Résolution de l'équation de Van der Pol

par Jacques GARCIA
Lycée Jean Vigo - 12100 Millau

1. LES OSCILLATEURS

L'équation différentielle générale des oscillateurs est de la forme :

$$\ddot{z} + A\,\dot{z} + \omega_o^2\, z = 0$$

1.1. A est égal à zéro

$$\ddot{z} + \omega_o^2\, z = 0$$

La solution de l'équation différentielle est une fonction sinusoïdale.

Cette équation et sa solution correspondent aux oscillations libres non amorties, parfaitement sinusoïdales, d'amplitude constante. C'est le cas de l'oscillateur élastique sur coussin d'air et de l'oscillateur électrique L, C de résistance nulle.

1.2. A est une constante positive

La solution de l'équation différentielle donne alors des oscillations dont l'amplitude diminue (oscillations amorties).

C'est le cas de l'oscillateur élastique lorsque les frottements ne sont plus négligeables ou de l'oscillateur électrique résistant.

1.3. A est une constante négative

Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle montre que l'on a des oscillations d'amplitude croissante.

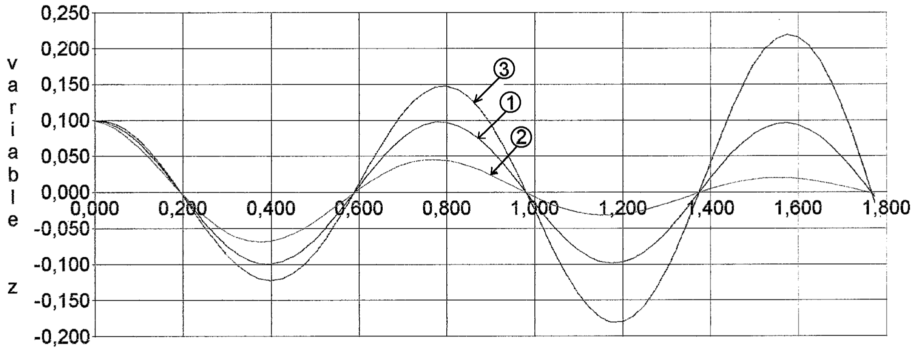


Figure 1 : Solution de l'équation différentielle $\ddot{z} + A\,\dot{z} + \omega_0^2\, z = 0$.
Durée t : ① $\rightarrow$ A = 0 ; ② $\rightarrow$ A > 0 ; ③ $\rightarrow$ A < 0.

2. NON LINÉARITÉ DES OSCILLATIONS LIBRES ENTRETENUES

Considérons les oscillations électriques entretenues par un amplificateur opérationnel monté en résistance négative, comme sur la figure 2.

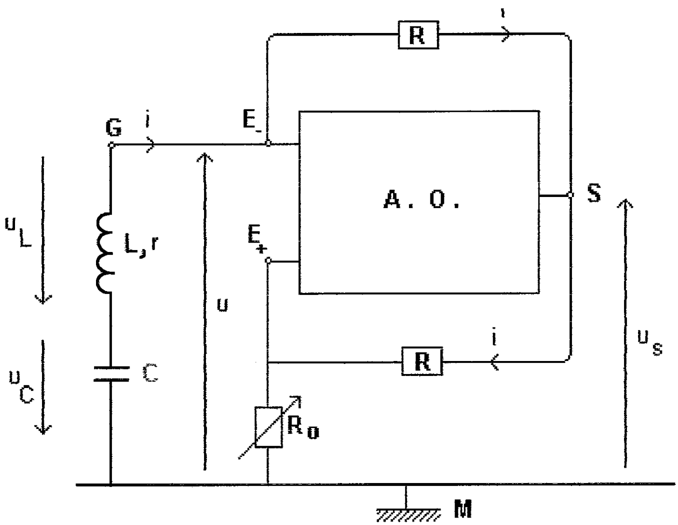


Figure 2

2.1. L'amorçage des oscillations

L'équation différentielle d'un circuit R, L, C s'écrit :

$$\ddot{q} + \frac{R_t}{L}\dot{q} + \omega_o^2 q = 0$$

avec $$\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$$

R_t est la résistance totale du circuit ; avec r comme résistance du dipôle R, L, C et $-R_o$ la valeur de la résistance négative de l'amplificateur opérationnel, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{q} + \frac{r - R_o}{L}\dot{q} + \omega_o^2 q = 0$$

La valeur de R_o qui permet d'entretenir les oscillations est égale à r puisqu'ainsi on retrouve A = 0 et donc des oscillations sinusoïdales ; mais en réalité, pour amorcer les oscillations, R_o doit être légèrement supérieur à r ; ainsi, A est négatif et l'amplitude, nulle au départ, croit progressivement.

2.2. La saturation

a **-** Si l'amplitude de $\dot{q}$ augmente, il en est de même pour l'intensité i, ainsi que pour $u_s = (R + R_o)\, i$, jusqu'à ce que $u_s = \pm V_{sat}$, tension de saturation ; alors l'amplificateur opérationnel n'est plus en régime linéaire, mais en régime saturé.

b - L'équation différentielle en régime saturé

Avec $u + u_L + u_C = 0$ et $u = u_- = u_{E-S} + u_s = Ri \pm V_{sat}$

on obtient : $$\ddot{q} + \frac{(R + r)}{L}\dot{q} + \omega_o^2 q = \pm V_{sat}$$

Le coefficient de $\dot{q}$ étant une constante positive, l'amplitude des oscillations va décroître (le deuxième membre de l'équation étant constant, cela ne change pas la résolution).

2.3. L'entretien des oscillations

Quand u_s a suffisamment diminué, on revient en régime linéaire, l'amplitude des oscillations augmente à nouveau, et ainsi de suite. On arrive à un état d'équilibre entre les deux états de fonctionnement, dû à la non linéarité du dispositif, mais qui maintient finalement l'amplitude constante.

3. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE VAN DER POL

3.1. Cette équation explique la stabilisation des oscillations

Le coefficient A de la dérivée première $\dot{z}$ de la variable z est une fonction de cette variable, de telle sorte que ce coefficient change de signe au cours du temps, donc que l'on passe rapidement d'oscillations à amplitude croissante à des oscillations à amplitude décroissante pour avoir en fait un équilibre entre les deux et des oscillations entretenues d'amplitude constante.

$$\ddot{z} + \alpha \left(\frac{z^2}{a^2} - 1 \right) \dot{z} + \omega_o^2 \, z = 0$$

Si $|z| < a$, le coefficient A (de $\dot{z}$) est négatif, l'amplitude des oscillations augmente.

Si $|z| > a$, le coefficient A est positif, l'amplitude des oscillations diminue.

3.2. Résolution de l'équation de Van der Pol

Dans l'équation ci-dessus, on choisit a = 1 et $\omega_o = 1$, ce qui simplifie la résolution.

$$\ddot{z} + \alpha \, (z^2 - 1) \, \dot{z} + z = 0$$

a **-** La dérivée de z est :

$$\dot{z}_{(t)} = \lim_{dt \to 0} \frac{z_{(t + dt)} - z_{(t)}}{dt}$$

d'où, en considérant dt extrêmement petit :

$$\dot{z}_{(t)} = \frac{z_{(t + dt)} - z_{(t)}}{dt}$$

soit :

$$\mathbf{z_{(t + dt)} = z_{(t)} + \dot{z}_{(t)} \, dt} \qquad \textbf{(1)}$$

b **-** De même : $$\ddot{z}_{(t)} = \lim_{dt \to 0} \frac{\dot{z}_{(t+dt)} - \dot{z}_{(t)}}{dt}$$

donne : $$\boldsymbol{\dot{z}_{(t+dt)} = \dot{z}_{(t)} + \ddot{z}_{(t)}\, dt}$$

c **-** Avec l'équation différentielle on peut écrire :

$$\ddot{z}_{(t)} = \alpha \left(1 - z_{(t)}{}^2\right) \dot{z}_{(t)} - z_{(t)}$$

Avec l'expression du ***b***, on obtient :

$$\boldsymbol{\dot{z}_{(t+dt)} = \dot{z}_{(t)} + \left[\alpha\, (1 - z^2)\, \dot{z}_{(t)} - z_{(t)}\right] dt} \qquad \textbf{(2)}$$

3.3. **Tracé des oscillations à l'ordinateur avec le tableur**

On prend comme conditions initiales $z_o = 0$ et on peut choisir par exemple $\dot{z}_o = 0{,}05$, ainsi que $\alpha = 0{,}1$ et $dt = 0{,}08$; on crée une suite de mille cinq cents valeurs de t, de zéro à cent vingt, puis on fait calculer par l'ordinateur les valeurs correspondantes de z (expression (1)) ; ceci nécessite les calculs des valeurs de la dérivée de z (expression (2)) et on trace le graphe $z_{(t)}$.

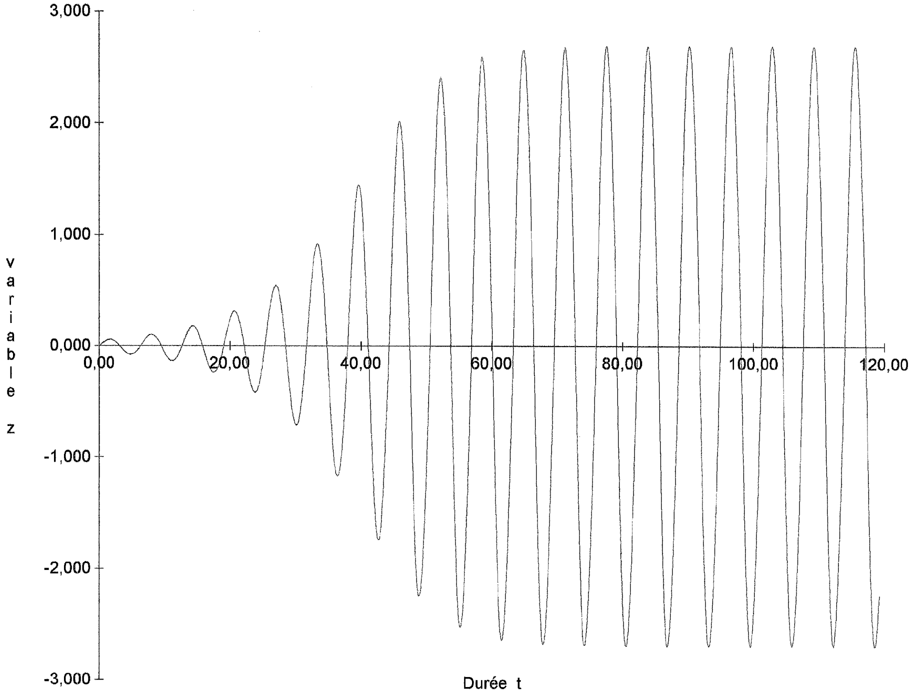
Avec les valeurs données ici, et en faisant effectuer le calcul pour mille cinq cents valeurs successives de t, on obtient les oscillations représentées sur le graphe.

On peut se limiter à cinq cents valeurs avec dt = 0,2 s.

Équation de Van der Pol

$z_o = 0{,}0$; $\dot{z}_o = 0{,}05$; $dt = 0{,}08$; $\alpha = 0{,}1$

	Instant t	**Ordonnée z**	**Dérivée $\dot{z}$**
0	**0,00**	**0,000**	**0,050**
1	0,08	0,004	0,050
2	0,16	0,008	0,050
3	0,24	0,012	0,050
4	0,32	0,016	0,050
5	0,40	0,020	0,049
6	0,48	0,024	0,048
7	0,56	0,028	0,046
8	0,64	0,031	0,044
9	0,72	0,035	0,042
10	0,80	0,038	0,040
747	59,76	0,843	– 2,342
748	59,84	0,655	– 2,415
749	59,92	0,462	– 2,478
750	60,00	0,264	– 2,531
751	60,08	0,061	– 2,571
752	60,16	– 0,144	– 2,596
753	60,24	– 0,352	– 2,605
754	60,32	– 0,561	– 2,595
755	60,40	– 0,768	– 2,565
756	60,48	– 0,973	– 2,512
1491	119,28	– 2,226	1,458
1492	119,36	– 2,109	1,590
1493	119,44	– 1,982	1,715
1494	119,52	– 1,845	1,833
1495	119,60	– 1,698	1,946
1496	119,68	– 1,543	2,052
1497	119,76	– 1,378	2,153
1498	119,84	– 1,206	2,248
1499	119,92	– 1,026	2,336
1500	120,00	– 0,839	2,417


3,000
2,000
1,000
0,000
-1,000
-2,000
-3,000
variable z
0,00
20,00
40,00
60,00
80,00
100,00
120,00
Durée t