

LE GRAPHE INFORMATIONNEL CAUSAL **outil de modélisation et de synthèse des** **commandes de processus électromécaniques**

J.P. Hautier*, J. Faucher**

(*) Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille
L2EP - Groupe ENSAM
8, Bb Louis XIV - 59046 Lille Cedex

(**) Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique Industrielle
LEEI - ENSEIHT
2, rue Camichel - 31071 Toulouse

Résumé : L'article proposé décrit une méthode systématique et simple d'accès pour la description des systèmes. L'objectif est de pouvoir établir, sans contresens, un modèle de connaissance en mettant en oeuvre les lois de la Physique dans le strict respect du principe de causalité. Il est alors démontré que le contrôle de toute grandeur est dans la recherche de la causalité inverse de celle établie naturellement par le processus à commander ; c'est ainsi que les auteurs amènent les notions propres aux fonctions rencontrées dans les asservissements. Les exemples d'illustration relèvent de l'électricité et de la mécanique, mais les autres domaines de la Physique ne sont pas exclus.

INTRODUCTION

La caractéristique la plus remarquable de tout système électrique ou électromécanique est sans nul doute l'accessibilité aux phénomènes réels qui en régissent le fonctionnement. L'interprétation physique du comportement est alors directe, ce qui rend possible l'établissement d'un modèle de connaissance, même si quelques hypothèses simplificatrices et restrictives s'avèrent nécessaires [1]. Le présent article propose une méthodologie globale pour la détermination rapide de la structure du modèle d'une part, pour la définition de l'organisation des lois de commande d'autre part.

L'obtention du modèle s'appuie sur le strict respect du principe de causalité qui est le fondement même de tout processus physique continu ou discontinu. Des travaux importants ont été réalisés sur ce thème, notamment par S.J. MASON qui a ainsi défini le Graphe de Fluence des Signaux (Signal Flow Graph) [2]. D'autres travaux ont débouché sur la modélisation des systèmes complexes de nature quelconque grâce à une représentation de ceux-ci par un Système de Traitement d'Information [3]. Le concept du Graphe Informationnel Causal (GIC) ici proposé est à rapprocher de celui des Graphes de Liens (Bond Graphs) [1] ; en revanche, l'idée de causalité dérivée y est exclue puisque allant à l'encontre des systèmes physiquement réalisables. Le Graphe Informationnel décrit ainsi les interconnexions entre les opérateurs élémentaires à caractère causal, liés aux éléments du processus physique [4].

Dans un contexte tout-à-fait général, les spécifications de la commande sont déduites par ce que nous appelons "l'inversion du graphe processus". On systématise alors les notions d'asservissement, de régulation, de compensation, de linéarisation et d'estimation. Quelques exemples du domaine électromécanique viennent étayer la méthodologie.

1ère PARTIE : OUTIL DE MODELISATION

I-1. DEFINITIONS

Le Graphe Informationnel Causal est une représentation graphique du traitement de l'information au sein d'un système. C'est une transcription logique de l'analyse sous forme d'un modèle de comportement, grâce à une description des interdépendances entre les différentes grandeurs évolutives dans le temps de ce modèle. Le graphe relie entre eux les éléments de transformation de ces grandeurs que nous appelons *processeurs*.

I-1.1 Processeur

Le processeur est le graphe élémentaire attaché à un objet physique établissant une *relation de transformation* entre une ou plusieurs *grandeurs influentes* constituant le vecteur d'entrée et une ou plusieurs *grandeurs influencées* constituant le vecteur de sortie (figure 1).

Le processeur agit suivant la procédure *cause-effet* signifiant que *l'évolution du vecteur repéré comme sortie ne dépend que des valeurs présentes et passées du vecteur repéré comme entrée*. Ainsi, la relation R qui caractérise la nature de la transformation entrée-sortie répond toujours au principe de causalité; dans le cas général, cette relation est explicitée par des équations différentielles linéaires ou non présentant un ordre de dérivation plus élevé sur les sorties que sur les entrées.

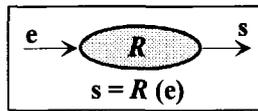


FIG. 1 Symbole d'un processeur

I-1.2 Concepts de base des relations de transformation

Éléments simples

L'intégration pure est la relation de transformation établie par un processeur qualifié de *générateur causal*. Dans ces conditions, *l'énergie présente à l'entrée de l'objet, sous forme cinétique ou potentielle est convertie sous sa forme duale par accumulation* dans ce même objet. Les exemples de la bobine et du condensateur en électricité, respectivement de la masse et du ressort en mécanique, sont les illustrations typiques de cette dualité énergétique. Le flux et la tension, la quantité de mouvement et la force, sont ainsi des variables *duales* respectivement qualifiées de *cinétiques et potentielles*. Selon la nature de l'objet, elles apparaissent comme des variables "douées de mémoire" puisque représentant l'énergie accumulée ; on les désigne alors comme *grandeurs d'état*.

Si la transformation s'opère sans accumulation d'énergie, la relation de transformation n'est pas strictement causale car la sortie ne dépend que des valeurs présentes de l'entrée ; il s'agit donc d'une relation instantanée qualifiée de *rigide*. L'objet physique est *dissipateur d'énergie* : la résistance en électricité, le frottement visqueux en mécanique.

La figure 2 donne les trois processeurs dipôles élémentaires analogues intervenant dans les systèmes électriques (a), les systèmes mécaniques en translation (b) et en rotation (c).

Le flux magnétique (Φ) et la quantité de mouvement (p) sont des variables d'état analogues représentant l'énergie cinétique accumulée par l'objet physique.

La quantité d'électricité (Q) et le déplacement (x, θ) sont des variables d'état analogues représentant l'énergie potentielle accumulée dans l'objet physique. Ces deux cas représentent la dualité qui se retrouve dans toute transformation énergétique. La grandeur influente est nécessairement de nature duale de la grandeur influencée.

Lorsqu'il y a dissipation de l'énergie, la dualité entrée-sortie demeure *mais le caractère influent-influencé n'est pas défini* puisqu'il n'y a plus de grandeur d'état (résistance électrique et frottement mécanique).

Dans le cas linéaire (ou linéarisé), l'objet physique est caractérisé par un paramètre liant rigidement la grandeur d'état naturelle à une autre grandeur d'état, ce qui revient donc à un changement de variable : *le flux au courant par l'inductance, le déplacement à la force par la raideur ...*

Éléments de couplage

Le principe de conservation de l'énergie engendre deux natures d'éléments idéaux de couplage, alors sans accumulation ni dissipation (*neutralité énergétique*), sachant que la puissance instantanée à l'entrée de l'objet se retrouve à sa sortie. Dans ces conditions, les relations sont non strictement causales, donc instantanées et on distingue :

Le modulateur qui, à une grandeur d'entrée, fait correspondre une grandeur de sortie de même nature énergétique,

Le gyrateur qui, à une grandeur d'entrée, fait correspondre une grandeur de sortie de nature duale.

La figure 3 représente quelques éléments quadripôles idéaux de couplage couramment rencontrés dans les systèmes de conversion d'énergie. Le réducteur mécanique idéal (a) et le transformateur électrique parfait (b) constituent des modulateurs continus caractérisés par une fonction de conversion m : respectivement le rapport de réduction en vitesse, le rapport de transformation.

Ainsi, l'application du couple d'entrée C_e (grandeur influente) conduit au couple de sortie C_s tel que : $C_s = m C_e$; la vitesse d'entrée Ω_e (grandeur influencée) est une réaction, au travers du réducteur, de la charge entraînée à la vitesse Ω_s telle que : $\Omega_s = m \Omega_e$. Comme pour le processeur rigide simple, l'orientation entrée-sortie est arbitraire ; les indices peuvent donc être permutés et la vitesse Ω_e devient alors la grandeur influente et C_e la grandeur influencée.

Le même raisonnement s'applique au transformateur parfait.

La cellule de commutation formée de deux interrupteurs (c) constitue un *modulateur discontinu* également caractérisé par une fonction de conversion m . Dans ce cas, les états des interrupteurs, représentés par leur *fonction de connexion f_1 et f_2* [5] sont complémentaires ; il vient : $f_1 + f_2 = 1$ avec $f_1, f_2 \in \{0, 1\} \Rightarrow m = f_1$.

Le moteur à courant continu (idéalisé) est le cas type de *gyrateur* (d) ; en effet, contrairement au modulateur, les relations atemporelles R qui caractérisent ce processeur sont explicitées par un coefficient k (exprimé ici en $V/(rad/s)$ ou N/A) traduisant le rapport entre une grandeur potentielle (couple C , force électromotrice e) et une grandeur cinétique (courant i , vitesse Ω).

NOTATIONS	OBJETS	PROCESSEURS	RELATIONS
v : tension	 <i>(φ)</i> Accumulation d'Énergie Cinétique		$\frac{d\phi}{dt} = v$; $L \frac{di}{dt} = v$ L : inductance linéaire
i : courant	 <i>(Q)</i> Accumulation d'Énergie Potentielle		$\frac{dQ}{dt} = i$; $C \frac{dv}{dt} = i$ C : capacité linéaire
Q : charge			$v = Ri$ ou $i = \frac{1}{R} v$ R : résistance
φ : flux			

(a) : systèmes électriques

NOTATIONS	OBJETS	PROCESSEURS	RELATIONS
f : force	 <i>(p)</i> Accumulation d'Énergie Cinétique		$\frac{dp}{dt} = f$; $M \frac{dv}{dt} = f$ M : masse constante
v : vitesse			$\frac{dx}{dt} = v$; $\frac{1}{k} \frac{df}{dt} = v$ k : raideur constante
x : position			$f = a v$ ou $v = \frac{1}{a} f$ a : coefficient de frottement
p : quantité de mouvement			

(b) : systèmes mécaniques en translation

NOTATIONS	OBJETS	PROCESSEURS	RELATIONS
c : couple	 <i>(p)</i> Accumulation d'Énergie Cinétique		$\frac{dp}{dt} = c$; $J \frac{d\omega}{dt} = c$ J : inertie constante
ω : vitesse	 <i>(θ)</i> Accumulation d'Énergie Potentielle		$\frac{d\theta}{dt} = \omega$; $\frac{1}{k} \frac{dc}{dt} = \omega$ k : raideur constante
θ : position			$c = a \omega$ ou $\omega = \frac{1}{a} c$ a : coefficient de frottement
p : quantité de mouvement			

(c) : systèmes mécaniques en rotation

FIG. 2 Processeurs élémentaires des systèmes électromécaniques

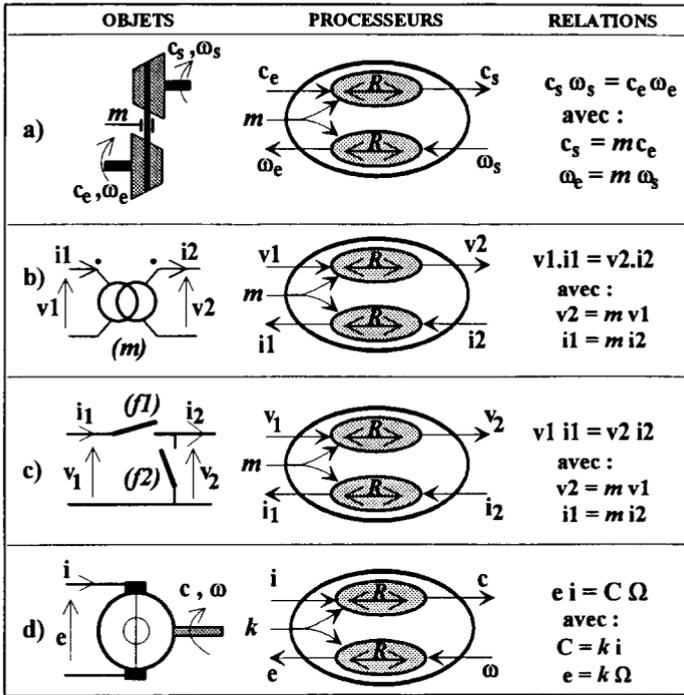


FIG. 3 Processeurs élémentaires de couplage

Opérateurs influents d'entrée

Nous qualifions d'opérateurs influents *le produit ou la somme pondérée* de plusieurs entrées intervenant dans une relation de transformation (figure 4) :

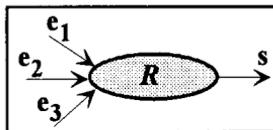


FIG. 4 Processeurs à plusieurs entrées influentes

$$R_{\text{produit}} \rightarrow s = R \left(\prod_{i=1}^n e_i \right), \quad R_{\text{somme}} \rightarrow s = \sum_{i=1}^n R_i e_i(t) \quad (1)$$

Une sortie est donc influencée par plusieurs entrées : par exemple deux sources de tension associées en série pour alimenter une inductance (opérateur somme) ou la même inductance alimentée par une source de tension modulée en amplitude par une autre (opérateur produit).

Ce cas se rencontre également dans la modélisation d'un système dont la sortie résulte d'une combinaison de plusieurs variables d'état. L'opérateur est alors un processeur rigide de couplage simple, sans perte ni accumulation : il peut encore être appelé *processeur opérateur*.

I-1.3 Caractérisation générale d'un processeur

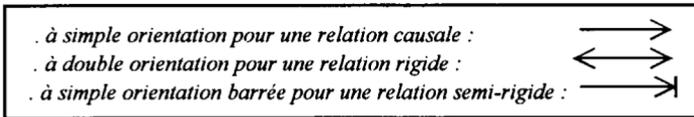
D'après les concepts précédents, pour la détermination d'un processeur, on ne retient comme sorties que des grandeurs d'état ou des fonctions rigides (instantanées) de celles-ci ou encore des grandeurs liées aux entrées avec retards temporels. La relation obtenue est *strictement causale* contrairement aux deux cas suivants qui représentent les limites du principe de causalité :

- . une équation différentielle présentant le même ordre de dérivation sur la sortie et sur l'entrée explicite une relation *semi-rigide*,
- . si l'ordre de dérivation est nul sur l'entrée et la sortie, la relation instantanée obtenue est qualifiée de *rigide* (atemporelle).

Le premier cas résulte essentiellement d'hypothèses restrictives sur le plan fréquentiel ; le second est induit par la factorisation d'une relation causale visant, par exemple, à séparer les éléments de modulation ou de gyration ainsi que les processeurs opérateurs.

Représentation

Dans la représentation d'un processeur, le caractère de la transformation est symbolisé par une flèche :



I-1.4 La construction du graphe causal

Par définition, le graphe est une association de processeurs élémentaires reliés entre eux par des liaisons informationnelles orientées. L'ensemble du graphe est lui-même un processeur fermé et complet.

L'association de processeurs dipôles (et quadripôles éventuellement) conduit au Graphe décrivant les causalités du système étudié, en d'autres termes son fonctionnement. Quelques règles simples sont à respecter afin d'éviter toute erreur d'analyse et d'interprétation; l'objectif étant dans la caractérisation du modèle.

Règles d'association

Le concept d'association laisse supposer que chaque objet physique d'un ensemble puisse être isolé et représenté par un processeur qui lui est propre. Cette disposition est toujours possible à condition de respecter les règles suivantes :

. tout processeur associé à un objet ou groupe d'objets voit son nombre d'entrées défini dans le contexte de l'ensemble,

. les sorties des processeurs ne peuvent être directement reliées entre elles.

. dans une cascade causale, il y a toujours alternance dans la nature des processeurs.

La figure 5 présente les cas classiquement rencontrés de liaisons intervenant dans les processus électriques et/ou électromécaniques. Sur les représentations où g_P désigne une grandeur potentielle (ou vecteur potentiel) et g_C une grandeur cinétique (ou vecteur cinétique), on distingue :

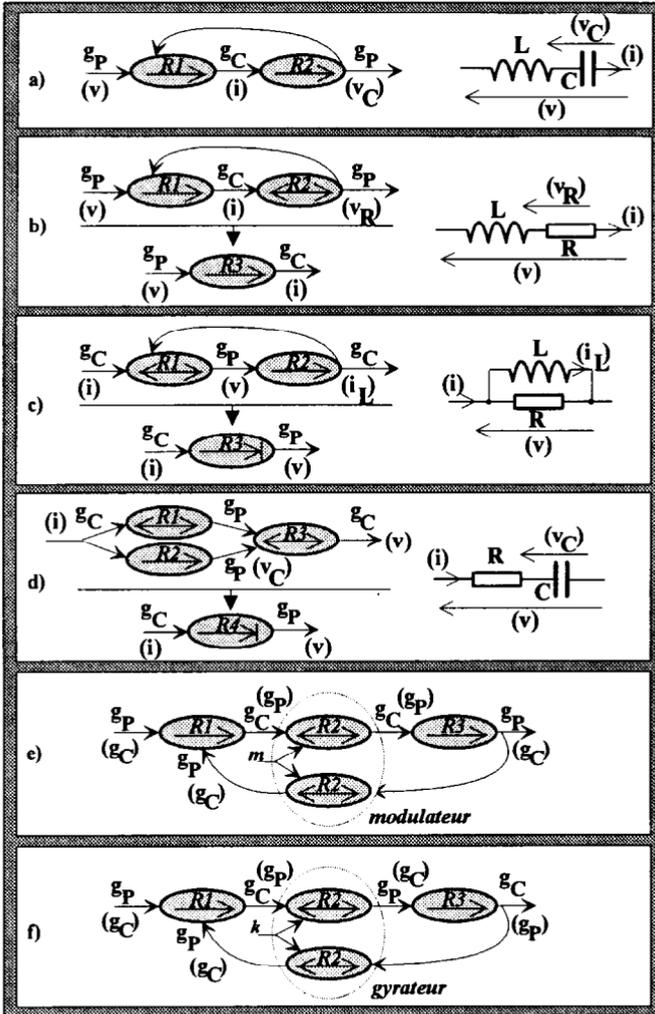


FIG. 5 Liaisons informationnelles courantes

a) l'**association directe de type 1**, formée d'une cascade de processeurs causaux de **nature différente (alternée)**. La cascade $gp-gc-gp$ ou, par dualité $gc-gp-gc$, fait toujours intervenir une ou plusieurs boucles de réaction.

Le circuit RLC série alimenté en tension ou parallèle alimenté en courant en est une illustration classique dans le domaine électrique.

b) l'**association directe de type 2**, formée d'un processeur causal de nature quelconque et d'un processeur rigide en cascade peut toujours se ramener à un **processeur causal unique** représentant le groupement d'objets (cascade $gp-gc-gp$ ou, par dualité $gc-gp-gc$).

L'exemple montre le cas d'une résistance inductive alimentée en tension pour laquelle il vient : $R_1, R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = v$. Il en serait de même pour le cas dual illustré par l'association en parallèle d'une résistance et d'un condensateur alimentés en courant.

c) l'**association directe de type 3**, formée d'un processeur rigide et d'un processeur causal de nature quelconque en cascade, peut toujours se ramener à un **processeur semi-rigide** (cascade $gp-gc-gp$ ou, par dualité $gc-gp-gc$).

L'exemple montre le cas d'un circuit inductif parallèle alimenté en courant pour lequel il vient : $R_1, R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow \frac{L}{R} \frac{dv}{dt} + v = L \frac{di}{dt}$. Il en serait de même pour le cas dual illustré par l'association en série d'une résistance et d'un condensateur alimentés en tension.

d) l'**association directe de type 4**, formée d'un processeur rigide et d'un processeur causal de nature quelconque en parallèle, peut toujours se ramener à un **processeur semi-rigide**.

L'exemple montre le cas d'un circuit capacitif série alimenté en courant : les tensions aux bornes de chacun des éléments ne dépendent que du courant d'entrée (relations simples R_1 et R_2). Si la grandeur de sortie est la tension aux bornes du dipôle global, un opérateur somme est nécessaire (relation R_3). Il vient : $R_1, R_2, R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{dv}{dt}$. Il en serait de même pour le cas dual illustré par l'association en parallèle d'une résistance et d'une inductance alimentées en tension

e) le **couplage indirect de processeurs causaux par modulateur**. La cascade $gp-(gc-gc)-gp$ ou $gc-(gp-gp)-gc$ montre la **dualité** dans la nature des processeurs situés de part et d'autre du modulateur.

L'exemple typique est la dualité des sources situées en entrée et en sortie d'un groupement d'interrupteurs; le convertisseur statique ainsi formé conserve en sortie la nature énergétique des variables d'entrée qu'il module.

f) le **couplage indirect de processeurs causaux par gyrateur**. La cascade $gp-(gc-gp)-gc$ ou $gc-(gp-gc)-gp$ montre la **même nature** énergétique des processeurs situés de part et d'autre du gyrateur.

L'exemple typique est bien dans la nature des variables d'état d'une machine à courant continu : le courant d'induit pour la partie électrique, la vitesse pour la partie mécanique.

L'association directe, en cascade, de processeurs causaux de **même nature** est impossible puisque la grandeur de sortie du premier est incompatible avec l'entrée du second. Ce cas apparaît lorsque les sorties devraient être communes, ce qui est en contradiction avec l'une des règles énoncées précédemment. *La mise en parallèle de deux condensateurs dont la tension est différente en est l'illustration courante (figure 6-a); l'interconnexion n'est possible qu'en*

condition énergétique nulle (ici $v_1=v_2$) sinon un objet adaptateur est nécessaire, telle qu'une résistance. (figure 6-b). Dans ces conditions, les relations s'écrivent :

$$R1 \rightarrow C_1 \frac{dv_1}{dt} = i_1 - i_R, \quad R2 \rightarrow i_R = (v_1 - v_2)/R, \quad R3 \rightarrow C_2 \frac{dv_2}{dt} = i_2 + i_R$$

Dans la phase d'analyse d'un système, l'obligation d'une telle association signifie l'existence d'un objet physique équivalent au groupement considéré. Le processeur équivalent est défini préalablement ou se déduit en portant la relation de couplage à la limite; dans l'exemple, la résistance R est considérée de valeur infiniment petite et la relation de transformation ne révèle qu'une seule grandeur influencée : la tension v (figure 6-c). Il n'y a, dans ces conditions, qu'un seul processeur correspondant à ce groupement d'objets, indissociables sur le plan énergétique et la relation R4 se déduit de R1 et R3 sachant que les tensions v_1 et v_2 sont égales, soit :

$$R4 \rightarrow C \frac{dv}{dt} = i_1 + i_2 \quad \text{avec } C = C_1 + C_2$$

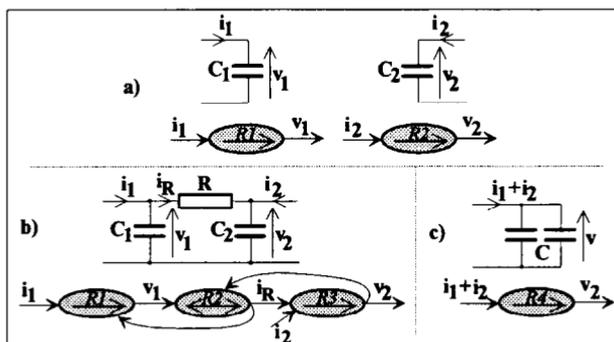


FIG. 6 Assemblage d'objets de même nature énergétique

Règle d'écriture

L'écriture d'un graphe à partir d'une description schématique du système physique étudié peut s'avérer délicate si le modélisateur n'est pas suffisamment expérimenté ou empreint des lois physiques. Nous ne prétendons pas donner de règles systématiques en dehors de celle qui oblige à prendre en considération la nature de la grandeur de commande (d'entrée) du système. En effet, le principe de causalité impose lui-même l'association de sorte que pour l'écriture, il en découle la règle suivante :

Si la grandeur de commande (ou de réglage) est de nature potentielle (resp. cinétique), le premier élément du graphe (écrit à gauche) est un processeur accumulateur d'énergie cinétique (resp. potentielle) ou, à défaut, un élément de couplage dissipatif.

La figure 7 donne une illustration de ce propos pour un même système électrique dont l'alimentation est d'abord une source idéale de tension (a), puis de courant (b). Chaque graphe est donc constitué de trois processeurs élémentaires correspondants aux objets physiques résistance, inductance, condensateur, et associés selon les règles précédentes.

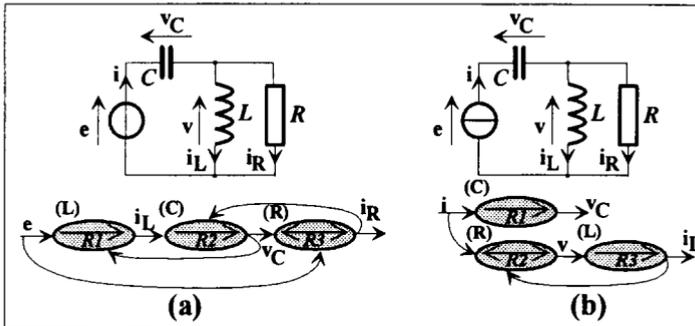


FIG. 7 Graphe de Causalité d'un système électrique selon la nature de l'entrée
(a) : source de tension, (b) : source de courant

Dans le cas (a), on constate que le premier élément du schéma correspond effectivement à l'inductance pour laquelle il apparaît deux grandeurs d'entrée : la tension de source e , la tension aux bornes du condensateur v_C résultant de l'intégration de la somme des courants i_L et i_R . Les relations entre grandeurs influentes et grandeurs influencées doivent toujours respecter le principe de causalité intégrale et il vient :

$$\begin{aligned} R1 \rightarrow L \frac{di_L}{dt} = e - v_C &\longrightarrow Ls i_L(s) = e(s) - v_C(s) \\ R2 \rightarrow C \frac{dv_C}{dt} = i_L + i_R &\longrightarrow Cs v_C(s) = i_L(s) + i_R(s) \\ R3 \rightarrow i_R = (e - v_C) / R &\longrightarrow i_R(s) = (e(s) - v_C(s)) / R \end{aligned}$$

Dans le cas (b), on constate qu'il apparaît deux éléments premiers sur le graphe correspondant d'une part au condensateur intégrant la totalité du courant de source i , et d'autre part, à la résistance formant ainsi le couplage nécessaire entre cette source et l'inductance. Les relations écrites dans les conditions strictes de la causalité sont :

$$\begin{aligned} R1 \rightarrow C \frac{dv_C}{dt} = i &\longrightarrow Cs v_C(s) = i(s) \\ R2 \rightarrow v = R(i - i_L) &\longrightarrow v(s) = R(i(s) - i_L(s)) \\ R3 \rightarrow L \frac{di_L}{dt} = v &\longrightarrow Ls i_L(s) = v(s) \end{aligned}$$

N.B. : Les expressions (2) et (3) sont écrites de deux manières : sous forme d'équations d'état (différentielles), sous forme opérationnelle en utilisant l'opérateur de Laplace s .

I-2. EXEMPLE D'APPLICATION : une transmission mécanique élémentaire

En recherchant le modèle de connaissance de quelques systèmes classiques, nous montrons que l'association d'objets physiques respecte les lois naturelles de la causalité. Si la démarche

est correctement admise, elle développe non seulement l'expertise mais également l'esprit critique grâce à la logique qui en découle.

L'exemple que nous considérons est volontairement simple pour mettre en évidence cette logique. Il s'agit d'une chaîne cinématique élémentaire réunissant deux volants d'inertie (J_e et J_s) au moyen d'un arbre de couplage souple (k) (figure 8). Nous sommes alors face à une association directe de processeurs de causalité alternée (de type 1) et le graphe informationnel s'établit sans difficulté.

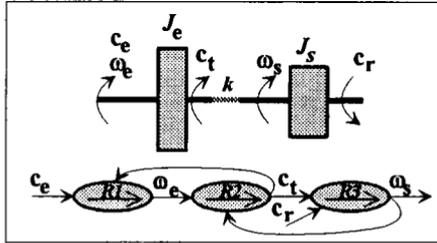


FIG. 8 Transmission mécanique par couplage élastique

Les trois relations s'explicitent de la manière suivante :

$$R1 \rightarrow J_e \frac{d\omega_e}{dt} = c_e - c_t$$

ARBRE D'ENTREE : c_e : couple d'entrée, c_t : couple transmis,
 ω_e : vitesse de l'arbre d'entrée

$$R2 \rightarrow \frac{1}{k} \frac{dc_t}{dt} = \omega_e - \omega_s$$

ARBRE DE LIAISON : ω_s : vitesse de l'arbre de sortie

$$R3 \rightarrow J_s \frac{d\omega_s}{dt} = c_t - c_r$$

ARBRE DE SORTIE : c_r : couple imposé par la charge

Si l'arbre intermédiaire est maintenant caractérisé par une raideur infinie, la relation R2 montre que les vitesses d'entrée et de sortie deviennent strictement égales. Nous sommes face à une association directe de processeurs de même nature énergétique (comme dans le cas des deux condensateurs précédents), impossible à réaliser puisque les grandeurs influentes, dans les relations R1 et R3, sont des couples. Il existe donc un objet équivalent qui n'est autre qu'un simple volant de moment d'inertie global $J_e + J_s$, situation se démontrant facilement en combinant les relations R1 et R3 dans les conditions d'égales vitesses.

Toutefois, il est important de souligner que l'hypothèse choisie de liaison élastique, même de raideur de valeur très élevée, est tout-à-fait réaliste puisqu'elle présente l'avantage de soulever certains problèmes pratiques, comme l'apparition de vibrations dans la chaîne cinématique. Dans certaines situations plus complexes, par exemple une transmission au moyen d'un

réducteur, (indice de réduction m) une telle démarche est incontournable si l'on désire associer un processeur à chacun des objets physiques du système étudié (figure 9).

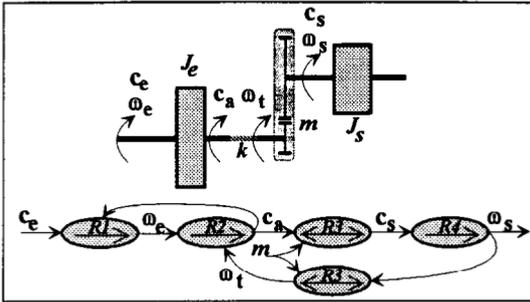


FIG. 9 Transmission mécanique avec réducteur

La prise en compte de l'élasticité de l'arbre d'entrée permet l'écriture d'un graphe informationnel, obtenu en associant les processeurs correspondant à chaque objet isolé. Les relations causales de type 1 avec couplage indirect par modulateur sont :

$$R1 \rightarrow J_e \frac{d\omega_e}{dt} = c_e - c_a$$

ARBRE D'ENTREE : c_e : couple d'entrée, c_a : couple transmis,
 ω_e : vitesse de l'arbre d'entrée

$$R2 \rightarrow \frac{1}{k} \frac{dc_a}{dt} = \omega_e - \omega_t$$

SOUPLESSE : ω_t : vitesse de l'arbre menant du réducteur

$$R3 \rightarrow c_s = m c_a, \omega_t = m \omega_s$$

REDUCTEUR IDEALISE : ω_s : vitesse de l'arbre mené du réducteur,
 c_s : couple en sortie du réducteur

$$R4 \rightarrow J_s \frac{d\omega_s}{dt} = c_s$$

ARBRE DE SORTIE : ω_s : vitesse de l'arbre mené

Si l'élasticité de l'arbre d'entrée n'est pas prise en compte, les vitesses ω_e et ω_t sont égales et l'écriture du graphe en processeurs séparés devient impossible, la relation $R1$ exige de connaître le couple transmis c_t . Or, celui-ci est également, via le réducteur idéal (relations $R3$ rigides), la grandeur influente pour l'arbre de sortie : la situation est paradoxale, car on se retrouve dans un cas où des processeurs de même nature doivent être directement reliés. Par conséquent, nous sommes à nouveau devant un groupe d'objets ne pouvant être

représenté que par un seul processeur; la relation correspondante s'obtient par substitution entre $R1$, $R3$ et $R4$, après avoir imposé l'égalité des vitesses ω_e et ω_t . Vu de l'arbre d'entrée, ce dispositif est alors équivalent à un simple volant dont le mouvement est régi par l'équation :

$$J \frac{d\omega_e}{dt} = c_e \quad \text{avec : } J = J_e + \frac{J_s}{m^2}$$

La figure 10 montre comment sont pris en compte les frottements (coefficients f_e , f_s et f_t) au niveau de chaque arbre. Le graphe (a) est celui obtenu en associant un processeur élémentaire à chacun des objets supplémentaires ainsi introduits ($R5$, $R7$ et $R8$).

La relation $R6$ explicite un opérateur "somme algébrique" entre le couple transmis c_a et le couple de frottement sur l'arbre menant qui amène une modification du couple appliqué au réducteur. Le graphe (b) est une représentation intermédiaire obtenue en ne simplifiant que les associations de type 2 qui apparaissent immédiatement en entrée ($R1$, $R5$) et en sortie ($R4$, $R8$).

Nous montrons ensuite que le graphe final (c) peut reprendre la même structure que celui de la figure 9.

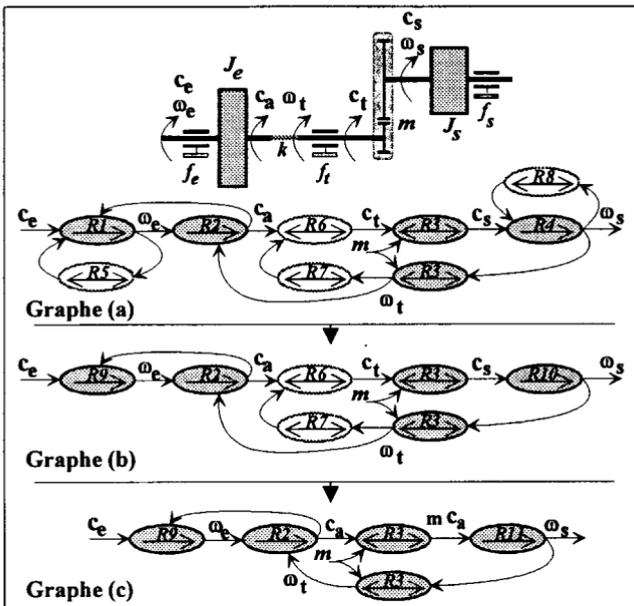


FIG 10 Introduction des frottements

. ARBRE D'ENTREE :

$$R1 \rightarrow J_e \frac{d\omega_e}{dt} = c_e - c_{fe}, \quad R5 \rightarrow c_{fe} = f_e \omega_e, \quad \Rightarrow R9 \rightarrow J_e \frac{d\omega_e}{dt} + f_e \omega_e = c_e$$

c_{fe} : couple de frottement sur l'arbre d'entrée

. ARBRE DE SORTIE :

$$\boxed{R4 \rightarrow J_s \frac{d\omega_s}{dt} = c_s - c_{fs}, \quad R8 \rightarrow c_{fs} = f_s \omega_s, \quad \Rightarrow R10 \rightarrow J_s \frac{d\omega_s}{dt} + f_s \omega_s = c_s}$$

c_{fs} : couple de frottement sur l'arbre de sortie

. ARBRE MENANT :

$$\boxed{R6 \rightarrow c_t = c_a - c_{ft}, \quad R7 \rightarrow c_{ft} = f_t \omega_t}$$

c_{ft} : couple de frottement sur l'arbre menant

$$R3 \rightarrow c_s = m c_t, \quad \omega_t = m \omega_s$$

En remplaçant c_{ft} dans $R6$ (en fonction de ω_s), puis c_t dans $R3$, il vient :

$$R3, R6, R7 \rightarrow c_s = c_x - f_t m^2 \omega_s \quad \text{avec : } c_x = m c_a \quad (\text{relation } R3 \text{ modifiée})$$

et, en reprenant la relation $R10$ ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{R11 \rightarrow J_s \frac{d\omega_s}{dt} + (f_s + m^2 f_t) \omega_s = c_x}$$

Ainsi, le frottement sur l'arbre menant se retrouve sur l'arbre de sortie augmenté dans le rapport au carré de l'indice de réduction. Cette dernière relation explicite le processeur causal équivalent à l'association de type 2 constituée des processeurs rigides parallèles (*cascade* $R3, R6, R7$ avec $R8$) et du processeur causal cinétique ($R4$).

2ème PARTIE : OUTIL DE SYNTHÈSE

II-3. INVERSION DES CAUSALITES

Un système asservi est formé d'un ensemble d'objets capables de créer une relation de cause à effet entre deux grandeurs quelconques de ce même système, alors constitué de deux blocs essentiels :

- le **processus** où s'opère une transformation de puissance avec un objectif précis : dans l'exemple d'une transformation électromécanique, la vitesse d'un moteur à courant continu entraînant une charge varie grâce à l'action réalisée sur la tension d'induit (causalité tension-vitesse dans le moteur),
- le **dispositif de commande** qui assure le *réglage automatique* du processus : action sur la tension du moteur pour "obliger" la vitesse à rester aussi proche que possible de la consigne imposée (causalité vitesse-tension).

Dans ces conditions, il apparaît que le concept de système asservi repose donc sur l'association de deux relations causales bouclées, la relation de commande ayant pour effet *d'inverser* la causalité créée par le processus.

II-3.1 Des principes d'inversion aux principes de commande

Définition

L'inversion d'une relation associée à un processeur détermine *une relation de commande* qui caractérise la grandeur de réglage de ce processeur dans des conditions précises. Pour un processus à une seule grandeur influente et à une seule grandeur influencée, *la commande se définit donc en permutant l'orientation de ces deux variables*. En raison même du principe de causalité qui vient d'être de nouveau évoqué, *l'inversion directe* n'est possible que pour une relation rigide connue. Ainsi, sur la figure 11.a, on a :

Processus : $y = R(e)$ Commande : $e_{\text{reg}} = R_c(y_{\text{ref}})$ Si $e = e_{\text{reg}}$ et $R_c = R^{-1}$, alors $y = y_{\text{ref}}$	(2)
---	-----

Dans le cas d'une relation causale, *l'effet de la grandeur influente n'est pas ressenti immédiatement sur la grandeur influencée en raison même de l'accumulation énergétique*. Pour fixer l'objectif de cette dernière variable, il faut recourir à *l'inversion indirecte* au moyen d'une relation à grand gain sur l'écart entre la sortie y et une trajectoire de référence y_{ref} : c'est le concept *d'asservissement* décrit à la figure 11.b, soit :

Processus : $y = R(e)$ Commande : $e_{\text{reg}} = R_c(y_{\text{ref}} - y)$ Si $e = e_{\text{reg}}$ et R_c à grand gain, alors $y \rightarrow y_{\text{ref}}$	(3)
--	-----

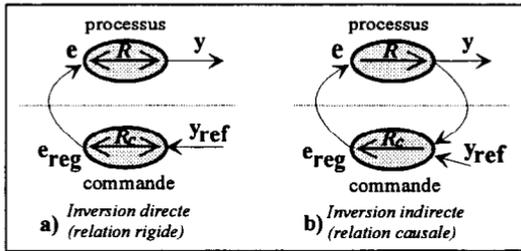


FIG. 11 Inversion d'une relation - Concept d'asservissement

Lois de commande

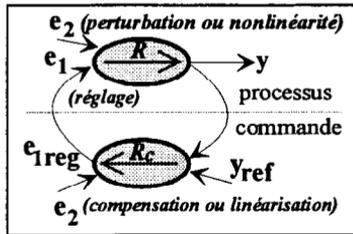


FIG. 12 Principe de compensation et de linéarisation

Lorsque plusieurs entrées agissent sur un même processeur, les grandeurs associées autres que celles de réglage sont considérées comme des perturbations.

La relation de commande s'obtient de la même manière que précédemment, c'est-à-dire en permutant l'orientation de la grandeur influencée du processeur, ce qui oblige à permuter l'orientation d'une grandeur influente et d'une seule.

Toutefois, si les autres sont mesurables et captées, elles peuvent être introduites dans la relation de commande; la figure 12 en donne une illustration dans le cas d'un processeur monovariable à deux grandeurs influentes.

Lorsque la sortie y du processeur résulte d'une **superposition** de ces deux grandeurs influentes, une **compensation** de la perturbation (ici e_2) peut être envisagée. Le principe consiste à appliquer un effet opposé par l'intermédiaire du réglage (ici e_1); c'est la superposition réalisée par le processeur de commande qui annule alors l'influence de la perturbation et on a :

$$\begin{array}{l}
 \text{Processus: } y = R_1(e_1) + R_2(e_2) \\
 \text{Commande: } e_{1\text{reg}} = -\frac{R_2}{R_1}(e_2) + R_c(y_{\text{ref}} - y)
 \end{array} \tag{4}$$

Si la relation de compensation $-\frac{R_2}{R_1}$ est physiquement réalisable (respect du principe de causalité) et, si $e_1 = e_{1\text{reg}}$, on constate que e_2 n'a plus d'influence puisque :

$$y = R1 \left(-\frac{R2}{R1} (e_2) + R_c (y_{ref} - y) \right) + R2(e_2) = R1 \times R_c (y_{ref} - y)$$

Si R_c est à grand gain, alors $y \rightarrow y_{ref}$

Lorsque la sortie y du processus résulte du **produit** des deux grandeurs influentes, une **linéarisation dynamique** peut être envisagée pour cette commande alors non linéaire. Comme précédemment, le principe consiste à appliquer un effet inverse à celui de la perturbation par l'intermédiaire du réglage, c'est l'inversion réalisée par le processeur de commande qui annule l'effet de la perturbation et on a :

Processus : $y = R(e_1 \times e_2)$ Commande : $e_{1reg} = \frac{1}{e_2} \times R_c (y_{ref} - y)$	(5)
---	-----

Si $e_1 = e_{1reg}$, on constate que e_2 n'a plus d'influence puisque :

$$y = R \left(\frac{1}{e_2} \times R_c (y_{ref} - y) \times e_2 \right) = R \times R_c (y_{ref} - y)$$

Si R_c est à grand gain, alors $y \rightarrow y_{ref}$

La **compensation idéale** de perturbation suppose que les relations $R1$ et $R2$ soient connues ou suffisamment connues et que la grandeur correspondante (ici e_2) ne soit pas de valeur infiniment grande; cette particularité n'aurait aucun sens, puisque le processus serait alors quasi incontrôlable.

La **linéarisation dynamique** idéale, quant à elle, suppose que la grandeur e_2 ne soit pas de valeur infiniment petite.

Dans les deux cas, le principe de causalité doit être respecté lorsque les relations de commande sont des lois continues; à la limite, précisons que de telles relations peut être explicitées par des équations différentielles ayant le même ordre de dérivation sur les entrées que sur les sorties, mais il s'agit alors d'une approximation négligeant des coefficients de faible valeur sur les ordres de dérivation les plus élevés des grandeurs influencées.

Lorsque la relation de réglage établie par un processeur causal est suffisamment connue, il est possible de prévoir une **anticipation** (figure 13).

L'anticipation rappelle l'application du principe de l'inversion directe, appliquée sur une partie de la relation propre à l'objet ou au processus concerné. Un telle disposition a pour effet d'informer "approximativement" ce processus de la modification souhaitée pour son point de fonctionnement (relation R_a), la précision étant apportée par l'amplification de l'écart restant entre la sortie y et sa référence y_{ref} (relation R_c). Il vient :

Processus : $y = R(e)$ Commande : $e_{reg} = R_s (R_c (y_{ref} - y) + R_a (y_{ref}))$	(6)
--	-----

La relation R_s explicite la simple superposition des effets et si $e = e_{reg}$, il vient :

$$y = R \times R_a (y_{ref}) + R \times R_c (y_{ref} - y)$$

Remarque : En observant les expressions (4), (5) et (6), on constate que la compensation, l'anticipation et la linéarisation dynamique sont des actions qui n'ont de sens que si la relation de commande ne peut établir de gain infiniment élevé. En pratique, le domaine fréquentiel de cette dernière relation est toujours limité; dès lors les actions complémentaires précédemment évoquées permettent d'optimiser, lorsqu'elles sont réalisables, la loi de commande globale.

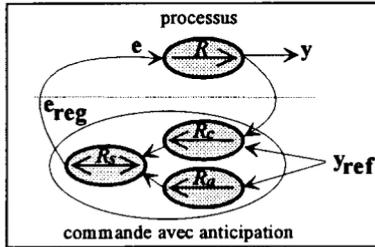


FIG. 13 Principe d'asservissement avec anticipation

Estimation de grandeurs influentes

Lorsque la sortie du processus est influencée par deux entrées dont l'une sert au réglage, l'autre peut être estimée grâce à une relation d'asservissement appliquée au processus simulé en temps réel. La figure 14 illustre ce principe : l'entrée e_2 est la grandeur influente inconnue que l'on souhaite estimer à partir de la connaissance du réglage e_1 et de la sortie y , ces deux grandeurs devenant respectivement les équivalentes d'une perturbation et d'une référence pour le processus simulé. Ce dernier (relation R_s) voit donc sa sortie \tilde{y} asservie à celle y du processus réel grâce à une relation de commande R_e : l'estimation est donc réalisée par inversion indirecte de la causalité du processus simulé pour qui \tilde{e}_2 devient la grandeur de réglage.

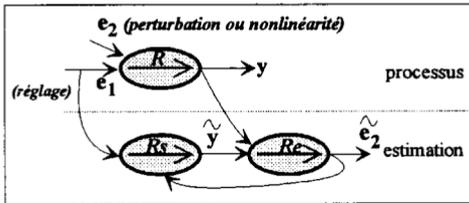


FIG. 14 Principe d'estimation de grandeurs influentes

Cas d'une perturbation :

Processus réel : $y = R1(e_1) + R2(e_2)$	(7)
Processus simulé : $\tilde{y} = Rs1(e_1) + Rs2(\tilde{e}_2)$	
Estimation : $\tilde{e}_2 = Re(y - \tilde{y})$	

Si Re est à grand gain, alors $\tilde{y} \rightarrow y$,
 Si $Rs1 \cong R1$ et $Rs2 \cong R2$, alors $\tilde{e}_2 \cong e_2$

Cas d'une non linéarité :

Processus réel : $y = R(e_1 \times e_2)$ Processus simulé : $\tilde{y} = R_s(e_1 \times e_2)$ Estimation : $\tilde{e}_2 = Re(y - \tilde{y})$	(8)
--	-----

Si Re est à grand gain, alors $\tilde{y} \rightarrow y$,
 Si $Rs \equiv R$, alors $\tilde{e}_2 \equiv e_2$

Les grandeurs ainsi estimées peuvent être utilisées pour la compensation ou la linéarisation. Cette technique est également la base classique de la commande avec élimination de capteurs.

II-3.2 Application : le système de référence

Au travers d'un exemple, nous précisons les concepts et l'intérêt du formalisme "Graphe Informationnel Causal" qui oriente la pensée lors de la phase d'analyse d'un processus d'abord, de la phase de synthèse de sa commande ensuite.

Grappe processus

La figure 15 rappelle le schéma équivalent de la machine à courant continu alimentée par un convertisseur statique (généralement un hacheur) assurant le réglage de la valeur moyenne de la tension d'induit.

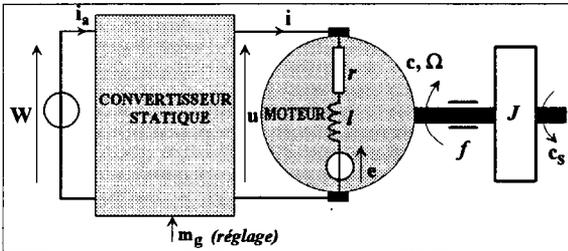


FIG. 15 Association convertisseur-machine

Cette machine est un transformateur électromécanique dont le fonctionnement dynamique est régi par le groupe d'équations suivant :

$R1 \rightarrow u = (r + l \frac{d}{dt})i + e$ (équation de la partie électrique)	(9)
$R2 \rightarrow c = (f + J \frac{d}{dt})\Omega + c_s$ (équation de la partie mécanique)	
$R3 \rightarrow c = k \cdot i$	
(équations de couplage par gyration)	
$R4 \rightarrow e = k \cdot \Omega$	

avec :

. u, i, Ω et c_s respectivement la *tension* et le *courant* d'induit, la *vitesse* et le *couple* de charge,

. r, l, f et J respectivement la *résistance* et l'*inductance* d'induit, le *coefficient de frottement visqueux* et le *moment d'inertie* total sur l'arbre,

. k le *coefficient de couple* ou de conversion électromécanique désigné comme coefficient de gyration, e étant alors la *force électromotrice induite* et c le *couple électromagnétique*.

Le convertisseur est un modulateur d'énergie électrique dont le fonctionnement dynamique est régi par le groupe d'équations de couplage :

$$\boxed{R5 \rightarrow u = m_g W, R6 \rightarrow i_a = m_g i} \quad (10)$$

avec :

. W la tension de la source d'alimentation, réalisée par exemple au moyen d'un redresseur associé à des éléments de filtrage,

. i_a le courant absorbé à la source,

. m_g est la valeur moyenne instantanée obtenue, pour le coefficient de modulation m , en considérant la fréquence de commutation du hacheur de valeur infiniment grande [5]. En pratique, une telle hypothèse revient à négliger la dynamique du convertisseur devant celle de la partie électrique de la machine; le réglage a donc lieu en valeur instantanée, ce qui justifie les expressions (10). Pour un hacheur réversible quatre quadrants, on a :

$$m = \{-1, 0, 1\} \text{ d'où } m_g \in [-1, 1].$$

La figure 16 décrit les causalités qui interviennent dans cette chaîne de transformation énergétique : le *graphe processus* ainsi obtenu est formé par l'assemblage de processeurs établissant des relations entrées-sorties explicitées par les expressions (9) et (10).

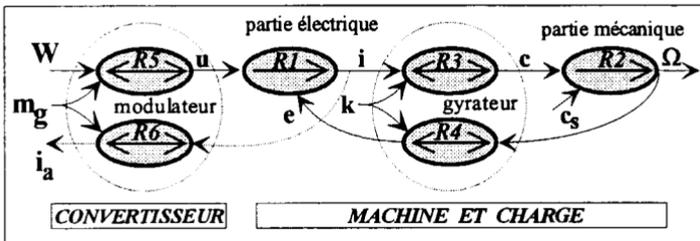


FIG. 16 Graphe Informationnel Causal sur la chaîne de puissance

Les relations $R1$ et $R2$ sont causales et correspondent à des processeurs élémentaires à accumulation d'énergie cinétique : leurs entrées sont alors des grandeurs potentielles (tension, f.é.m. ou couple), leur sortie une grandeur cinétique (courant ou vitesse). Les relations $R3$ et $R4$ sont rigides et correspondent au processeur de couplage électromécanique; rappelons que ce couplage est réalisé par un *gyrateur* dont la caractéristique est de modifier, de part et d'autre, la nature énergétique des grandeurs.

Les relations $R5$ et $R6$ sont également rigides et correspondent au processeur de couplage constitué par le convertisseur statique; la nature énergétique des grandeurs n'est pas modifiée de part et d'autre de ce modulateur.

Graphe de commande

L'inversion méthodique du graphe processus, réalisée en appliquant les concepts précédents à chaque processeur élémentaire, conduit au *graphe de commande*. La description ainsi obtenue informe sur les relations à établir entre les grandeurs du processus et leurs références qui définissent la conduite du système; c'est une démarche qui systématise la structure globale de la commande. La figure 17 montre l'organisation qui en découle pour la conduite en vitesse de la machine à courant continu.

N.B. Sur la figure 17, les grandeurs estimées et les paramètres mesurés intervenant dans la commande et l'estimateur se distinguent des grandeurs et des paramètres du processus au moyen d'un tilde (\sim).

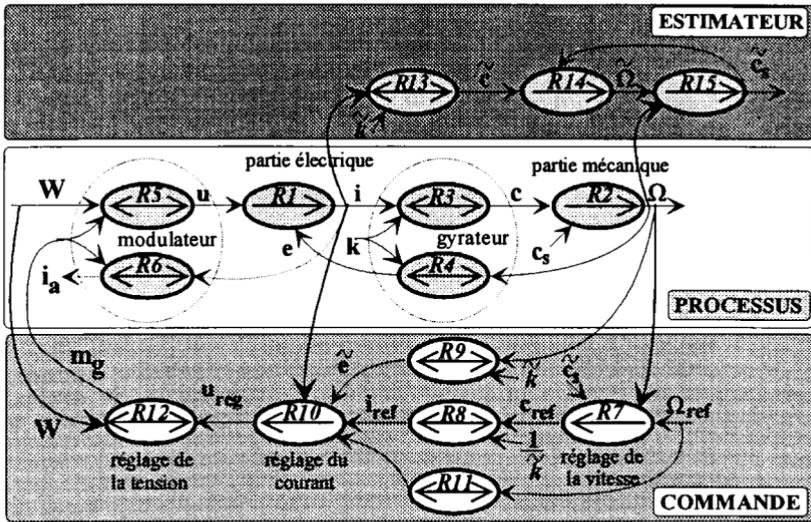


FIG. 17 Description informationnelle sur la commande en vitesse de la machine à courant continu

Le principe de construction du graphe de commande, obtenu par inversion du graphe processus, est le suivant :

La relation $R7$, devant inverser $R2$, établit une relation de grand gain sur l'écart entre la vitesse Ω et sa référence Ω_{ref} . Si elle est reconstituée, la valeur estimée \tilde{c}_s du couple de charge c_s , grandeur de perturbation, intervient a priori dans l'élaboration du couple de réglage c_{ref} . Comme l'interconnexion $c_{ref} \rightarrow c$ est évidemment impossible, on continue la démarche jusqu'à la *grandeur de réglage physiquement accessible du processus*, soit m_g .

La relation $R8$ inverse *directement* $R3$ pour définir le courant de référence.

La relation $R10$, devant inverser $R1$, établit un grand gain sur l'écart entre le courant d'induit i et sa référence; la f.e.m. e , qui apparaît comme une grandeur de perturbation du courant, intervient en *compensation* dans l'élaboration de la grandeur de réglage. Ceci explique

la présence de la relation R9 qui, explicitée comme R4, reconstitue la f.é.m. alors notée \tilde{e} . Il s'agit d'une valeur a priori différente de la f.é.m. effective puisque résultant d'un calcul réalisé à partir de la vitesse et de la valeur mesurée \tilde{k} du coefficient de gyration.

La relation R11 est l'anticipation prévisible du point de fonctionnement.

La relation R12 ($m_g = u_{reg}/W$) correspond à la *linéarisation dynamique* de la commande si la tension W est mesurée. Une telle disposition, qui exige un capteur supplémentaire, permet de rejeter les effets des variations de la source d'alimentation. En l'absence de capteur, cette relation se réduit à un simple gain ($1/W_0$) calculé à partir de la valeur moyenne W_0 prévue pour la tension d'alimentation.

Les relations R13 et R14 reproduisent respectivement celles R3 et R2 du processus. Simulées en temps réel, elles permettent d'estimer le couple de charge c_s grâce à la relation à grand gain R15. Evidemment, l'estimation de la perturbation sera d'autant plus précise que les paramètres k , f et J sont correctement mesurés.

En résumé, les relations de commande et d'estimation sont explicitées par les expressions suivantes :

COMMANDE :

R7 $\rightarrow c_{ref} = \tilde{c}_s + C_\Omega(\Omega_{ref} - \Omega)$	(compensation et asservissement)	(11)
R8 $\rightarrow i_{ref} = \frac{1}{k} c_{ref}$	(inversion directe)	
R9 $\rightarrow \tilde{e} = \tilde{k}\Omega$	(compensateur)	
R10, R11 $\rightarrow u_{reg} = \tilde{e} + C_i(i_{ref} - i) + C_a\Omega_{ref}$	(compensation, asservissement et anticipation)	
(R11 $\rightarrow C_a\Omega_{ref}$)	(anticipateur)	

ESTIMATEUR :

R13, R14 $\rightarrow \tilde{c} = \tilde{k} i, \tilde{f} \tilde{\Omega} + \tilde{J} \frac{d\tilde{\Omega}}{dt} = \tilde{c} - \tilde{c}_s$	(processus simulé)	(12)
R15 $\rightarrow \tilde{c}_s = C_e(\Omega - \tilde{\Omega})$	(estimation)	

La synthèse des blocs de correction (de vitesse C_Ω , de courant C_i , d'anticipation C_a , et d'estimation C_e) relève de la théorie des asservissements. Dans la bibliographie [6], nous montrons comment s'opère la transformation du Graphe Informationnel Causal en Schéma Fonctionnel. Précisons que ce dernier, topologiquement identique au précédent, est essentiellement un outil de représentation des relations (sous forme d'opérateurs et de fonctions de transfert) entre les grandeurs; en revanche, le graphe de causalité est un outil de transposition de la réflexion face à un problème d'analyse et de synthèse.

En pratique, les correcteurs de couple et de vitesse sont souvent à action proportionnelle et intégrale. Il convient également de préciser que, dans bien des cas, les compensations de perturbations ne sont pas réalisées, et que ce type de correcteur suffit si les performances dynamiques souhaitées ne sont pas très contraignantes. En revanche, l'optimisation et notamment les cas de charge non linéaires (inertie variable, élasticité) exigent la compensation de la f.é.m., seule solution capable de découpler partie mécanique et partie électrique.

CONCLUSION

Quel est l'apport des Graphes Informationnels de Causalité ?

Ils forcent le modélisateur à respecter les principes physiques lors de l'analyse d'objets interconnectés.

Ils révèlent a priori l'existence de modes de comportement qui risqueraient d'être occultés par une étude mathématique directe.

Ils représentent un excellent outil pédagogique puisqu'ils contribuent à accélérer l'expérience dans l'art et la manière de poser un problème de modélisation, en vue de l'analyse ou de la synthèse de commande.

L'écriture d'un Graphe Causal dans des domaines différents de la Physique fait systématiquement apparaître des situations analogues, très favorables au développement de l'esprit d'analyse et de synthèse.

L'inversion causale débouche sur une forme systématisée des lois de commande relevant de la théorie de l'Automatique. A ce niveau, c'est également un atout pédagogique supplémentaire et important, puisqu'il devient plus facile d'expliquer que les fonctions d'asservissement ou de régulation reviennent toujours à imposer une trajectoire à chacune des variables d'énergie ou d'état du système. Toute commande en boucle fermée est systématiquement une action par retour d'état qui peut être directe ou indirecte, complète ou non selon, selon l'accessibilité aux grandeurs traduite par les notions d'observabilité et de commandabilité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J.P. RICHARD, F. ROTELLA,
I. ZAMBETTAKIS
Modélisation et identification des processus
Méthodes et Pratiques de l'Ingénieur - Editions Technip - Tomes 1 et 2 - 1992
- [2] S.J. MASON
Feedback Theory - Some properties of signal flows graphs
Proceedings IRE - 1953
- [3] J.L. LEMOIGNE
La modélisation des systèmes complexes
Dunod - 1990
- [4] J. FAUCHER, M. GRANDPIERRE
Les graphes informationnels de causalité
Application à la simulation des systèmes électriques
Journées du Club EEA Electrotechnique - Paris 1992
- [5] J.P. CARON, J.P. HAUTIER
Modélisation et commande de la machine asynchrone
Méthodes et Pratiques de l'Ingénieur - Editions Technip - 1995
- [6] P.J. BARRE, J.P. CARON, J.P. HAUTIER, M. LEGRAND
Systèmes automatiques
Tome 1 : Analyse et Modèles (à paraître fin 1995)
Tome 2 : Commande des Processus (à paraître 1996)
Editions Ellipses