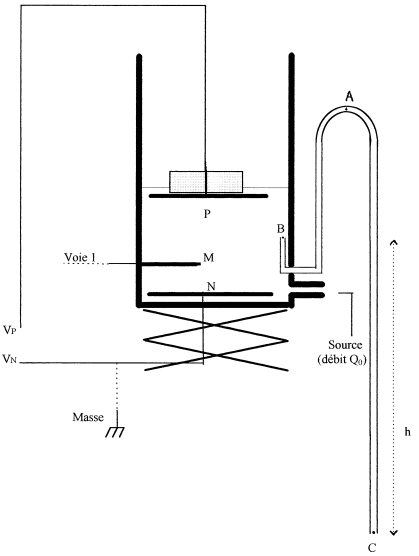

Figure 3

Quelques précisions sur le matériel utilisé :

– Électrode M : fil électrique dénudé en son extrémité.

– Sortie du vase : perçage + silicone.

– Source : pompe à essuie-glace de voiture.
Elle permet d'avoir un débit constant réglable Q_0 .

– Dimensions : S : Ø = 82 mm s : Ø = 6,5 mm $Q_0 = 9\ cm^3.s^{-1}$ (environ)
h = 37 cm.

– Liquide : Solution conductrice de sulfate de cuivre $c = 1.10^{-2}\ mol.L^{-1}$.

Le dispositif est relativement simple à réaliser dans le laboratoire d'un lycée.

Remarques :

– En raison de la flottaison de l'équipage (bouchon + électrode), la cote de la cathode ne correspond pas à la cote de la surface libre, la distance qui les sépare reste constante au cours du mouvement. Cela a peu d'importance pour la suite de notre étude, car seules les variations de z_p nous intéressent.

– Pour éviter les effets de bord, on place l'électrode de mesure M au centre du vase.

5. ACQUISITION

Tension U_{MN} (t)

On relie la voie 1* et la masse* de l'ordinateur, respectivement à la borne M et la borne N du montage expérimental (* fils de connexion pour l'acquisition de tensions à l'ordinateur).

La figure 4 représente la tension U_{MN} en fonction du temps et les différents paramètres de l'acquisition. Il s'agit de la copie de l'écran de l'ordinateur lors de l'acquisition.

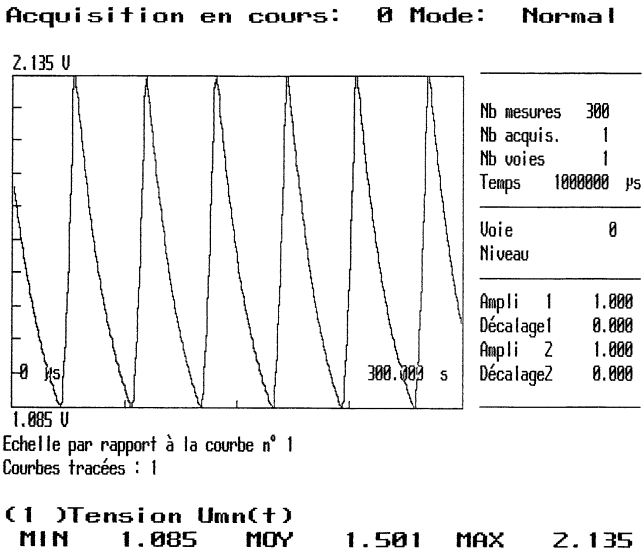

Figure 4

Traitement

Le tracé de la position du point P, $z_P(t)$, se déduit du précédent par la formule suivante :

$$z_P(t) = \left[1/U_{MN}(t)\right] \times 2{,}3 \times 6{,}17 \qquad \text{(en centimètres)}$$

déterminée à partir de la relation (2) et des données expérimentales suivantes :

$$U_{PN} = 6{,}17 \text{ Volts} \quad MN = 2{,}3 \text{ cm} \quad z_N = 0 \text{ cm}$$

Pour une meilleure visualisation du tracé $z_P(t)$, trois périodes consécutives sont représentées sur la figure 5 ci-dessous.

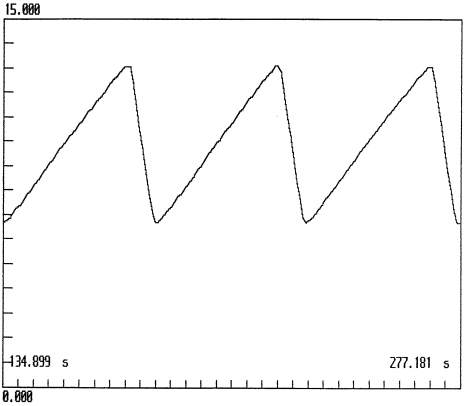

Figure 5

On obtient la courbe $v_P(t)$, vitesse du point P au cours du temps en dérivant par rapport au temps la courbe z(t).

La figure 6 représente à la fois les deux courbes. Elle présente l'avantage d'une interprétation du tracé de la vitesse du point P (courbe en continu) par rapport à celui de la position du point P (courbe en pointillés), et vice versa.

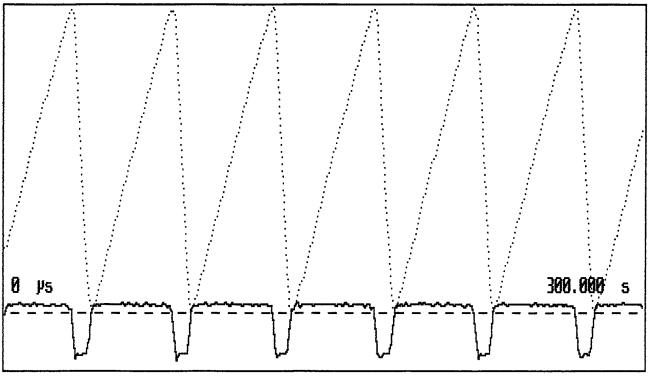

Figure 6

La trajectoire de phase est obtenue en reportant pour un temps donné, les valeurs correspondantes de la vitesse en ordonnées et de la position du point P en abscisses et ce, sur toute la durée de l'expérience. On obtient le tracé $v_P(z_P)$.

La figure 7 représente la trajectoire de phase de cet oscillateur obtenue expérimentalement.

Unités

abscisse $\leftrightarrow$ cm ordonnée $\leftrightarrow$ cm.s^{-1}.

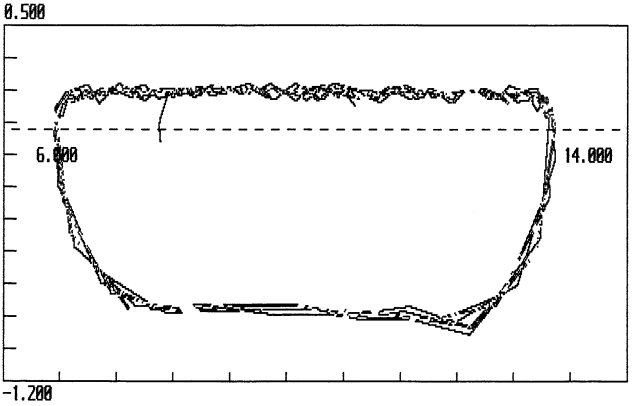

Figure 7

6. INTERPRÉTATIONS

Cet article offre une perspective d'un T.P. dirigé (présentation d'oscillateurs non linéaires par exemple) en classe de terminale scientifique dans un chapitre traitant des systèmes oscillants.

Introduction

A propos du tracé de la figure 5 et du montage expérimental figure 3 :

– Combien de phases observez-vous ? Nommez-les.

– Quelle est la nature du mouvement d'un point appartenant à la surface libre ?

– Le mouvement est-il périodique ? Si oui, déterminez la période T de l'oscillateur.

– Comment peut-on modifier la fréquence de cet oscillateur ?

Interprétation

A l'aide du tracé obtenu sur la figure 5 :

– Expliquez brièvement le tracé obtenu pour $z_P(t)$.

– A partir du tracé de $z_P(t)$, justifiez l'allure de la courbe $v_P(t)$.

Remarque : Dans de nombreux ouvrages de terminale, la seconde phase de la courbe représentant la position du point P en fonction du temps, $z_P(t)$, est différente de celle de l'allure théorique représentée sur la figure 2 ; on la représente par un segment de droite de pente négative. Théoriquement, c'est une erreur. Cela revient à faire l'approximation d'une vitesse de vidange constante. Cette approximation n'est possible que si la hauteur h est suffisamment grande devant la distance $(z_{Pmax} - z_B)$.

Concernant l'expérience que nous avons réalisée, vérifions que l'approximation est acceptable. Pour cela, calculons les deux valeurs limites de la vitesse v_C qui correspondent aux deux positions extrêmes du point P au cours du cycle.

Pour $z_P = z_A$, v_C est maximale $v_{Cmax} = \sqrt{2g\,(h + z_A - z_B)}$ $\quad v_{Cmax} = 2{,}9\ m.s^{-1}$

Pour $z_P = z_B$, v_C est minimale $v_{Cmin} = \sqrt{2gh}$ $\quad v_{Cmin} = 2{,}7\ m.s^{-1}$

$$\frac{\Delta v_C}{v_C} \cong 7\ \%$$

Concernant notre montage expérimental, l'approximation est acceptable. Au niveau de la classe de terminale scientifique, on supposera v_C = constante au cours de la vidange.

Aspect énergétique

Interprétez en terme d'énergie les deux phases de cet oscillateur.

L'oscillateur évolue alternativement entre deux états de fonctionnement (*point P* $\leftrightarrow$ *point A et point P* $\leftrightarrow$ *point B*).

Pendant la première phase, il accumule une certaine quantité d'énergie, fournie par une source extérieure (Q_0). *Puis, il la cède au milieu extérieur (au niveau du point C) pendant la seconde partie de la période.*

Ce type d'oscillateur est dit «de relaxation», en raison du retour périodique de l'oscillateur vers un niveau de plus faible énergie.
L'oscillateur «Vase de Tantale» est un oscillateur de relaxation.

Trajectoire de phase

– A partir des courbes représentées sur la figure 6, essayez de tracer l'allure de la trajectoire de phase de cet oscillateur. Expliquez.

– Comment se traduit la périodicité de l'oscillateur sur le tracé représentant la trajectoire de phase. Justifiez.

Remarque : Cette partie pourra être réalisée en parallèle avec un cours de mathématiques concernant les courbes paramétrées.

7. CONCLUSIONS

Le dispositif expérimental est perfectible en ce qui concerne le matériel.

Les études théorique et expérimentale peuvent être développées au niveau des classes supérieures. On peut mettre en évidence les différents régimes de fonctionnement et montrer par exemple que les oscillations ne se produisent que pour un débit Q_0 compris entre deux valeurs limites.

Pour approfondir sur les oscillateurs et les trajectoires de phase, on pourra lire avec profit l'article *«Le portrait de phase des oscillateurs»* écrit par MM. H. GIÉ et J.-P. SARMANT (voir B.U.P. n° 744, mai 1992).

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. THIERY, professeur, et particulièrement M. COLLIN, aide au laboratoire sans oublier toute l'équipe du laboratoire de physique et chimie du lycée.