

Les fractales, nouvelle géométrie de la nature¹

par Charles RUHLA

Institut de physique nucléaire de Lyon

43, boulevard du 11 Novembre - 69622 Villeurbanne Cedex

Parler des rapports entre la géométrie et les phénomènes naturels c'est d'abord réfléchir à la notion d'espace. C'est par nos cinq sens que nous entrons en relation avec le monde extérieur et nous commençons à ressentir l'existence de l'espace dès le berceau. Vers le troisième mois, le bébé qui agite les bras commence à toucher volontairement les jouets que l'on a disposés à sa portée et quelques mois plus tard, cet apprentissage spontané aboutit à un mécanisme très élaboré qui coordonne les mouvements du bras et des mains avec la vision binoculaire et permet la préhension des objets. Dès ce moment là, la notion de distance est acquise, mais elle est limitée à la longueur des bras. Ensuite, le bébé se met à marcher, son espace s'élargit aux murs de sa chambre, et la distance se mesure, de façon intuitive, au nombre de pas. Enfin, quelques années plus tard, l'espace de l'enfant s'est agrandi jusqu'aux limites de la cour de récréation et la mesure de la distance s'est quantifiée car un écolier sait compter le nombre de pas. Ainsi, à partir de la notion de distance, qui résulte de nos sensations, se sont élaborés deux nouveaux concepts :

- la longueur, qui est la mesure de la distance,
- l'espace, qui est l'ensemble des distances.

LA MESURE DES DISTANCES ET LA GÉOMÉTRIE D'EUCLIDE

La mesure des distances par le nombre de pas reste une méthode imprécise et subjective. Celui qui tente le retour aux sources en allant visiter la cour de l'école de son enfance est toujours surpris de la trouver si petite. C'est parce qu'il la mesure intuitivement à l'échelle de ses pas

1. *N.D.L.R.* : En raison de l'actualité du sujet, cet article est publié conjointement dans les revues de l'ADASTA et de l'U.d.P. afin de toucher rapidement le plus large public possible.

d'adulte et non plus à l'échelle de ses pas d'enfant. Le premier rôle du physicien est donc de définir la mesure des longueurs par une méthode qui soit à la fois précise et objective.

Voici la suite des opérations qui définissent une longueur (figure 1) :

- Deux règles droites identiques AB et BC représentent la longueur conventionnelle d'un étalon arbitraire.
- En les alignant bout à bout, on obtient une longueur $AC = 2 AB$.
- Cette opération peut être poursuivie indéfiniment et permet de mesurer n'importe quelle distance.

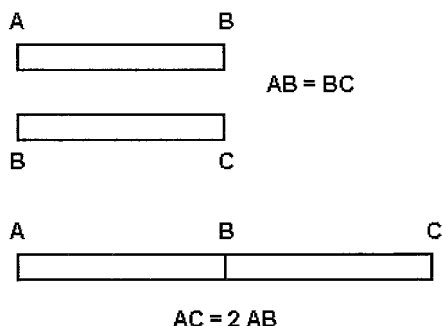


Figure 1 : Deux opérations permettent de définir la longueur, grandeur mesurable :

- L'identité de deux longueurs : $AB = BC$
- La somme de deux longueurs : $AC = 2 AB$

Cette méthode, qui nous apparaît comme évidente, comporte en fait deux postulats implicites :

- La définition de la ligne droite, identifiée à la notion de rayon lumineux.
- La définition du corps solide, permettant de réaliser une règle rigide qui donne des résultats reproductibles quelle que soit son orientation par rapport à la verticale.

Dès que la notion de longueur est maîtrisée, tout est prêt pour construire des segments de droite, des carrés, des cubes... et ce sont les Grecs - en particulier EUCLIDE - qui ont le mieux développé cette géométrie euclidienne avec laquelle nous vivons toujours aujourd'hui. Elle nous fournit de très bons modèles pour la représentation des objets naturels : par exemple, la planète Saturne est très bien représentée par une sphère et ses anneaux par des cercles (figure 2).

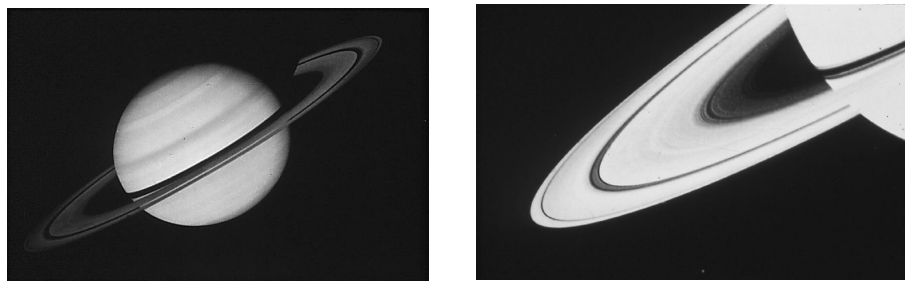


Figure 2 : La planète Saturne est très bien représentée par une sphère et ses anneaux par des cercles. C'est un bon exemple de modélisation par la géométrie euclidienne.

On peut caractériser les figures de la géométrie euclidienne classique par l'épreuve de la loupe («effet zoom»). Par exemple, si l'on observe un carré à la loupe, on constate qu'il a perdu son individualité propre car il est devenu méconnaissable ; suivant le grossissement, on ne voit plus qu'un angle droit, ou même qu'un segment de droite (figure 3). Cette épreuve est très importante car elle va nous conduire à la géométrie fractale.

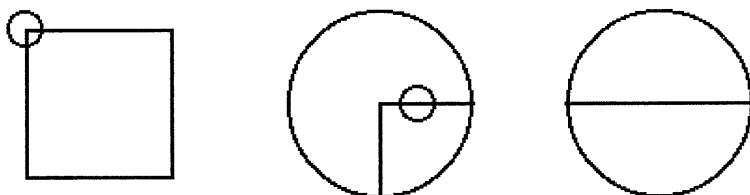


Figure 3 : Un carré que l'on regarde à la loupe n'est plus reconnaissable ; à faible grossissement, on observe un angle droit, et à fort grossissement, un segment de droite. Tous les objets euclidiens classiques perdent leur individualité propre lorsqu'on leur fait subir l'épreuve de la loupe.

D'EUCLIDE À MANDELBROT

Il existe des objets naturels pour lesquels la géométrie d'EUCLIDE ne nous fournit pas une représentation suffisante, bien qu'ils ne soient pas en contradiction avec elle. En voici un exemple (figure 4) :

– *Un dépôt électrolytique de cuivre présente des arborescences très spectaculaires et très caractéristiques.*

– Quand on découpe une fenêtre dans cet objet et que l'on agrandit fortement l'image de la région correspondante, on retrouve les mêmes arborescences très spectaculaires et très caractéristiques.

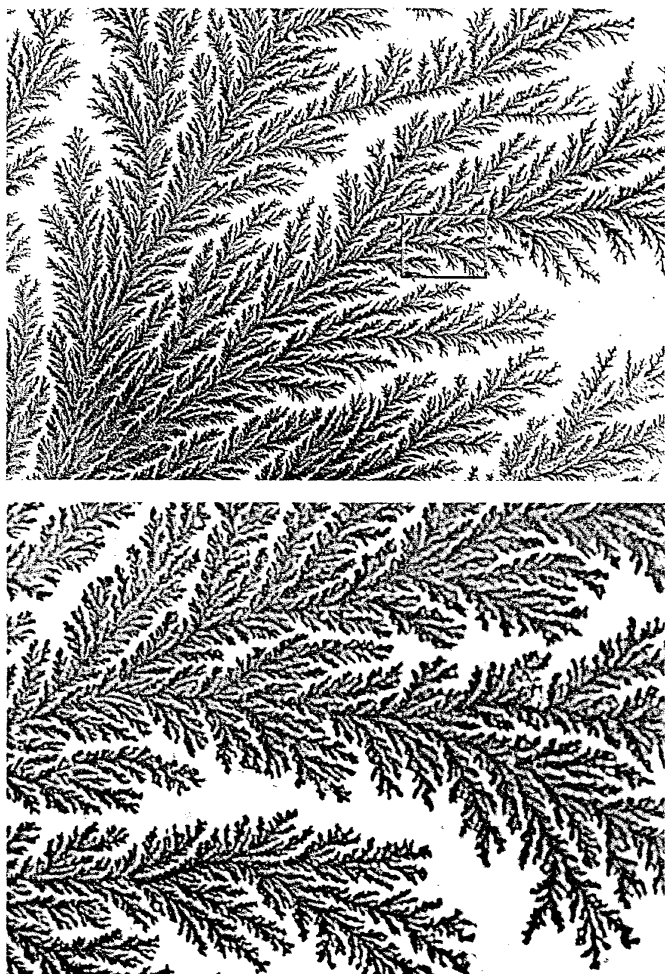


Figure 4 : Ce dépôt électrolytique de cuivre à deux dimensions a été obtenu entre deux plaques de verre très rapprochées. Dans l'image supérieure on délimite un petit rectangle que l'on présente agrandi dans l'image inférieure. Le dépôt reste reconnaissable après avoir subi l'épreuve de la loupe ; on dit qu'il est autosimilaire (V. FLEURY Laboratoire PMC, École Polytechnique).

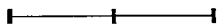
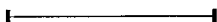
Cet objet conserve donc son individualité propre quand on lui fait subir l'épreuve de la loupe et les mathématiciens désignent cette propriété sous le nom d'autosimilarité ou encore d'invariance d'échelle. Cette propriété très simple est aussi très fondamentale, car elle caractérise les structures fractales et nous sommes maintenant capables d'en proposer une première définition : **«Une structure est fractale si elle nous apparaît identique à elle-même quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe».**

A partir des années 60, le mathématicien français Benoît MANDELBROT a développé la théorie des objets autosimilaires, montrant que ces objets avaient une dimension fractionnaire ; il les a baptisés fractals² et ce nom possède un grand pouvoir de fascination car il évoque irrésistiblement des figures géométriques particulièrement esthétiques. Ceci nous amène tout naturellement à définir la dimension, d'abord en géométrie euclidienne classique, puis ensuite en géométrie fractale.

LA NOTION DE DIMENSION

Depuis l'école primaire nous pratiquons sans trop bien le savoir la notion de dimension car on nous apprend que les longueurs se mesurent en mètre, les surfaces en mètre carré, et les volumes en mètre cube. Un peu plus tard, on nous dit que cela correspond à des dimensions 1, 2, et 3 ; mais on peut souhaiter définir le concept de dimension d'une manière un peu plus opérationnelle et nous allons le faire sur trois exemples (figure 5) :

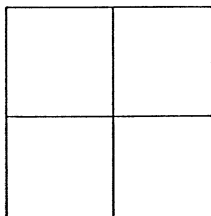
- *Divisons un segment de droite en deux segments égaux*



Le nombre de morceaux est	$m = 2$
Le rapport de similitude est	$s = 2$
La dimension est	$d = 1$
m , s , et d vérifient la relation	$m = (s)^d$

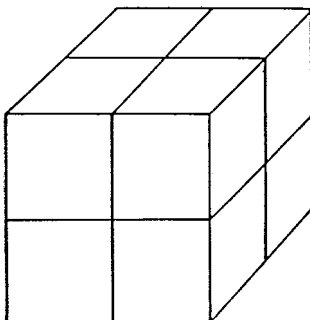
2. Benoît MANDELBROT a choisi le mot fractal au masculin pour qu'il ait la même orthographe en français et en anglais, mais l'usage en français évolue vers le féminin parce que l'on pense à la structure plutôt qu'à l'objet.

- *Divisons un carré en quatre carrés égaux*



Le nombre de morceaux est $m = 4$
 Le rapport de similitude est $s = 2$
 La dimension est $d = 2$
 m, s, et d vérifient la relation $m = (s)^d$

- *Divisons un cube en huit cubes égaux*



Le nombre de morceaux est $m = 8$
 Le rapport de similitude est $s = 2$
 La dimension est $d = 3$
 m, s, et d vérifient la relation $m = (s)^d$

Figure 5 : La dimension des objets euclidiens classiques est $d = 1$ pour un segment de droite, $d = 2$ pour un carré et $d = 3$ pour un cube. D'une façon générale d est donné par la relation $d = \ln(m)/\ln(s)$.

La relation $m = (s)^d$ a un caractère général qui permet de définir la dimension par la relation :

$$d = \ln(m)/\ln(s)$$

Cette dimension entière d est appelée dimension topologique par les mathématiciens.

CANTOR, SIERPINSKI, ET Menger

Maintenant que nous disposons d'une méthode de calcul de d nous allons nous demander s'il existe des objets pour lesquels la valeur de d n'est pas entière, mais fractionnaire. Le problème n'est pas nouveau puisque dès le début du siècle les mathématiciens avaient imaginé des objets difficiles à classer dans le moule euclidien habituel au point qu'ils étaient qualifiés de pathologiques. Le grand mérite de MANDELBROT est d'avoir montré que ces objets n'avaient rien de pathologique, mais, bien au contraire, qu'ils s'intégraient dans un grand ensemble d'objets autosimilaires dont la dimension D est fractionnaire.

L'exemple le plus simple de structure fractale est l'ensemble de CANTOR, connu depuis le début du siècle, et dont la règle de construction est très simple (figure 6) :

- *Partir d'un segment de droite de longueur a .*
- *Couper ce segment en trois morceaux égaux.*
- *Retirer le segment central.*
- *Recommencer cette opération sur les deux morceaux qui restent...*

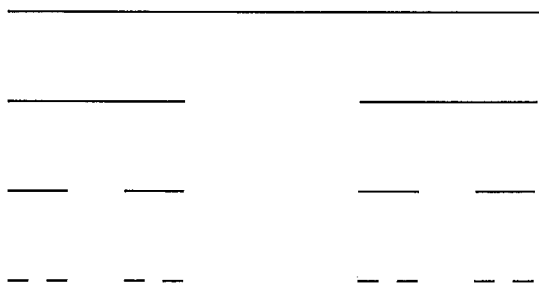


Figure 6 : L'ensemble de CANTOR est une structure fractale de dimension $d = 0,6309...$

Cette opération peut se poursuivre indéfiniment et elle génère un objet mathématique qui a deux propriétés géométriques caractéristiques :

- **L'ensemble de CANTOR est autosimilaire.** En effet, on passe toujours par la même opération d'un niveau donné au niveau immédiatement inférieur.
- **L'ensemble de CANTOR a une dimension fractionnaire.** En effet, si l'on applique la formule définissant la dimension, on a :

$$D = \ln(m)/\ln(s) = \ln(2)/\ln(3) = 0,6309...$$

Cette dimension fractionnaire D est appelée dimension fractale par les mathématiciens. La dimension fractale est notée D car elle est toujours supérieure à la dimension topologique d^3 .



Figure 7 : Le tapis de SIERPINSKI est une structure fractale de dimension $d = 1,8928...$

3. Lorsque l'on divise indéfiniment les segments de droite on obtient une infinité de points alignés appelée «poussière de CANTOR» ; la dimension topologique de ces points est $d = 0$. En revanche, la dimension fractale est $D = 0,6309...$ et l'on a $D > d$.

Cet exemple permet de mieux comprendre la définition précise des structures fractales donnée par les mathématiciens : «*Structure géométrique dont la dimension de HAUSDORFF-BESICOVITCH est supérieure à la dimension topologique*» (voir GUYET, cité en bibliographie).

L'ensemble de CANTOR a une structure fractale.

En s'inspirant de la méthode de construction de l'ensemble de CANTOR on peut construire d'autres structures fractales intéressantes :

- Le tapis de SIERPINSKI, qui nous apparaît comme une dentelle de dimension fractale $D = \ln(8) / \ln(3) = 1,8928\dots$ (figure 7).
- L'éponge de Menger, qui ne contient plus de matière, mais seulement des trous. Elle nous apparaît comme un gruyère ultraléger et sa dimension fractale est $D = \ln(20) / \ln(3) = 2,7268\dots$ (figure 8).

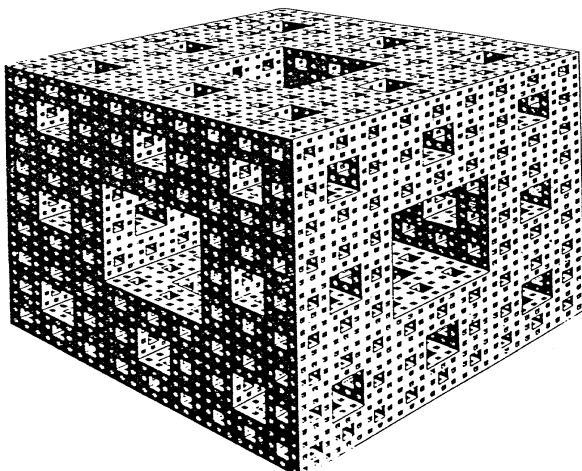


Figure 8 : L'éponge de Menger est une structure fractale de dimension $d = 2,7268\dots$

Enfin, l'imagination des mathématiciens étant sans limites, on connaît maintenant l'ensemble de MANDELBROT, qui résulte d'une loi itérative particulièrement simple $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + C$, et qui est d'une richesse infinie (figure 9)⁴.

4. L'ensemble de MANDELBROT est l'ensemble des points du plan complexe d'affixe C tels que la variable complexe $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$, d'origine $Z_0 = 0$, converge quand n entier tend vers l'infini.

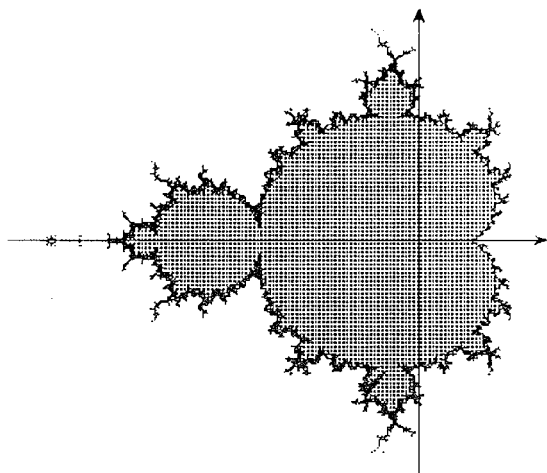


Figure 9 : L'ensemble de MANDELBROT est une structure fractale d'une richesse infinie que l'on construit sur ordinateur à partir d'une loi d'itération très simple $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + C$.

Tous ces nouveaux objets mathématiques s'intègrent parfaitement dans le cadre de la géométrie fractale mais nous allons maintenant chercher des objets physiques entrant dans le même moule. Comme il s'agit cette fois d'objets réels, nous devons limiter nos exigences et rechercher une autosimilarité qui ne sera plus rigoureuse mais seulement statistique. Par ailleurs, cette autosimilarité ne s'étendra pas jusqu'à l'infini, comme en mathématiques, mais sera réduite à quelques ordres de grandeur (deux au minimum)⁵.

LA CÔTE DE BRETAGNE

Voici un exemple d'utilisation de la géométrie fractale pour simuler un objet naturel :

Essayons d'imaginer les impressions d'un parachutiste largué à très haute altitude au-dessus de la Bretagne et qui descend lentement vers

5. Pour de nombreux objets réels, on vérifie que la masse M , contenue dans une sphère de rayon R centrée sur l'objet, est proportionnelle à R^D . Ce résultat expérimental définit la dimension fractale de masse D . On peut vérifier sur la courbe de KOCH, affectée d'une densité linéique, que la valeur de D ainsi obtenue est bien la même que celle donnée par la relation $D = \ln(m) / \ln(s)$ (voir GOUYET, cité en bibliographie).

le sol ; il suffit pour cela de regarder une suite de cartes géographiques d'échelle croissante. Toutes les cartes observées présentent toutes le même aspect : celui d'une côte très découpée avec des pointes et des creux (figure 10). Nous appellerons cela une autosimilarité statistique qui, elle aussi, caractérise une structure fractale. La dimension fractale D , mesurable sur les cartes, est de l'ordre de $1,25^6$.

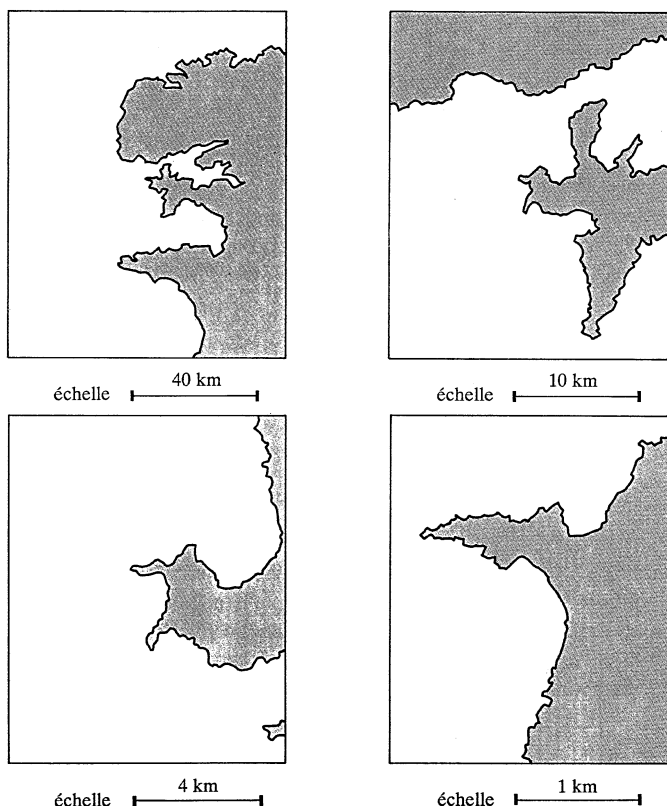


Figure 10 : Les vues successives de la côte ouest de la Bretagne telles que les observerait un parachutiste largué à très haute altitude au-dessus de la presqu'île de Crozon. Toutes ces vues présentent le même type de contour très découpé ; c'est un bon exemple d'autosimilarité statistique.

6. La mesure sur une carte de géographie avec une règle de longueur ε montre que la longueur de la côte est proportionnelle à ε^{-p} avec $p = 0,25$. On en déduit la dimension fractale D par la relation $D = (1 + p) = 1,25$ (voir GOUYET, cité en bibliographie).

Il est intéressant de chercher à se représenter la côte de Bretagne par un modèle géométrique simple et nous allons utiliser pour cela la courbe de KOCH dont voici la règle de construction (figure 11) :

- Tracer un segment de longueur a .
- Couper ce segment en trois morceaux égaux de longueur $a/3$.
- Remplacer le fragment central par deux morceaux de longueur $a/3$.
- On obtient une ligne brisée de longueur $4a/3$.
- On peut poursuivre ce processus indéfiniment...

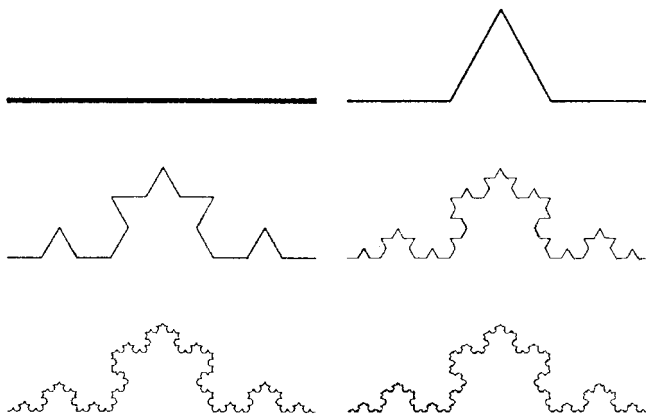


Figure 11 : La courbe de KOCH donne une bonne simulation d'une côte très découpée ; sa dimension fractale est $d = 1,2618...$

La courbe de KOCH a trois propriétés importantes :

- Elle est autosimilaire.
- Sa dimension fractale est $D = \ln(4) / \ln(3) = 1,2618...$
- Sa longueur est infinie⁷.

Elle simule bien une côte très découpée et même, sa ressemblance avec la côte de Bretagne est frappante. Il serait possible d'avoir une simulation encore meilleure en modélisant cette côte avec une structure fractale statistique.

7. Les ouvrages de géographie donnent souvent la longueur d'une côte. Cette valeur n'est significative que si l'on précise la longueur de la règle servant à faire la mesure. Plus cette règle est courte, et plus la côte est longue ; si la règle est infiniment petite, la longueur de la côte est infinie.

Dans le même ordre d'idée on peut construire sur ordinateur des images de montagnes fictives qui sont d'un réalisme remarquable par la méthode suivante (figure 12) :

- Partir d'un plan.
- Tracer une droite Δ_1 de position et de direction aléatoires.
- Dégager une marche le long de Δ_1 .
- Recommencer cette opération avec une autre droite Δ_2 ...

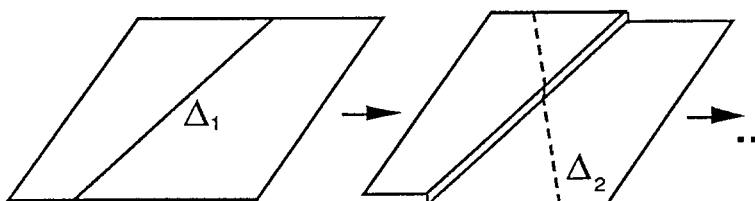


Figure 12 : Méthode itérative permettant d'obtenir une surface auto-affine irrégulière qui est une bonne simulation d'un relief naturel. On construit ainsi sur ordinateur des montagnes fictives qui paraissent aussi vraies que les vraies.

Au bout d'un certain nombre d'itérations on obtient une surface très tourmentée, parfaitement adaptée à la simulation d'un relief montagneux. De plus, la dimension fractale caractérise la texture du relief : plus elle est élevée, plus la montagne est déchiquetée. Enfin, cette méthode de simulation est maintenant une composante incontournable de la technique des images de synthèse en trois dimensions (imagerie 3D) ; elle est très utilisée par le cinéma et la télévision, chaque fois que l'on veut créer des effets spéciaux, et elle représente aujourd'hui la plus importante application pratique de la géométrie fractale.

LE PARADOXE D'OLBERS

Voici maintenant un exemple où la géométrie fractale apparaît comme un guide pour la recherche :

Dès 1823 l'astronome Allemand OLBERS s'était posé le problème de comprendre pourquoi le fond du ciel était noir pendant les nuits sans lune. A cette époque, on connaissait bien les étoiles, mais on ignorait encore l'existence des galaxies. On imaginait donc l'Univers comme un espace infini où les étoiles seraient réparties aléatoirement, mais avec une densité moyenne uniforme. Avec un tel modèle d'Univers, on

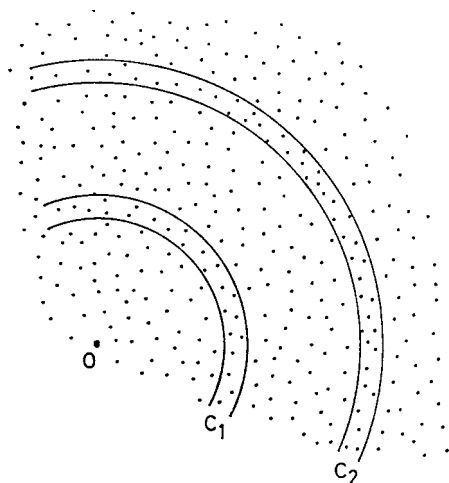


Figure 13 : Si l'on imagine que l'Univers est formé d'une infinité d'étoiles uniformément réparties il est intéressant de calculer l'intensité lumineuse reçue par l'observateur O. La couche sphérique C_2 envoie en O la même quantité de lumière que la couche sphérique C_1 , et comme le nombre de ces couches est infini, l'observateur O devrait percevoir une intensité lumineuse considérable qui lui donnerait l'impression que le fond du ciel est blanc. C'est le paradoxe d'OLBERS.

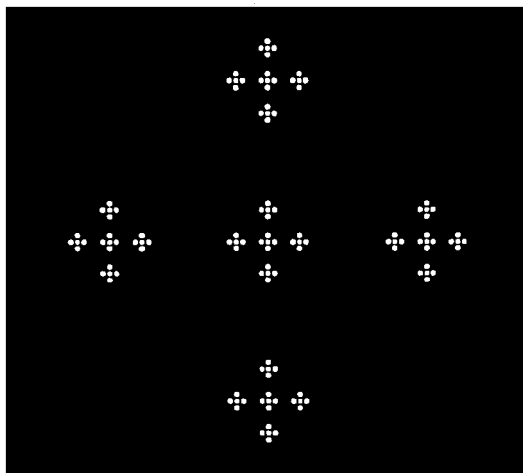


Figure 14 : Le modèle d'Univers de FOURNIER D'ALBE est un peu trop simple pour être vraiment réaliste, mais il a néanmoins le mérite de montrer que l'on peut imaginer des répartitions stellaires non uniformes pour lesquelles le fond du ciel apparaîtrait noir.

peut montrer facilement que le fond du ciel devrait être très lumineux et qu'il nous paraîtrait blanc en pleine nuit (figure 13). Comme il n'en est rien, il convient donc de rechercher un autre modèle d'Univers en révisant au moins une des deux hypothèses d'OLBERS, l'espace infini et la densité uniforme.

FOURNIER D'ALBE a proposé en 1907 un modèle d'Univers hiérarchisé de dimension fractale $D = \ln(5) / \ln(5) = 1$ pour lequel le fond du ciel apparaîtrait noir (figure 14). Ce modèle est trop régulier pour être vraiment réaliste mais il apporte déjà l'idée intéressante en rejetant le concept de densité uniforme. On a démontré depuis qu'il suffit que l'Univers ait une structure fractale de dimension fractale inférieure à 2 pour que le fond du ciel soit noir et les théoriciens travaillent dans cette voie.

On attribue aujourd'hui à l'Univers deux propriétés fondamentales :

– L'Univers visible est fini : dans le cadre de la théorie de l'expansion de l'Univers les galaxies les plus lointaines qui nous restent accessibles sont celles dont la vitesse de fuite approche celle de la lumière.

– Les galaxies ne sont pas réparties uniformément dans l'espace mais sont groupées en amas (figure 15) :

a) Le groupe local, qui comprend une vingtaine de galaxies, dont la nôtre, et dont la taille est de 1 Mpc⁸.

b) L'amas de la Vierge, qui comprend quelques milliers de galaxies, et dont la taille est de 10 Mpc.

c) Le superamas local dont la taille est de 20 Mpc.

Il n'est pas possible d'en dire plus pour le moment, mais la mise en évidence de ces amas de dimension croissante s'emboîtant les uns dans les autres suggère l'existence d'une structure fractale hiérarchisée que l'on pourrait confirmer en déterminant sa dimension. Pour cela il faudrait multiplier les mesures des très grandes distances qui sont des mesures longues et difficiles. La réponse ne pourra donc pas venir très vite mais les astrophysiciens y attachent beaucoup de prix car, si cette structure fractale pouvait être prouvée, cela voudrait dire qu'il suffirait de connaître une petite partie de l'Univers pour le connaître tout entier, et cette idée est philosophiquement très intéressante.

8. 1 Mpc = 1 Mégaparsec = $3,26 \cdot 10^6$ année-lumière = $3,08 \cdot 10^{19}$ kilomètres.

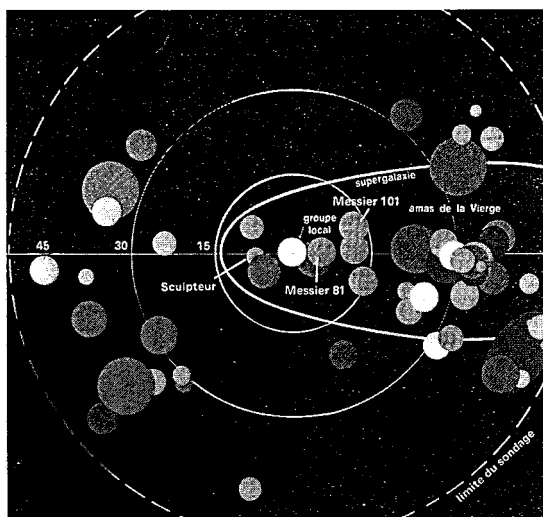


Figure 15 : Ce schéma représente nos connaissances actuelles sur la structure à grande échelle de notre Univers. On remarquera que la répartition des amas de galaxies n'est pas uniforme, mais hiérarchisée, et cela suggère l'existence d'une structure fractale qui reste à découvrir.

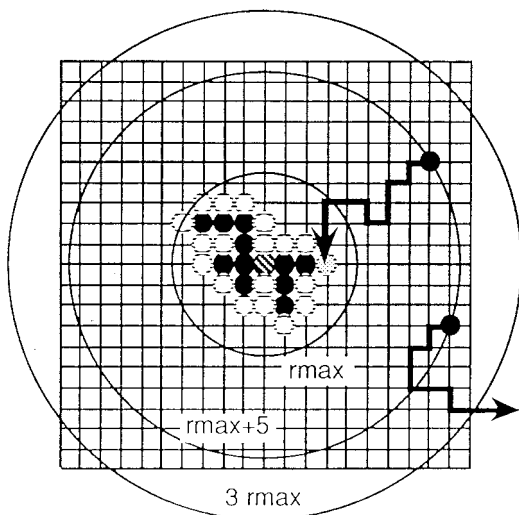


Figure 16 : Le mécanisme d'agrégation limitée par diffusion (en anglais DLA), tel qu'il est calculé sur ordinateur. Il conduit à la formation d'agrégats arborescents de dimension fractale $D = 1,71$.

LES ARBORESCENCES

Voici enfin un exemple où la géométrie fractale permet la modélisation complète d'un phénomène physique :

Les arborescences que présentent les figures de croissance cristalline, les dépôts électrolytiques, ou les étincelles électriques, sont des structures fractales naturelles particulièrement esthétiques. Leur dimension fractale a été mesurée et, de plus, on a bien compris maintenant le mécanisme qui les a fait apparaître : c'est le mécanisme DLA (Diffusion Limited Aggregation). En voici les éléments essentiels (figure 16) :

– *Dans une géométrie plane et de révolution, la cristallisation va se faire à partir d'un germe central.*

– *Les sites accessibles par les atomes voisins sont schématisés par un quadrillage. Le côté du carré élémentaire définit une unité de longueur conventionnelle.*

– *Les atomes éloignés vont venir s'agréger progressivement sur le germe et leur approche se fait par une trajectoire désordonnée qui résulte de l'agitation moléculaire (mouvement brownien).*

– *On simule ce mouvement sur ordinateur en prélevant aléatoirement les atomes sur un cercle de rayon $R = 5$, puis on leur impose un mouvement désordonné en les faisant sauter aléatoirement d'un carré à l'autre.*

– *Si, au cours de ce cheminement très tourmenté, l'atome dépasse le rayon $R = 8$, il est considéré comme définitivement perdu pour l'agrégation.*

– *Si, au contraire, l'atome reste en deçà de $R = 8$, il finira toujours par atteindre le germe, auquel il restera fixé.*

– *Ce processus favorise la formation de «bras» qui captent plus facilement les atomes en mouvement désordonné, et c'est ainsi que l'on explique l'apparition d'arborescences très développées.*

Le calcul théorique donne une dimension fractale $D = 1,71$ pour les structures arborescentes produites par le mécanisme DLA, et les mesures expérimentales donnent des résultats très proches de cette valeur (figures 17 et 18).

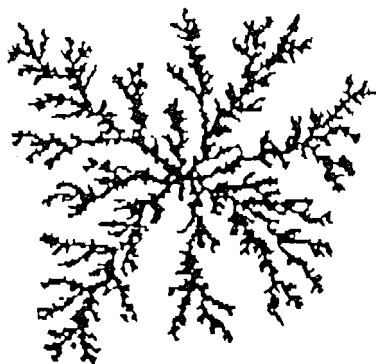


Figure 17 : Résultat d'une agrégation limitée par diffusion simulée sur ordinateur. La dimension fractale est $D = 1,71$.

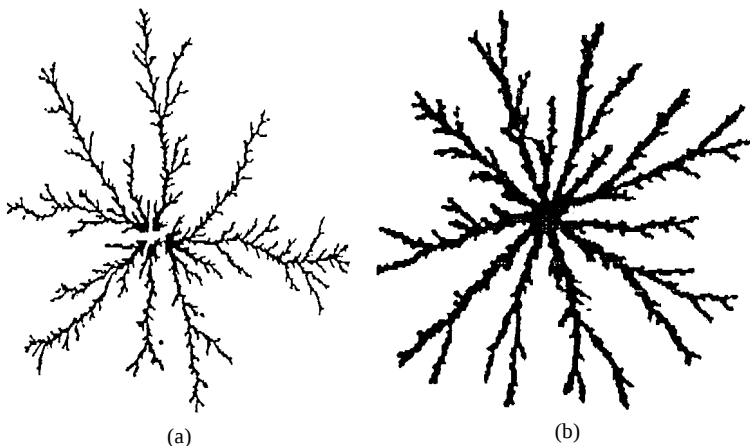


Figure 18 : Structures arborescentes formées par un mécanisme DLA :

a) Dépôt électrolytique de zinc métallique dans une couche mince d'électrolyte ; la dimension fractale est $D = 1,63$ (MATSUSHITA *et al.* 1984).

b) Un liquide peu visqueux, l'eau, est injecté au centre d'une cellule radiale contenant une solution très visqueuse de scléroglycane. Les lignes d'injection forment une structure fractale de dimension $D = 1,7 + 0,05$ (DACCORD *et al.* 1985).

L'AVENIR DES FRACTALES

Même en se limitant à la physique, il faudrait encore beaucoup de place pour présenter les applications de la géométrie fractale et nous nous contenterons de les citer : le chaos, la soudure des métaux, la structure du béton, la porosité des roches pétrolifères... mais il est temps d'aborder les conclusions.

Une nouvelle branche des mathématiques est née. Elle est l'œuvre d'un mathématicien original, travaillant en dehors du grand courant du Bourbakisme, qui était alors le grand thème à la mode. Benoît MANDELBROT a su parfaitement allier le raisonnement mathématique avec l'utilisation de l'ordinateur et s'il est vrai qu'il a été le premier, beaucoup depuis l'on suivi :

- Les mathématiciens, qui découvrent de nouvelles structures fractales et explorent leurs propriétés.
- Les physiciens, les chimistes, les biologistes, les géologues et les géographes, qui disposent maintenant, avec la géométrie fractale, d'un outil mathématique supplémentaire pour modéliser les nombreuses structures ordonnées présentées par la Nature.
- Les artistes enfin, qui ne pouvaient manquer d'être séduits par la beauté de certaines structures fractales, et qui ont pris plaisir à explorer les multiples arabesques de l'ensemble de MANDELBROT tout en les enrichissant de très belles couleurs.

BIBLIOGRAPHIE

- G. DACCORD, J. NITMAN & H.E. STANLEY : «*Fractal viscous fingers...*» Dans «*On growth and form*» (pages 203 à 210) - Éditions H.E. Stanley & N. Ostrowsky, Martinus Nijhoff Dordrecht 1986.
- J.-F. GOUYET : «*Physique et structures fractales*» - Éditions Masson - Paris 1992.
- A. HAYLI : «*Histoire de l'Univers*» - Éditions Hachette - Paris 1980.
- B. MANDELBROT : «*Les objets fractals : forme, hasard et dimension*» - Éditions Flammarion - Paris 1984.
- B. MANDELBROT : «*Comment j'ai découvert les fractals*» - La Recherche 175, 420 (mars 1986).
- M. MATSUSHITA, M. SANO, Y. HAYAKAWA, H. HONJO & Y. SAWADA : «*Fractals structures of zinc metal...*» - Physical Review Letters 53, 286, 1984.
- Ch. RUHLA : «*La physique du hasard*» - Éditions Hachette - CNRS - Paris 1989.
- J. SIVARDIÈRE : «*La symétrie en mathématiques, physique et chimie*» - Éditions Presses Universitaires - Grenoble 1995.
- I. STEWART : «*Les chroniques de Rose Polymath : les fractals*» - Éditions Belin - Paris 1982.