Groupe de réflexion
U.d.P. - C.P.G.E.

A propos des problèmes de concours
Quelques exemples concrets

par André BOUSSIÉ
et Madeleine SONNEVILLE

Les exemples qui suivent sont extraits de ceux que nous ont fournis les professeurs du groupe U.d.P.-C.P.G.E. depuis dix-huit mois. Toutes leurs propositions témoignent d'une réflexion pédagogique intégrant l'esprit des nouveaux programmes. Le volume nécessairement limité de ce cahier nous a conduits à n'en retenir que quelques-unes : les exemples étaient nombreux, en particulier en électronique... et il a fallu choisir.

Nous remercions tout le groupe pour cette réflexion très enrichissante et plus particulièrement :

– Françoise ARNAUD - Lycée Camille Guérin - POITIERS,
– Catherine BOIVIN - Lycée Corneille - ROUEN,
– Philippe BOREL - Lycée Franklin - ORLÉANS,
– Jérôme COUP - Lycée Henri IV - PARIS,
– Annie GUICHEMERRE - Lycée Lakanal - SCEAUX,
– Anne PÉLISSIER - Lycée Camille Guérin - POITIERS,
– Christophe RÉHEL - Lycée Gambetta - TOURCOING,
– Jean-François THIVENT - Lycée Kléber - STRASBOURG.

Sommaire

Document 1

Poser des questions de cours ?

Le document qui suit propose quelques «questions à réponses courtes» : elles ont simplement pour but de vérifier que certains résultats qualitatifs (tantôt élémentaires, tantôt plus synthétiques) de la physique des ondes sont bien acquis ou présents à l'esprit de l'élève ou du candidat. Elles ne demandent aucun calcul, pas davantage de raisonnement qualitatif. Elles ne sont pas destinées à être posées à la suite les unes des autres. En revanche, on aimerait parfois en rencontrer quelques-unes au fil des problèmes. Il n'est pas difficile de noter de telles questions : il suffit d'avoir prévu quelques *«réponses attendues»* et quelques *«réponses admises»*. Il s'agit alors de s'assurer que certaines connaissances sont bien acquises.

***1* -** Les ondes monodimensionnelles peuvent être décrites en explicitant la dépendance d'une quantité physique F(x,t) fonction de la date t et de la position x. Lorsqu'on a affaire à une onde élastique dans un milieu fluide, quelle est la nature physique de la grandeur F ?

Réponses attendues : (sur)pression, (sur)vitesse, (sur)masse volumique.

Réponse admise : élongation.

***2* -** Pourquoi dit-on de cette onde qu'elle est longitudinale ? Donner un exemple concret d'une autre onde longitudinal.

Réponses attendues : déplacement de matière dans la direction de la propagation, grandeurs vectorielles caractéristiques de l'onde parallèles à la direction de propagation.

Autres exemples : onde élastique sur une file d'atomes ; onde compression sur un ressort.

***3* -** Donner deux exemples concrets d'ondes transversales dont au moins une dans le domaine des ondes mécaniques.

Réponses attendues : corde vibrante, rides à la surface de l'eau, ondes de torsion sur une échelle de perroquet, ondes électromagnétiques.

***4* -** L'onde acoustique est liée à l'élasticité du milieu siège de la propagation ; où l'élasticité du fluide apparaît-elle dans l'équation de d'Alembert ?

Réponse attendue : le coefficient de compressibilité isentropique intervient dans l'expression de la célérité.

5 **-** Que devient la célérité de propagation si le milieu devient rigide ?

6 **-** Proposer une méthode de mesure de la célérité des ondes sonores dans l'air qui peut être mise en œuvre au laboratoire de physique.

Réponses attendues : mesure d'une durée de parcours (durée de propagation d'un CLAP entre deux micros et oscilloscope à mémoire) ou mesure d'une longueur d'onde à l'oscilloscope.

7 **-** Ordre de grandeur de la gamme des fréquences des ondes acoustiques audibles ? Comment produire une onde sonore à partir du générateur basses fréquences utilisé en travaux pratiques ?

8 **-** La célérité du son dans l'air est 340 $m.s^{-1}$. Celle des ultrasons est-elle plus grande, plus petite ou identique ? Pourquoi ?

Réponse attendue : identique car l'équation de d'Alembert correspond à une absence de dispersion.

9 **-** Un phénomène familier au laboratoire d'optique indique que la célérité des ondes lumineuses dans certains milieux dépend de la fréquence. De quel phénomène s'agit-il ?

Réponse attendue : dispersion de la lumière par le prisme.

10 **-** Les phénomènes de conduction thermique ou de diffusion de particules font intervenir, lorsqu'ils sont monodimensionnels, des quantités scalaires dépendant d'une variable d'espace, par exemple la température T(x,t) qui vérifie l'équation de la diffusion. Comparer les caractères d'une onde F(x,t) qui vérifie l'équation de d'Alembert et ceux d'une onde qui vérifie l'équation de la diffusion.

Réponse attendue : propagation avec ou sans déformation, caractère réversible ou non, dispersion.

Sous une forme plus ou moins apparentée à ce qui précède, on doit pouvoir procéder de même sur une grand nombre de sujets : l'essentiel est sans doute de rester modeste. Ce genre de questions pourrait aussi avoir comme objectif d'aider le candidat dans la résolution d'un problème par ailleurs abstrait ou difficile en lui permettant, de temps à autre, et en particulier en début de problème, de se rappeler les idées essentielles, et, un peu plus loin, de retomber sur ses pieds.

Document 2
Un problème à questions qualitatives

Sur un thème classique de mécanique du solide, l'énoncé demande une approche qualitative préalablement aux calculs traditionnels. Nous avons voulu voir dans quelle mesure ce genre de problème pouvait être proposé aux élèves, et surtout dans quelle mesure la copie pouvait être évaluée et donc notée. Le problème a été utilisé dans deux classes :

– en travaux dirigés dans une classe de Spéciales P',

– en devoir à la maison dans une classe de Spéciales M dont les élèves sont entraînés à l'emploi d'arguments qualitatifs et aux démarches synthétiques.

Nous avons constaté que les élèves ont une assez bonne intuition de l'idée générale de la réponse attendue : ils «voient bien» qu'il faut invoquer la conservation de l'énergie pour répondre à telle ou telle question. Ils pensent donc qu'ils savent répondre... Mais en réalité, lorsque la question posée appelle un véritable raisonnement qualitatif, (questions **I.A.*3*.**, **I.A.*6.d*.** et **I.A.*7.c*.** par exemple) les réponses qu'ils donnent sont médiocres (à l'écrit) ou laborieuses (à l'oral) : ainsi, à la question **I.A.*3*.**, ils croient montrer que le mouvement est périodique, alors qu'ils montrent seulement qu'il est oscillant. Ceci s'est traduit concrètement de la manière suivante : dans une classe où les élèves ont coutume de venir poser des questions au professeur pendant la quinzaine de jours où ils cherchent le problème, il n'y a eu aucune demande de leur part, ce qui prouve bien qu'ils ont cru savoir répondre... ou encore qu'ils n'ont pas vu la difficulté des raisonnements qualitatifs, ou peut-être enfin qu'ils se sont crus autorisés à ne donner que des réponses approximatives parce que les questions étaient qualitatives : pour eux, «qualitatif» ne signifie donc pas encore «rigoureux»... Les questions appelant un raisonnement qualitatif long sont sans doute aussi trop difficiles pour les élèves. Leurs copies révèlent qu'il est alors quasiment impossible de noter les réponses.

En revanche, les élèves savent répondre aux questions qualitatives «à réponse brève» : lorsque la question n'appelle pas un raisonnement mais simplement la référence, (par un ou deux «mots-clés») à une idée générale ou synthétique du cours, on obtient des réponses satisfaisantes et il est assez facile d'appliquer un barème et de noter le travail.

Enfin, la discussion qualitative autour des équations (1), (2) et (3) suppose quand même qu'on ait plus ou moins identifié qu'il s'agit de l'expression du théorème du moment cinétique ou de l'équation de conservation de l'énergie ; ce n'est pas forcément évident pour les élèves.

* * *

Tous les vecteurs sont notés en caractères gras.

La tige OA, homogène, de masse m, de centre C et de longueur 2L est articulée par une liaison pivot parfaite d'axe (O, **i**) à une tige verticale OB qui tourne à vitesse angulaire ω_o constante dans le laboratoire. Le référentiel R (O, **i**, **j**, **k**) est ainsi animé d'un mouvement de rotation de vecteur rotation $\mathbf{\Omega} = \omega_o\,\mathbf{k}$ dans le référentiel galiléen R_0 (O, **I**, **J**, **k**) du laboratoire.

La tige est repérée par $\theta\,(t) = (\mathbf{k}, \mathbf{CO})$ et on note $\mathbf{u} = \mathbf{OC}/L$ et $\mathbf{u'} = (\mathbf{i} \wedge \mathbf{u})$.

I - ÉTUDE QUALITATIVE

A - Dans cette partie, $\omega_o = 0$, $\mathbf{i} = \mathbf{I}$, $\mathbf{j} = \mathbf{J}$. On abandonne la tige sans vitesse initiale depuis une position d'élongation $\theta = \theta_o$ comprise entre 0 et π.

1 - Rappeler ce qu'on entend concrètement par l'expression «liaison pivot parfaite».

***2* -** Pour quelle(s) raison(s) la tige OA prend-elle un mouvement de rotation autour de l'axe (O, **i**) ?

***3* -** Expliquer sans calcul pourquoi le mouvement est périodique.

***4* -** *a* - A quelle forme de fonctions énergie potentielle les mouvements oscillants harmoniques sont-ils associés ?

b **-** La période d'un oscillateur harmonique dépend-elle de son amplitude ?

c **-** Comment nomme-t-on la propriété correspondante ?

5 **-** La tige OA a-t-elle un mouvement harmonique ? La période d'oscillation dépend-elle ou non de l'amplitude ?

6 **-** La mise en équation du mouvement, non demandée, conduit à une expression :

$$d^2\theta/dt^2 + \alpha\,(g/L)\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

a **-** Prévoir le signe de α.

b **-** Prévoir la dimension physique (unité) de α.

c **-** Quelle serait la période d'oscillation si l'équation différentielle s'écrivait :

$$d^2\theta/dt^2 + \alpha\,(g/L)\,\theta = 0$$

d **-** Peut-on prévoir a priori si la période T est une fonction monotone croissante ou décroissante de l'amplitude θ_o ?

7 **-** On considère dans cette question seulement une tige homogène de même longueur, 2L, de masse moitié m/2, lestée en C d'une autre masse m/2.

a **-** La position du centre de masse est-elle modifiée ?

b **-** Le moment d'inertie par rapport à l'axe (O, **i**) est-il modifié ? Pourquoi ?

c **-** Pour une amplitude θ_o donnée, la période est-elle la même ? Pourquoi ? Dans la négative, est-elle plus grande ou plus petite ?

8 **-** Soit **R** la résultante des actions exercée par OB sur OA.

a **-** Expliquer, en utilisant le théorème du moment cinétique, pourquoi elle possède une composante non nulle selon **u'**.

b **-** En déduire le signe de cette composante pour $\theta = \theta_o$.

c **-** Le pendule simple est un objet analogue dont toute la masse est concentrée en C. Expliquer sans calcul pourquoi, dans ce cas, la résultante **R** des réactions a la direction de **u**.

B - Dans cette partie, $\omega_o > 0$. A la date t = 0, on a $d\theta/dt = 0$ et $\theta = \theta_o$ petit (par exemple $\pi/30$). La tige OB impose sa rotation au référentiel R.

***1* -** On raisonne relativement au galiléen. On observe que θ commence par augmenter.

a **-** Comment l'énergie potentielle de pesanteur varie-t-elle alors ?

b **-** Comment l'énergie cinétique varie-t-elle en début de mouvement ?

c **-** Comment ceci est-il possible énergétiquement ? Quelle est la source d'énergie ?

2 - On raisonne dans le référentiel tournant R. Une étude, non demandée ici, conduit à :

$$d^2\theta/dt^2 + \alpha\,(g/L)\sin\theta - \beta\,\omega_o^2 \sin(2\,\theta) = 0 \qquad (2)$$

où α et β sont des constantes numériques positives.

a **-** Quel est, dans ce référentiel, la répartition de forces à l'origine du terme $\beta\,\omega_o^2 \sin(2\,\theta)$?

b **-** Interpréter le signe de β et les valeurs d'équilibre correspondant à ce terme en l'absence de force de pesanteur.

c **-** L'angle θ prenant ses valeurs dans $[0,\pi]$, combien a-t-on de positions d'équilibre ?

d **-** La position $\theta = 0$ est-elle localement stable quelle que soit la vitesse angulaire ω_o ?

***3* -** On se place toujours dans R. Par intégration de (2), on peut obtenir :

$$(d\theta/dt)^2 - 2\,\alpha\,(g/L)\cos\theta + \beta\,\omega_o^2 \cos(2\theta) = \text{constante} \qquad (3)$$

On note J le moment d'inertie de la tige autour de l'axe (O, **i**).

a **-** Quelle est l'expression de l'énergie cinétique de la tige ?

b **-** Et celle de l'énergie potentielle de pesanteur ? En déduire α en fonction de J, m et L.

c **-** Que vaut, toujours dans R, la puissance des actions de liaison qui s'exercent en O ? Et la puissance des forces d'inertie ?

II - ÉTUDE QUANTITATIVE

A - Dans cette partie, $\omega_o = 0$.

1 - Établir l'équation différentielle reliant $(d\theta/dt)^2$ à θ.

2 - Montrer que la période du mouvement s'écrit sous la forme :

$$T = \int_o^{\theta_o} \left[F(\theta_o) - F(\theta)\right]^{-1/2} d\theta$$

où $F(\theta)$ est une fonction de θ à déterminer.

3 - Exprimer la résultante **R** des actions exercées par OB sur OA en fonction de $d^2\theta/dt^2$, $d\theta/dt$, θ et des caractéristiques physiques du dispositif.

4 - En déduire $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u'}$ uniquement en fonction de θ et des caractéristiques physiques du système.

B - Dans cette partie, $\omega_o > 0$. On raisonne dans R.

1 - Établir l'équation (2). On prendra pour la suite $\alpha = 3/4$ et $\beta = 1/2$.

2 - Dans cette question, $\omega_o^2 = g/2L$. Exprimer la période des petites oscillations au voisinage de $\theta = 0$ en fonction de $T_o = 2\pi\,(L/g)^{1/2}$.

3 - Dans cette question, $\omega_o^2 = 3g/4L$.

a - Peut-on continuer à se contenter d'un développement des fonctions trigonométriques au premier ordre en θ ?

b - Montrer que pour les petits mouvements, on a :

$$4\,(d\theta/dt)^2 = (\theta_o^4 - \theta^4)\,\omega_o^2$$

c - En déduire que $T(\theta_o) \cdot \theta_o$ est indépendant de θ_o .

4 **-** Pour la suite, $\omega_o^2 = g/L$.

a **-** Montrer que $\theta = 0$ est instable.

b **-** Quelle est la position d'équilibre stable ?

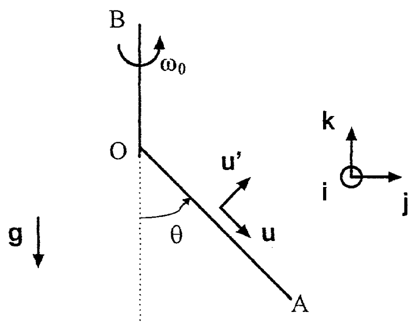
c **-** Calculer la période des petites oscillations en fonction de T_o.

5 **-** On a toujours $\omega_o^2 = g/L$ et on part de $\theta = \theta_o$ sans vitesse initiale.

a **-** Avec $\theta_o = 2\pi/3$, jusqu'à quelle autre valeur θ va-t-il varier lors du mouvement ?

b **-** Même question pour $\theta_o = \pi/6$.

c **-** Si $\theta_o = \pi/3$, jusqu'à quelle valeur θ va-t-il décroître ? Montrer que la tige met un temps infini pour arriver à cette valeur limite.



Document 3

Transformer les problèmes de concours ?

C'est la voie explorée par un certain nombre de collègues depuis longtemps. Elle consiste à aménager les énoncés pour y introduire les questions concrètes ou qualitatives qui permettent une meilleure compréhension, compte tenu des aptitudes actuelles des élèves. Lorsque les questions qualitatives n'appellent que des réponses brèves, il est assez facile de les noter, ce dont témoignent les énoncés qui suivent, qui ont tous été utilisés en devoir à la maison ou en devoir surveillé.

ÉLECTRONIQUE

– Exercice : fonction de transfert.
– Étude d'une chaîne de reproduction du son (d'après ENSI M 91).
– Réponse d'un circuit (d'après Géologie Nancy 95).
– Circuit avec diode (d'après ENS groupe C 1984).
– Établissement d'un régime continu dans un circuit RLC.
– Filtre RLC série (d'après Concours T' 95).

MÉCANIQUE

– Exercice : traversée d'une rue.
– Étude d'un système masse-ressort (d'après ESTP 92).
– Étude d'une suspension (d'après ESEM C 92).
– Exploration interplanétaire.

THERMODYNAMIQUE

– Scènes de chasse en hiver.

ÉLECTRONIQUE

Exercice : fonction de transfert

On considère le montage de la figure 1 dans lequel l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire. La tension d'entrée v_e est sinusoïdale, de pulsation ω variable.

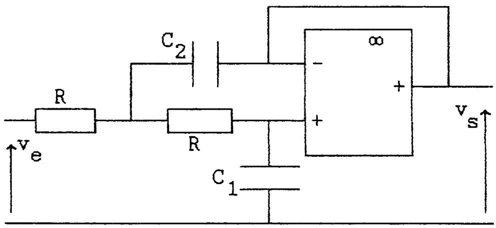


Figure 1

a - Détermination sans calcul la nature du filtre (passe-haut, passe-bas, passe-bande).

b - Déterminer le nombre minimal d'équations nécessaires pour exprimer $\underline{V}_s$ en fonction de $\underline{V}_e$ et des impédances ou admittances des éléments du circuit. Écrire ces équations.

c - Pourquoi peut-on éliminer les expressions suivantes ?

$$\underline{T} = \frac{j \cdot R \cdot C_1 \cdot \omega}{1 - R^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot j \cdot R \cdot C_1 \cdot \omega}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{1 - R^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot j \cdot C_1 \cdot \omega}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{R \cdot C_1 \cdot \omega \cdot (R \cdot C_2 \cdot \omega + 2 \cdot j)}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{1 - R^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \omega^2 \cdot + 2 \cdot j \cdot R \cdot C_2 \cdot \omega}$$

d - $C_2 = 2\ C_1$, $|\,\underline{T}\,|^2 = \dfrac{1}{1 + x^4}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,.\,R\,.\,C_1}$; tracer le diagramme asymptotique de Bode pour $|\,\underline{T}\,|$; superposer le diagramme de $|\,\underline{T}_1\,|^2 = \dfrac{1}{1 + x^2}$; quel est l'avantage de $\underline{T}$ par rapport à $|\,\underline{T}_1\,|$?

Étude d'une chaîne de reproduction du son*

(d'après ENSI M 91)

A - L'AMPLIFICATEUR

Sur la figure 1, apparaît un amplificateur entre les signaux e(t) et ve(t), de gain G, réel et positif.

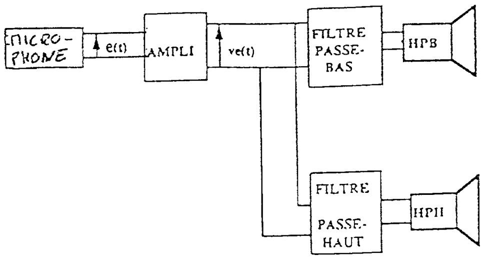


Figure 1 :

HPB est un haut-parleur basse fréquence qu'il convient d'alimenter par l'intermédiaire d'un filtre passe-bas adapté à sa bande passante.

HPH est un haut-parleur haute fréquence qu'il convient d'alimenter par l'intermédiaire d'un filtre passe-haut adapté à sa bande passante.

1 - Proposer un montage à base d'amplificateur opérationnel réalisant cette fonction. Donner alors l'expression de ve(t) en fonction de e(t), dans le cas ou l'amplificateur est idéal.

2 - Exprimer toujours ve(t) en fonction de e(t), en tenant compte cette fois du gain fini μ_0 , supposé constant dans l'amplificateur.

3 - On modélise la sortie de l'amplificateur, par un générateur de Thévenin, ($E_t(t) = Ge(t)$, Rt). On effectue les mesures suivantes (figure 2) :

- Essai 1 : $e(t) = E \cos(2 \pi f t)$ et $R = 16\ \Omega$;

valeur efficace de e(t) = 1 mV ;

résultats : on mesure une valeur efficace de sortie ve(t) = 0,66 V,

- Essai 2 : $e(t) = E \cos(2 \pi f t)A$ et $R = 8\ \Omega$;

valeur efficace de e(t) = 1 mV ;

résultats : on mesure une valeur efficace de sortie ve(t) = 0,5 V.

---

* Devoir donné en PCSI.

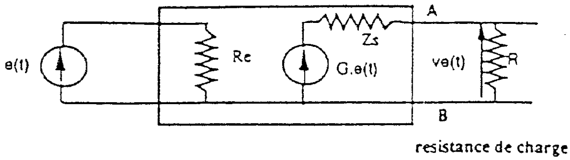


Figure 2

Quelle doit être la résistance R pour que l'amplificateur fournisse le maximum de puissance, à tension d'entrée constante ?

B - LE FILTRE PASSE-BAS

1 - On veut réaliser un filtre passe-bas de type Butterworth défini par le carré du module de sa fonction de transfert :

$$|H(j\omega)| = 1/\left(1 + (\omega/\omega_0)^6\right)$$

avec $\omega_0 = 6000$ rad/s.

2 - Quelle est la fréquence associée à cette pulsation ω_0 ? Comment se situe-t-elle dans la gamme des fréquences audibles ?

3 - Représenter le module de $H(j\omega)$ dans le plan de Bode. On représentera les asymptotes haute et basse fréquence.

4 - Montrer qu'une fonction de transfert de transfert de la forme $\underline{H(j\omega)} = 1/\left(1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3\right)$ avec $x = \omega/\omega_0$ possède une fonction de transfert du type cherché.

5 - Parmi les trois circuits proposés sur la figure 3, un seul est un filtre passe-bas ? Lequel ? Justifier votre réponse.

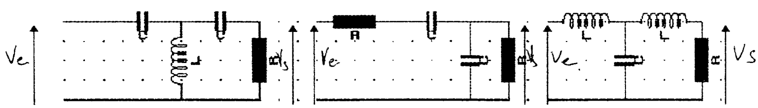


Figure 3

6 - Montrer que la fonction de transfert du filtre retenu s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - L_1 C \omega^2 + j\left((L_1 + L_2)\,\omega/R - L_1 L_2 C\,\omega^3/R\right)}$$

7 - Exprimer L_1, L_2, C, pour que cette fonction de transfert soit celle d'un filtre de Butterworth passe-bas de pulsation de coupure ω_0.

8 - Exprimer toutes les impédances complexes du circuit en fonction de x et R.

9 - La résistance de charge R est égale à 8 Ω. Que pensez-vous de cette valeur ? Calculer numériquement les valeurs de L_1, L_2 et C dans ces conditions.

C - LE FILTRE PASSE-HAUT

Filtre du premier ordre

1 - Donner la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre.

2 - Proposer un montage simple réalisant cette fonction, proposer des valeurs numériques pour les composants pour que la pulsation de coupure du filtre soit de 6000 rad/s.

3 - Tracer cette fonction de transfert sur le diagramme du filtre passe-haut de Butterworth donné en annexe.

Filtre de Butterworth

4 - On donne en annexe le diagramme de Bode du filtre de Butterworth. Quel est l'intérêt d'un tel filtre par rapport à un filtre du premier ordre ?

5 - Déterminer graphiquement la pulsation de coupure à – 3 dB.

6 - Calculer le carré du module de la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H(j\omega)} = 1 / \left(1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3\right)$$

7 - Vérifier que le diagramme de Bode donné correspond bien à celui de cette fonction.

8 - On considère le quadripôle de la figure 3. Exprimer sa fonction de transfert puis la mettre sous la forme du 6. Cette expression peut être obtenue sans calculs, à partir des relations relatives aux impédances de filtre passe-bas.

9 - Calculer les valeurs des composants L, C_1 et C_2 pour que ce filtre corresponde à celui souhaité.

D - LA CHAÎNE DE REPRODUCTION DU SON

1 - On s'intéresse maintenant à la chaîne dans sa totalité, telle qu'elle est représentée sur la figure 1. Le microphone délivre un signal sinusoïdal de fréquence 100 Hz, d'amplitude 1. Quelle sont les réponses des deux haut-parleurs ? On pourra s'aider du diagramme de Bode. Même question avec un signal de fréquence 10 000 Hz.

2 - Que pensez-vous de la qualité de cette chaîne ? Quels sont ses éventuels défauts ?

Réponse d'un circuit

(d'après Géologie Nancy 95)

On considère le circuit représenté sur la figure 1, formé d'un générateur idéal G de f.é.m. e, de conducteurs ohmiques de résistance R_o , d'un condensateur de capacité $C = 2{,}53.10^{-6}$ F et d'une bobine purement inductive d'inductance L = 10 mH.

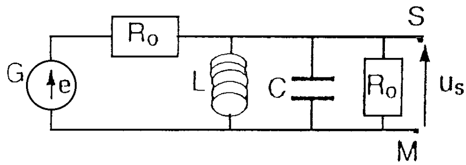


Figure 1

Les points S et M constituent la sortie du dispositif ; elle peut être ouverte (rien n'est branché) ou fermée sur un dipôle. La tension de sortie est $u_s(t)$.

A - On place dans le circuit considéré en sortie ouverte un générateur idéal de tension continue de f.é.m. E = 5 V en série avec un interrupteur K. On donne $Q = R_o / L\omega_o$; $LC\omega_o^2 = 1$ et $\tau = Q / \omega_o$.

A la date $t < 0$, K est ouvert ; aucun courant ne circule dans le circuit. A $t = 0$, on ferme K.

1 - Expliquer ce qui se passe tout de suite après la fermeture en montrant le rôle des dipôles L et C.

2 - Un régime permanent s'établit.

Schématiser les dipôles L et C en régime permanent par des interrupteurs ouverts ou fermés.

Calculer $u_{s\,\infty}$, et l'intensité i_∞ débitée par G en régime permanent.

3 - Dans le cas général (t quelconque) :

a - Établir l'équation différentielle liant u_s, ses dérivées par rapport au temps, E, τ, ω_o.

b - On choisit R_o pour que Q = 1. Calculer les valeurs de ω_o et τ (préciser l'unité).

c - Donner l'équation horaire $u_s(t)$ faisant intervenir les constantes E et τ. On écrira d'abord la solution générale fonction de deux constantes arbitraires, puis on traduira les contraintes imposées à u_s et i_L (courant dans la bobine) pour déterminer les deux constantes. Représenter $u_s(t)$ fonction du temps.

d - Déterminer l'équation horaire i(t) du courant débité par le générateur. Représenter i(t).

e - On souhaite visualiser $u_s(t)$. Quels appareils pensez-vous utiliser ? Proposer un schéma de montage.

f - Même question pour l'intensité.

g - Calculer, en fonction de E, R_o , τ, l'énergie W_e transférée par le générateur au circuit entre les dates 0 et 10τ.

h - Comparer W_e à la variation, entre les mêmes dates, de l'énergie stockée dans le condensateur et dans la bobine. Conclure.

B - G est un générateur idéal de tension sinusoïdale : $e = E_{ms} \cdot \cos(\omega t)$ avec $E_m = 5$ V. La sortie est ouverte ; le régime sinusoïdal forcé est établi : $u_s(t) = U_{sm} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. Entre les points S et M, tout le circuit équivaut à un générateur de Norton, de courant électromoteur $\eta = \eta_M \cdot \cos(\omega t + \psi)$ et d'admittance complexe $Yn = \alpha + j\beta$. Les données sont : E_m, ω, L, C, R_o.

1 - *a* - Déterminer littéralement en fonction des données :

_ α et β,

_ η_m et ψ,

_ U_{sm} et φ.

b - U_{sm} prend une valeur maximale U_{smax} pour une fréquence f_r ; déterminer littéralement puis numériquement f_r et U_{smax}.

2 - La sortie est à présent fermée sur un condensateur de capacité C'. On mesure la fréquence de résonance de la tension de sortie : $f_r = 800$ Hz. Calculer C'.

Circuit avec diode*

(d'après ENS groupe C 1984)

La diode est idéale, la résistance est pure, le condensateur est sans fuite et la bobine est parfaite.

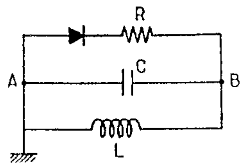


Figure 1

1 - On applique entre B et A une tension telle que :

$$V_B - V_A = U_{BA} > 0$$

Quel est l'état de la diode ? (est-elle passante ou bloquée ?). Justifier votre réponse.

2 - On pose $V_B - V_A = u(t)$. A l'instant $t = 0$ on a :

$$V_B - V_A = V_o = 30 \text{ Volts}$$

et aucun courant ne circule dans le circuit. Établir l'équation différentielle vérifiée par u(t) lorsque cette quantité est positive.

3 - Intégrer l'équation différentielle précédente.
Application Numérique : $C = 10^{-6}$ F, $L = 10^{-4}$ H.

4 - Jusqu'à quel instant t_o l'analyse effectuée précédemment est-elle justifiée ? Déterminer à cet instant l'expression de l'énergie électrostatique du condensateur. Calculer également l'énergie électromagnétique de la bobine. Comparer ces expressions à celles obtenues pour t = 0. Commentaires.

5 - Pour $t > t_0$, préciser l'état de la diode en justifiant votre réponse, puis établir l'équation différentielle vérifiée par u(t).

6 - Sans calculs, pour $t > t_o$, prévoir l'évolution de u(t) et déterminer l'énergie dissipée dans la résistance R entre les instants $t = t_o$ et $t = \infty$? Justifier votre réponse.

---

* Exercice donné en MPSI.

Établissement d'un régime continu dans un circuit RLC*

PARTIE A

On considère le circuit ci-dessous :

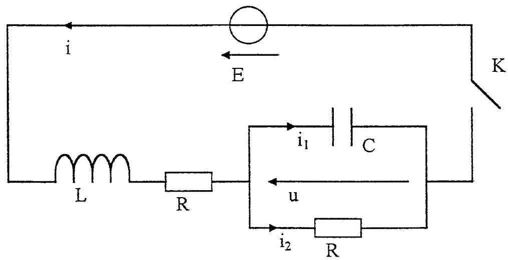


Figure 1

1 - L'interrupteur K étant ouvert, les intensités i_1 et i_2 sont nulles et le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K. Déterminer, presque sans calculs et en les justifiant, les valeurs de i_1, i_2, i et u :

a - juste après la fermeture de K ;

b - au bout d'un temps suffisamment long, le régime permanent étant établi.

2 - Écrire, sans le résoudre, le système d'équations permettant d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension u.

3 - Voici quatre propositions pour l'équation différentielle vérifiée par la tension u dont une seule est correcte ; toujours sans résoudre le système précédent, expliquer pourquoi trois équations sont fausses et déterminer la bonne équation :

a - $$\frac{d^2u}{dt^2} - \left(\frac{1}{R \cdot C} + \frac{R}{L}\right) \cdot \frac{du}{dt} + \frac{2}{L \cdot C} \cdot u = \frac{E}{L \cdot C}$$

b - $$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{R \cdot C} + \frac{R}{L}\right) \cdot \frac{du}{dt} + \frac{2}{L \cdot C} \cdot u = \frac{E}{L \cdot C}$$

* Devoir surveillé PCSI (partiel).

c - $$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{R \cdot C} + \frac{R}{L}\right) \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u = \frac{E}{L \cdot C}$$

d - $$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{C} + \frac{R^2}{L}\right) \cdot \frac{du}{dt} + \frac{2}{L \cdot C} \cdot u = \frac{E}{L \cdot C}$$

4 - Quelle relation doit-il exister entre R, C et L pour que la solution de l'équation différentielle corresponde à un régime critique ?

Pour la suite on prendra : C = 1,0 µF ; L = 20 mH.

5 - Déterminer en fonction du temps, l'expression complète de la tension u.

6 - Donner une estimation du temps nécessaire pour que le régime permanent soit pratiquement établi dans le circuit (c'est-à-dire pour que la valeur de u diffère de moins de 1 % de sa valeur finale).

7 - Déterminer la (les) valeur(s) de R correspondant au régime critique.

Filtre RLC série*

(d'après Concours T' 95)

Pour le filtre RLC dessiné sur la figure 1, on note E(t) la tension imposée à l'entrée et S(t) la tension de sortie. Les composants L et C sont supposés idéaux.

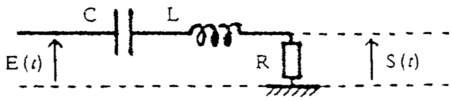


Figure 1

1. RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

a - Mettre la fonction de transfert sous la forme ci-après (en précisant les expressions de Q et ω_0 en fonction de R, L et C) :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

b - Quelles valeurs numériques faut-il donner à L et à C afin d'obtenir un filtre pour lequel $Q = 200$ et $\omega_0 = 4 \cdot 10^4\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, lorsque $R = 10\ \Omega$?

c - Sachant que les valeurs de R, L et C ne sont connues qu'avec une incertitude relative de $5 \cdot 10^{-3}$ (0,5 %), quelles sont les incertitudes relatives qui caractérisent les valeurs de Q et ω_0 ? *(cette question est hors barême).*

d - Évaluer numériquement $|H|$ pour $\omega = \omega_0 \times 1{,}05$ et pour $\omega = \dfrac{\omega_0}{1{,}05}$.

e - Prévoir le comportement asymptotique (schémas limites du quadripôle quand $\omega \to 0$ et quand $\omega \to \infty$).

Esquisser de façon approximative la courbe présentant $\log|H|$ en ordonnées et $\log\dfrac{\omega}{\omega_0}$ en abscisses.

---

* Devoir donné en PCSI.

On précisera essentiellement l'axe de symétrie et les points d'intersection des asymptotes avec les axes des abscisses et des ordonnées.

f - Proposer un dispositif expérimental pour tracer cette courbe.
Comment mesure-t-on $|H|$?

g - Déterminer la bande passante à – 3 dB de ce filtre en fonction de Q et ω_0. Calculer sa valeur numérique pour $Q = 200$ et $\omega_0 = 4\ 10^{+4}$ rad s^{-1}.

h - Décrire en une phrase le comportement de ce filtre en régime sinusoïdal. Faire pour les pulsations suivantes : $\omega << \omega_0$; $\omega = \omega_0$; $\omega >> \omega_0$ les représentations de Fresnel correspondantes et en déduire les conditions pour lesquelles le montage peut être considéré comme intégrateur ou dérivateur.

2. RÉGIME NON SINUSOÏDAL

a - Expliciter l'équation différentielle reliant S(t) à E(t) dans le cas général où E(t) n'est pas forcément une fonction sinusoïdale.

b - Dans le cas où $E(t) = 0$ V avec $Q = 200$, montrer que S(t) est une fonction pseudopériodique du temps. Calculer la pseudopulsation Ω en fonction de ω_0.
L'application numérique nous permet pour la suite d'écrire $\Omega = \omega_0$.
Montrer alors que S(t) s'écrit :

$$S(t) = \left(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t\right) \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)$$

c - On suppose que la tension d'entrée présente, à la date t_0 , une discontinuité : $E(t_0^+) - E(t_0^-) = \Delta E$ (voir figure 2). Montrer qu'alors :

– Le signal de sortie S(t) est continu à la date t_0 ;

– La dérivée du signal de sortie présente une discontinuité égale à :

$$\frac{dS}{dt}(t_0^+) - \frac{dS}{dt}(t_0^-) = \frac{\omega_0}{Q} \Delta E$$

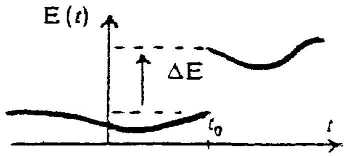


Figure 2

d - La tension d'entrée est un créneau d'amplitude E_0 et de durée θ, inférieure à $\dfrac{\pi}{\omega_0}$ (voir figure 3).

– Pour t compris entre (– θ) et 0, montrer que l'on peut négliger le terme d'atténuation exponentielle (une argumentation chiffrée est attendue). Préciser, dans cette approximation, le signal S(t) (en fonction de (t + θ), E_0, ω_0 et Q).

– Quelles sont les valeurs de S(t) et de sa dérivée juste après l'instant zéro ?

Dans la suite, on admettra que, pour t positif, les calculs conduisent à :

$$S(t) = \frac{2\,E_0}{Q}\sin\frac{\omega_0\,\theta}{2}\cos\left(\omega_0\,t + \frac{\omega_0\,\theta}{2}\right)\exp\left(-\frac{\omega_0\,t}{2\,Q}\right)$$

– Dans le cas où θ tend vers zéro pendant que le produit $(\theta \times E_0)$ reste constant, S(t), pour t positif, se met sous la forme :

$$S(t) = (\theta E_0) \times s(t)$$

Expliciter s(t) en fonction de t, ω_0 et Q.

(s(t) est la réponse du filtre à une impulsion unité).

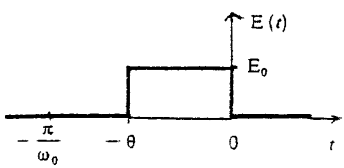


Figure 3

MÉCANIQUE

Exercice : traversée d'une rue

Un piéton désire traverser une rue parcourue par des voitures sur une seule file (voie à sens unique). Une voiture arrive à la vitesse V_0 constante. Le piéton marche (ou court !) en ligne droite, à la vitesse u constante, dont la direction fait un angle α $(0 < \alpha \leq \pi/2)$ avec le bord de la rue. La voiture est assimilée à un rectangle de largeur l pratiquement égale à la largeur de la voie, et au moment où le piéton commence à traverser la rue, la voiture se trouve à une distance d de celui-ci.

V_0, d, l et α étant donnés, on appelle u_{min} la vitesse minimale du piéton pour qu'il traverse sans être heurté par la voiture.

1 - Voici quatre expressions de u_{min} ; expliquer, sans calcul, pour quelle(s) raison(s), elles sont fausses :

a -
$$u_{min} = \frac{V_o}{d \cdot \cos\alpha + l \cdot \sin\alpha}$$

b -
$$u_{min} = \frac{V_0 \cdot l}{l \cdot \cos\alpha - d \cdot \sin\alpha}$$

c -
$$u_{min} = \frac{V_0 \cdot d}{l \cdot \cos\alpha + d \cdot \sin\alpha}$$

d -
$$u_{min} = \frac{V_0 \cdot l}{l + d \cdot \tan\alpha}$$

2 - Établir l'expression de u_{min} .

3 - Déterminer la direction optimale qui permet au piéton de marcher le plus lentement possible. Que devient l'expression de u_{min} ?

4 - Déterminer un ordre de grandeur de la distance minimale d admissible en ville pour qu'un piéton «moyen» puisse traverser.

Étude d'un système masse-ressort*

(d'après ESTP 92)

On se place dans le repère $\mathcal{R}$ (O x y z) orthonormé, direct, galiléen, de vecteurs unitaires de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Le système envisagé est constitué d'un ressort R, d'un demi-cercle C et d'une perle P.

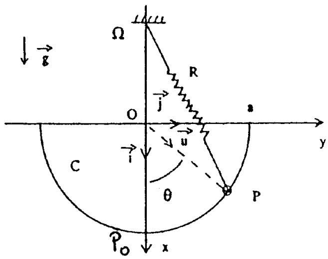


Figure 1

Le ressort R est parfait, c'est-à-dire sans masse et développant selon sa propre direction une force proportionnelle à son élongation. On note K ce coefficient de proportionnalité et *l* la longueur à vide de R. Le demi-cercle (fixe dans $\mathcal{R}$) C, de rayon a, de centre O, est contenu dans le demi-plan xOy, $x \geq 0$ supposé vertical, Ox étant la verticale descendante.

La perle P est un objet quasi-ponctuel de masse M astreint à se déplacer sans frottement sur C. On note r le module de la réaction de C sur P.

Le ressort R a une extrémité liée à P et l'autre à un point Ω situé aux côtés $x = -a$, $y = 0$, $z = 0$ de $\mathcal{R}$.

La position de P dans $\mathcal{R}$ est repérée par l'angle $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OP})$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OP}$, $\vec{v}$ le vecteur unitaire déduit de $\vec{u}$ par la rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{k}$. Le système est

* Devoir sans calculatrice donné à des élèves de MPSI.

placé dans le champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = g\,\vec{i}$ de module g constant.

Les expressions vectorielles demandées seront exprimées dans la base $\vec{u}$, $\vec{v}$.

A - $\theta = 0$, LA PERLE EST EN ÉQUILIBRE

1 - Pourquoi la perle est-elle en équilibre pour $\theta = 0$?

2 - Quelle est alors l'énergie de la perle ? Que pouvez-vous dire de la stabilité de cet équilibre ?

B - ÉTUDE À UN INSTANT t, QUELCONQUE

1 - En considérant que le ressort est tendu, représenter les forces qui s'exercent sur la perle pour $\theta(t) \neq 0$.

2 - Exprimer ces forces à l'aide de la base locale $\vec{u}$, $\vec{v}$.

3 - Appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans la base $\vec{u}$, $\vec{v}$.

4 - Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle élastique de la perle.

5 - Énoncer le théorème de l'énergie mécanique et l'appliquer à la perle. Conclure.

6 - Définir le moment cinétique en o, $\vec{\sigma}_o$ de la perle et donner son expression dans la base $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{k}$.

7 - Énoncer le théorème du moment cinétique et l'appliquer à la perle. Conclure.

C - ÉTUDES D'ÉQUILIBRES POSSIBLES

1 - $\theta = 0$ est une position d'équilibre. Y en a-t-il d'autres ? Justifier votre réponse.

2 - Dans la suite du problème, on étudiera le cas particulier suivant :

$$l = \sqrt{3}\left(a - \frac{Mg}{K}\right)$$

et : $a = 2\,\dfrac{Mg}{K}$ $K = 10^3$ N.m^{-1}, M = 1 kg et g = 10 m.s^{-2}

Déterminer les positions d'équilibres possibles.
Pour chaque cas, préciser si le ressort est tendu ou comprimé, calculer la valeur de la tension du ressort et faire un schéma représentant toutes les forces exercées sur la perle (échelle : 1 cm pour 10 N).

3 - Étudier la stabilité de ces équilibres.

4 - Pour étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_1 , on pose $\theta = \theta_1 + \varepsilon$.
Établir l'équation différentielle linéaire en ε de ces petits mouvements.

5 - Donner l'expression de la solution de l'équation ci-avant pour les conditions initiales suivantes :

$$\varepsilon(0) = 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(0) = \sqrt{\frac{Ka - Mg}{2Ma}}.$$

<u>Rappels</u> :
$\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$, $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$\sqrt{2} = 1{,}414$ $\sqrt{3} = 1{,}732$.

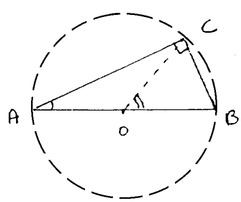


Figure 2

Étude d'une suspension*

(d'après ESEM C 92)

Une remorque de masse totale M est tirée par un véhicule roulant à vitesse horizontale constante $\vec{V}$ et qui n'exerce sur elle aucune force verticale. Elle repose sur une roulette A de dimensions et de masse négligeables, par l'intermédiaire d'une suspension verticale AB, de masse négligeable devant M, constituée d'un ressort de rigidité k ($k > 0$) et de longueur à vide $l_0 = 70$ cm, et d'un amortissement (piston coulissant dans un cylindre rempli d'huile) dont le coefficient d'amortissement fluide est h ($h > 0$).

La force exercée par l'amortissement sur la remorque a pour norme : $h \cdot \left|\frac{dl}{dt}\right|$ où l est la longueur AB (c'est également la longueur du ressort).

On suppose que la suspension reste toujours verticale et que la remorque peut être assimilée à une masse ponctuelle située en B.

On choisit un référentiel *R*, supposé galiléen, lié au sol, de repère OXYZ, l'axe OZ étant vertical ascendant et l'axe OX horizontal, de direction et sens identiques à ceux de $\vec{V}$ (voir figure 1). Le profil de la route peut alors être décrit par une fonction $Z_1 = f(X)$.

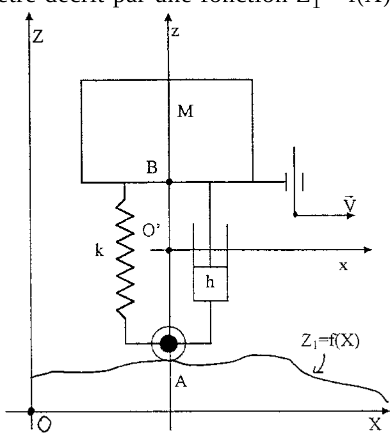


Figure 1

* Devoir en temps libre PCSI.

L'étude des mouvements verticaux du point B sera effectuée dans le référentiel *R'* en mouvement de translation à la vitesse $\vec{V}$ par rapport à *R* ; un repère de *R'* est O'xyz, l'axe O'z coïncidant avec la droite AB, l'axe O'x étant parallèle à OX et de même sens. Le point O' est la position d'équilibre de B dans *R'* lorsque la route est plate et horizontale avec $Z_1 = 0$.

On considérera que la roulette A reste toujours en contact avec la route.

PREMIÈRE PARTIE

La route est plate et horizontale et correspond au profil $Z_1 = 0$.

I.1 - Soit l_1 la longueur du ressort lorsque B est en équilibre dans *R'*. Établir l'expression de l_1. Proposer un ordre de grandeur pour l_1 et M ; en déduire un ordre de grandeur de la rigidité du ressort.

I.2 - La position de B dans *R'* étant repérée par sa cote z, voici cinq positions pour l'équation différentielle vérifiée par z ; éliminer les quatre expressions fausses par un raisonnement simple :

a - $M \cdot \ddot{z} + h \cdot \dot{z} = 0.$

b - $M \cdot \ddot{z} - h \cdot \dot{z} + k \cdot z = 0.$

c - $\ddot{z} + h \cdot \dot{z} + k \cdot z = 0.$

d - $M \cdot \ddot{z} + h \cdot \dot{z} + k \cdot z = 0.$

e - $M \cdot \ddot{z} + h \cdot \dot{z} + k \cdot z = M \cdot g.$

I.3 - Déterminer l'expression de la pulsation propre ω_o et calculer la fréquence propre f_o de l'oscillateur ; ce résultat semble-t-il justifier les valeurs choisies au I.1. ?

I.4 - L'amortisseur est réglé pour obtenir un régime critique.

a - En déduire un ordre de grandeur pour h.

b - B est éloigné de 10 cm de sa position d'équilibre puis abandonné sans vitesse initiale dans *R'*. Déterminer la fonction z(t) et donner l'allure de sa représentation graphique.

c - Au bout de combien de temps B a-t-il retrouvé sa position d'équilibre à 5 % près ?

d - Quel est l'intérêt de la présence de l'amortisseur ?

e - Quel serait l'intérêt de régler h à une valeur légèrement inférieure à celle de l'amortissement critique ?

DEUXIÈME PARTIE

La route possède maintenant un profil sinusoïdal de type tôle ondulée décrit par la fonction $Z_1 = A_o \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{X}{L}\right)$ où $A_o = 5$ cm et où L = 2,0 m.

On étudie uniquement le régime permanent (régime sinusoïdal forcé).

II.1 **-** Déterminer les expressions de la fréquence f et de la pulsation ω du mouvement de la roulette dans le référentiel *R'*. Donner des ordres de grandeur.

II.2 - A l'aide d'un schéma clair, donner les expressions des vecteurs force exercées par le ressort et l'amortisseur sur B, en fonction de z, Z_1 et de constantes. En déduite l'équation différentielle vérifiée par z.

II.3 - On pose $\underline{Z}_1 = A_o \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ et $\underline{z} = a \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$ où $j^2 = -1$. Quelle est l'expression de la grandeur physique z ?

Le coefficient d'amortissement h est supposé négligeable. Déterminer les expressions et a et φ en fonction de A_o , ω et ω_o et donner l'allure des graphes correspondants.

Quel est le domaine de vitesses à éviter si l'on veut que a reste inférieur à 10 cm ? à 5 cm ?

II.4 - Le coefficient d'amortissement est réglé à la valeur :

$$h_1 = 2 \cdot \sqrt{M \cdot k}$$

a - On pose $u = \frac{\omega}{\omega_o}$; montrer que $a \cdot e^{j \cdot \varphi} = A_o \cdot \frac{1 + 2 \cdot j \cdot u}{(1 + j \cdot u)^2}$.

b - En déduire les expressions de a et φ en fonction de A_o et u ; pour quelle valeur de u l'amplitude est-elle maximale ?

c - Tracer qualitativement le graphe de a en fonction de ω. Quel est alors le domaine de vitesses à éviter si l'on veut que a reste inférieur à 10 cm ? à 5 cm ? Quel est l'intérêt de l'amortisseur ?

d - Tracer sur le même graphe l'allure de a en fonction ω pour $h < h_1$, $h = h_1$ et $h > h_1$.

Exploration interplanétaire

L'étoile Soleillou de masse $Ms = 2.10^{30}$ kg a deux planètes : Marsupil dont les habitants très pacifiques sont appelés marsupilamis et Terrif dont les habitants belliqueux sont les terrifiques.
Terrif de masse 6.10^{24} kg et rayon 6 400 km est une sphère homogène en orbite circulaire de rayon 150.10^{6} km autour de Soleillou. Marsupil de masse $0{,}6.10^{24}$ kg et de rayon 3 400 km est une sphère homogène en orbite circulaire de rayon 228.10^{6} km autour de Soleillou.

1 - Déterminer les périodes de révolution et les vitesses des deux planètes dans le référentiel (galiléen) lié à Soleillou (référentiel de Coperdouille). On rappelle la valeur de la constante gravitationnelle $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.

Les marsupilamis décident d'envoyer une mission de reconnaissance sur Terrif. Dans la suite, on admettra que lorsqu'on est à proximité d'une planète, un référentiel lié à la planète est galiléen si on «oublie» l'attraction gravitationnelle des autres astres.

2 - Les marsupilamis qui sont des spécialistes des ressorts ont mis au point un système de mise sur orbite très simple : un énorme ressort de longueur 1 000 m est comprimé jusqu'à 100 m. Le vaisseau spatial étant placé à l'extrémité, on libère le ressort. L'atmosphère de Marsupil étant très ténue, on peut négliger son frottement et admettre que toute l'énergie potentielle élastique du ressort est transformée en énergie potentielle gravitationnelle ou cinétique du vaisseau spatial de masse quatre tonnes.
Quelle doit être la raideur minimale K du ressort pour que le vaisseau spatial échappe à l'attraction de la planète Marsupil ?
La masse du ressort joue-t-elle en réalité un rôle ?

3 - Le vaisseau spatial se rapproche de la planète Terrif. A 100 000 km de Terrif, la vitesse en référentiel Terrif étant de $2\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, le responsable scientifique de l'expédition (Mathsupilami) annonce que d'après ses calculs ils vont passer à 10 000 km du centre de Terrif.

a - Quelle sera alors la vitesse du vaisseau spatial ?

b - De combien faudra-t-il alors la diminuer rapidement pour se mettre en orbite circulaire de rayon 10 000 km autour de Terrif ? La direction du vecteur vitesse joue-t-elle un rôle ?

4 - Le module d'exploration se détache et va se poser dans une savane au pied du mont Kalamandjiro. La capsule s'est posée sur un tripode et se trouve à 5 m au-dessus du sol. Ayant aperçu un rassemblement d'êtres vivants en costume rayé noir et blanc qui broutent paisiblement et pensant qu'il sagit de terrifiques, le plus courageux de l'expédition (marsupilhardi) décide d'aller voir ce qui se passe au niveau du sol. Dans un premier temps, il va tâter brièvement la surface du sol. Pour cela, il utilise une sorte de longue corde élastique (rayée jaune et noir), de longueur naturelle 4 m et d'élasticité $1/k = 0{,}002$ unités S.I. qu'il attache à la capsule à une extrémité, l'autre extrémité étant reliée de manière naturelle à la partie postérieure de son individu. Il se lance sans vitesse initiale, sa masse est 10 kg ; quelle sera sa vitesse en arrivant au niveau du sol ? (on précisera les conditions de départ de la capsule et d'arrivée au sol).

THERMODYNAMIQUE

Scènes de chasse en hiver

Connaissant votre goût pour les objets technologiques, le Père Noël vous a apporté une carabine à air comprimé. Elle fonctionne de la manière suivante :

Un volume d'air de 5,0 ml sous pression de 10 bars et à température initiale 50°C se détend rapidement dans le canon cylindrique de section 0,25 m^2 et de longueur totale 100 cm (comprenant l'air comprimé) en propulsant une balle de masse 1,0 g dans l'atmosphère.
Votre curiosité scientifique vous amène à essayer d'évaluer la vitesse de la balle à la sortie du canon ainsi que la température de l'air et sa pression à cet instant. Pour cela :

1 - Préciser clairement les hypothèses simplificatrices utilisées par ordre d'importance décroissante.

2 - Effectuer ensuite les calculs en utilisant le théorème de l'énergie cinétique pour la balle (variation de Ec = travail de toutes les forces agissant sur la balle) et les équations de la thermodynamique pour l'air comprimé.

Pour l'air, on prendra $Cv = 21\ J.mol^{-1} . K^{-1}$ et $Cp/Cv = 1{,}40$.

3 - Pourquoi a-t-on pris 50°C comme température initiale de l'air ?

Suite à une fausse manœuvre, sans attendre l'arrivée de vos parents, puis du vitrier, vous décidez courageusement d'aller chasser le renard dans la forêt voisine. Au moment d'enfourcher votre VTT, vous constatez que le pneu est mal gonflé. Vous commencez à gonfler le pneu et vous vous demandez quelle est l'évolution de la température et de la pression : le pneu a un diamètre de 65 cm (26 pouces), la section est circulaire de rayon 1,7 cm (2/3 de pouce) ; (on sait calculer le volume du tore grâce à la formule de Guldin : circonférence moyenne par section) ; le pneu est mauvais conducteur (de la chaleur) et son volume varie très peu (on négligera cette variation). La pression de l'air y est au départ Po = 1,50 bars et la température. Votre pompe aspire l'air extérieur à 5°C et 1,0 bar dans un cylindre de diamètre 2,0 cm et de longueur 15 cm ; puis le piston comprime rapidement ce gaz, la valve s'ouvre quand la pression atteint 1,5 bars et l'air rentre alors dans le pneu sous pression quasi constante. Il y a donc deux phases lors de la compression.

4 - Calculez la température de l'air lorsque la valve s'ouvre ainsi que le travail que vous effectuez lors de cette première compression.

5 - Calculez le travail que vous effectuez ensuite pour faire rentrer l'air dans le pneu.

6 - En remarquant que la pression et la température varient peu dans le pneu, déterminer la variation de t et P dans le pneu au cours du premier coup de pompe.

7 - Vous avez donné dix coups de pompe quand vous entendez vos parents rentrer ; pour éviter d'en recevoir autant, vous enfourchez votre vélo et partez à la chasse au renard. Évaluez à cet instant la température de l'air et la pression dans le pneu en indiquant si vous surestimez ou sous-estimez la valeur exacte.