

Un modèle expérimental de l'oscillateur de Van der Pol

par D. MEIER
Math'spé - Lycée B. Pascal - 68000 Colmar

Dans le domaine des vibrations, l'oscillateur non linéaire de Van der Pol constitue, par la forme du coefficient du terme du premier ordre, un modèle approché d'un grand nombre d'oscillateurs réels.

Son intérêt est double car il permet d'interpréter le comportement d'un système oscillant d'amplitude limitée et de visualiser l'évolution du régime quasi-sinusoidal des oscillations vers le régime relaxatif grâce à la variation d'un seul paramètre.

La rénovation pédagogique en cours nous conduit, tant dans le secondaire que dans le supérieur, à mettre en œuvre un enseignement tourné d'abord vers l'expérimentation. On propose dans cet article, qui peut être exploité dans le cadre du nouveau programme de terminale S, d'étudier un circuit électronique réalisant un oscillateur de Van der Pol.

Toute étude théorique approfondie a été volontairement écartée de cet article, la bibliographie proposée en annexe devrait permettre d'effectuer celle-ci.

1. CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES ÉLÉMENTAIRES

La résolution de l'équation différentielle :

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega^2y = 0$$

correspondant à un oscillateur libre faiblement amorti conduit à la solution suivante :

$$y(t) = y_0 \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t)$$

pour les conditions initiales : $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$ et en notant $\Omega^2 = \omega^2 - \lambda^2 \approx \omega^2$.

On comprend alors facilement que λ , le coefficient du terme du premier ordre joue un rôle capital dans l'évolution de l'amplitude des oscillations. En effet, si λ est positif les oscillations s'amortissent exponentiellement alors que si λ est négatif celles-ci croissent exponentiellement et ne seront limitées que par des effets extérieurs au système.

Dans l'équation proposée par M. Van der Pol :

$$\ddot{y} - \varepsilon\omega \left(1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right) \dot{y} + \omega^2 y = 0$$

le coefficient du terme du premier ordre $\lambda(y)$ est une fonction du carré de l'amplitude des oscillations :

$$2\lambda(y) = \varepsilon\omega \left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1 \right)$$

La dépendance quadratique en fonction de y assure une indépendance de $\lambda(y)$ vis-à-vis du signe de $\cos(\Omega t)$.

Comment évolue le signe de $\lambda(y)$ dans cette équation ?

- Pour $y \rightarrow 0$ alors $2\lambda(y) \rightarrow -\varepsilon\omega$ et les oscillations croissent de façon exponentielle. On peut déjà remarquer que le taux de croissance des oscillations diminue avec la croissance même de ces oscillations.
- Lorsque $y = \pm y_0$ ce coefficient s'annule et les oscillations sont rigoureusement sinusoïdales. Dans le cadre d'un modèle purement théorique le système oscillerait infiniment de façon sinusoïdale à la pulsation ω . Il est clair que dans la pratique des perturbations de tous ordres viennent modifier l'état de ce système et qu'il est nécessaire d'étudier le cas où $y > y_0$.
- Pour $y > y_0$ alors $2\lambda > 0$ et les oscillations s'amortissent exponentiellement. Cet oscillateur constitue de ce fait un système auto-moderateur.

Un système régi par une telle équation donnerait naissance à des oscillations de valeur crête à crête $\approx 2y_0$ qui seront d'autant plus sinusoïdales que le terme du premier ordre est voisin de zéro. Cette

dernière condition est réalisée si $\epsilon \rightarrow 0$. On se propose de vérifier ceci expérimentalement grâce au montage présenté dans le paragraphe suivant.

2. PRÉSENTATION DU MONTAGE

On propose de réaliser le montage ci-après.

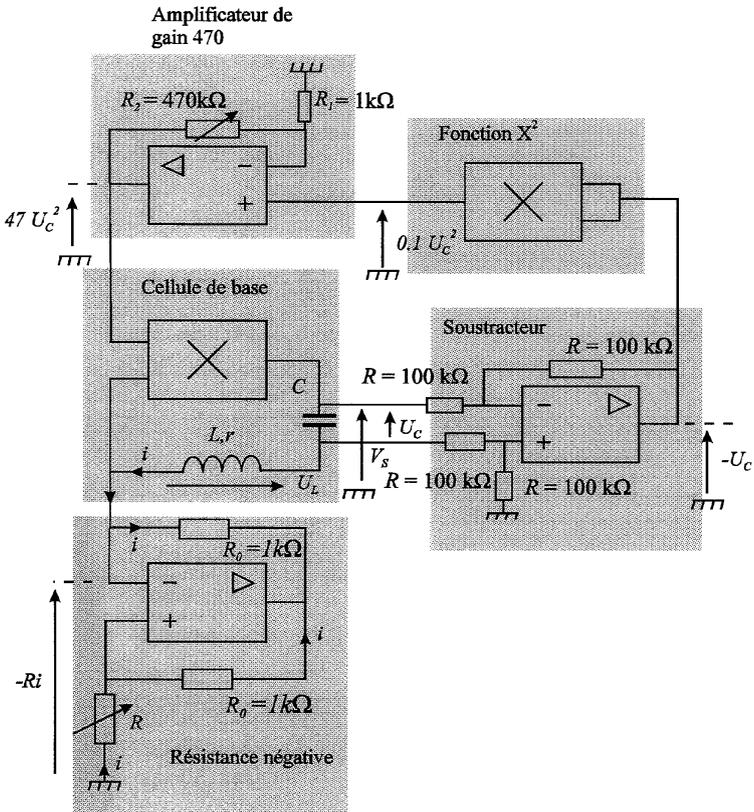


Figure 1 : Oscillateur de Van der Pol.

Le montage d'apparence complexe, s'interprète en fait facilement. L'oscillateur est constitué d'une cellule de base et de quatre éléments auxiliaires qui permettent de réaliser le comportement prévu par l'équation différentielle de Van der Pol.

• La cellule de base est constituée d'un multiplieur qui délivre une tension de sortie V_S proportionnelle au produit des tensions d'entrées, le facteur de proportionnalité étant de $k = 0.1 \text{ V}^{-1}$ pour les circuits AD 734 utilisés ici. Les tensions d'entrée pour ce multiplieur étant respectivement $-Ri$ (obtenu par le montage à «résistance négative») et kKU_C^2 (obtenue en sortie de l'amplificateur de gain $K = 470$), la tension V_S s'écrit :

$$V_S = k^2KU_C^2(-Ri)$$

• D'autre part on peut appliquer la loi des mailles au niveau de la maille constituée par V_S , U_C , $U_{(L,r)}$ et $-Ri$,

$$V_S = U_C + U_{L,r} - Ri$$

En égalant les deux expressions de V_S on obtient la relation suivante :

$$-k^2KU_C^2Ri = U_C + U_{L,r} - Ri$$

avec
$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$$

que l'on remplace dans la relation précédente. On obtient :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} - \left(\frac{R}{L}\right) \left(1 - \frac{r}{R} - k^2KU_C^2\right) \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0$$

Les composants utilisés permettent de faire l'approximation suivante : $r \ll R$ d'où :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} - \left(\frac{R}{L}\right) \left(1 - k^2KU_C^2\right) \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0$$

On pose $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, $\varepsilon\omega = \frac{R}{L}$, $U_0^2 = \frac{1}{k^2K}$ dans l'équation précédente et :

$$\frac{d^2U_C}{dt} - \varepsilon\omega \left(1 - \frac{U_C^2}{U_0^2}\right) \frac{dU_C}{dt} + \omega^2 U_C = 0$$

on retrouve l'équation de Van der Pol.

- La bobine utilisée est une bobine AOIP de 0.1 H et de résistance de l'ordre de 40Ω à 1 kHz. Le condensateur a une capacité de 220 nF de sorte que la fréquence des oscillations soit de l'ordre du kilohertz ce qui permet d'utiliser pour les calculs les valeurs données par un pont RLC classique fonctionnant à 1 kHz.

- La «résistance négative» est obtenue par un montage classique, mais qui ne doit jamais être en saturation contrairement au montage de «l'oscillateur à résistance négative». Les valeurs des résistances R_0 ne sont pas critiques, il faut simplement éviter la saturation du montage.

La résistance R influe directement sur le coefficient ε , on choisira un potentiomètre de 10 k Ω .

- Le bloc soustracteur peut être obtenu par le montage proposé ou par un amplificateur différentiel du type AD620, ce qui limiterait le nombre de composants du montage. Il faut noter que le courant qui circule entre le condensateur et la bobine ne doit pas être dévié par ce bloc, d'où la forte valeur des résistances. On obtient en sortie $-U_C$ ce qui n'est pas gênant puisque le bloc suivant élève cette tension au carré.

- La valeur du coefficient de proportionnalité des multiplieurs nous conduit, pour éviter la saturation de certains amplificateurs opérationnels, à introduire un montage amplificateur non inverseur de gain $K = 470$ afin d'obtenir une amplitude de l'ordre du volt. On peut remplacer dans le montage la résistance de 470 k Ω par un potentiomètre qui permet de faire varier l'amplitude des oscillations.

3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

On peut observer les signaux grâce à un oscilloscope (numérique pour enregistrer les courbes dans le plan de phase) branché à la sortie du montage soustracteur, ce qui donne $U_C(t)$ en voie X.

- On ajuste la valeur de R par l'intermédiaire du potentiomètre du montage à «résistance négative» à une valeur de $\sim 1\,700 \Omega$, l'approximation $r \ll R$ est justifiée et ε a une valeur de ~ 0.9 . L'enregistrement

de la naissance des oscillations donne l'oscillogramme (voir figure 2) avec une sensibilité de 0.2 V / div. et un balayage de 0.2 ms / div.

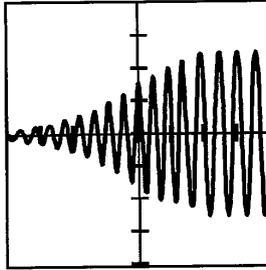


Figure 2

Compte tenu des valeurs des coefficients des multipliers et du gain de l'amplificateur non inverseur utilisé, la valeur théorique attendue de U_0 est $U_0 = \frac{1}{k^2 K} \approx 0.21$ V. Une mesure au voltmètre donne 0.23 V, l'accord est des plus corrects.

La mesure de la fréquence en régime permanent donne 1 100 Hz, là aussi l'accord est acceptable. On peut pousser notre étude un peu loin en observant la naissance de ces oscillations dans le plan de phase. Il suffit de connecter l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel constituant la «résistance négative» (qui donne une image de $\frac{dU_C}{dt}$) à l'autre voie de l'oscilloscope et d'enclencher le mode XY de l'appareil. On a enregistré l'oscillogramme de la figure 3.

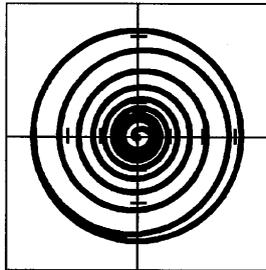


Figure 3

Le réglage des sensibilités des deux voies est différent puisqu'il faut compenser l'effet de RC dans le signal prélevé au niveau de la voie Y :

$$RC \frac{dU_C}{dt}$$

en effet pour conclure quant au caractère harmonique du signal dans le plan de phase il faut visualiser :

$$\frac{1}{\omega} \frac{dU_C}{dt}$$

en fonction de U_C . Le rapport des sensibilités des voies doit être ici de $\frac{1}{RC\omega} \approx 0.4$, cette condition étant respectée, on constate effectivement que le signal s'inscrit dans un cercle limite, ce qui garantit le caractère périodique et sinusoïdal de l'oscillateur.

- On maintient la valeur du gain de l'amplificateur à 470, de ce fait, la valeur de l'amplitude du signal reste constante. Cependant il est intéressant de faire évoluer la valeur de R afin d'augmenter celle de ε et de visualiser, toujours dans le plan de phase, l'évolution du «cercle» limite vers un cycle limite. Les oscillogrammes suivants ont été obtenus pour une valeur de $R \sim 4\,700\ \Omega$ correspondant à $\varepsilon \sim 2.4$.

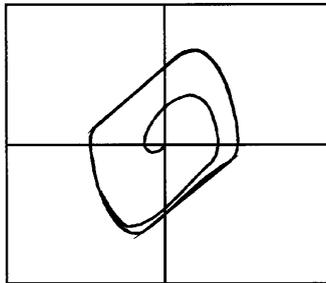
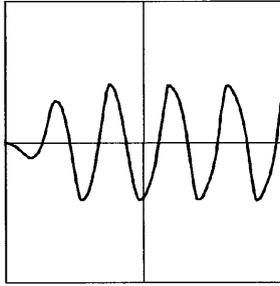
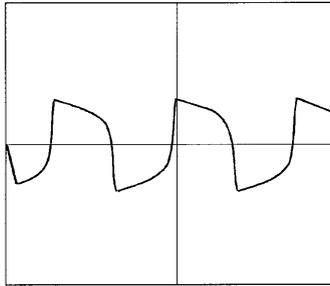
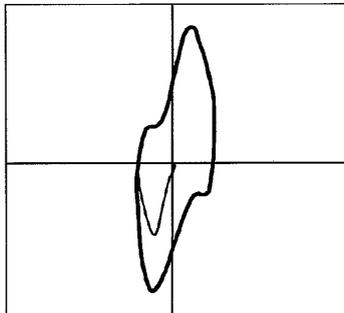


Figure 4

On constate effectivement une déformation du cycle limite comparable à celle donnée par un tracé informatique. La valeur de l'amplitude est restée constante alors que la période a augmenté, mais cette fois l'écart à l'harmonicité est plus important, ce que l'on peut constater sur l'enregistrement de $U_C(t)$ donné par l'oscillogramme de la figure 5.

**Figure 5**

- On continue à faire évoluer la valeur de R donc le coefficient ε et on observe l'évolution du cycle limite. Les oscillogrammes suivants ont été obtenus pour une valeur de R de $10\text{ k}\Omega$ correspondant à une valeur de ε de ~ 5 .

**Figure 6****Figure 7**

On constate toujours une amplitude constante, une augmentation de la période et une déformation encore plus accentuée du signal. L'observation dans le plan de phase conduit à l'oscillogramme de la figure 7.

On constate effectivement une déformation du cycle limite, cependant celui-ci s'écarte de celui que l'on obtiendrait avec un tracé informatique. Une des explications que l'on peut proposer réside dans l'écart à l'harmonicité du signal qui devient de plus en plus important, générant ainsi des harmoniques de fréquences élevées pour lesquelles le comportement des composants utilisés n'est plus celui prévu autour de 1 kHz.

Remarques :

– On peut s'interroger quant à l'utilité de l'étage amplificateur, contre toute attente celui-ci sert à **réduire** l'amplitude du signal de façon à éviter la saturation des amplificateurs opérationnels. En l'absence de cet étage nous aurions une amplitude théorique du signal de $y_0 = \frac{1}{k} = 10 \text{ V}$ et l'intensité du courant serait de l'ordre de

$$\sqrt{\frac{C}{L}} y_0 \sim 30 \text{ mA} !$$

– On pourrait penser qu'en modifiant les rapports des résistances du montage différentiateur, on pourrait obtenir une amplification qui permettrait de supprimer l'amplificateur non inverseur, en fait il n'en n'est rien. Le système étant bouclé le terme correspondant à ce gain se simplifie dans l'expression de y_0 .

– Cette étude se prête particulièrement bien à une étude assistée par ordinateur, ce qui a d'ailleurs été fait en préalable à cet article, l'accord avec les courbes données par informatique est remarquable pour les faibles valeurs de ε .

BIBLIOGRAPHIE

- Y. ROCARD : «*Dynamique générale des vibrations*», Éditions Masson.
- M. SOUTIF : «*Vibration, propagation, diffusion*», Dunod Université.
- H. GIÉ et J.-P. SARMANT : «*Le portrait de phase des oscillateurs*», B.U.P. n° 744.