

EXEMPLES D'OSCILLATEURS NON LINEAIRES

Michel Krob
IPEST, Tunisie

Nous présentons quelques expériences relatives à l'oscillateur de Van der Pol et à un oscillateur anharmonique en régime libre, en régime forcé et en régime chaotique.

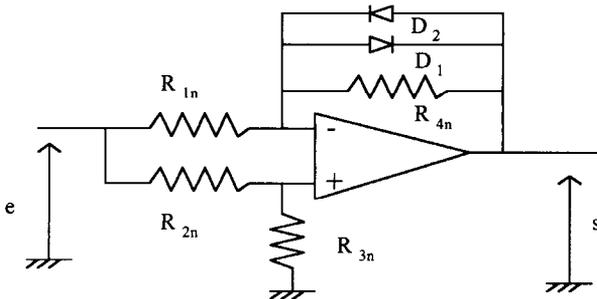
La mise en oeuvre expérimentale de ces oscillateurs non-linéaires se fait par des réalisations électroniques : on dispose ainsi de beaucoup de facilité dans le réglage des paramètres caractérisant ces oscillateurs.

Le fil conducteur de ces différentes expériences est d'insérer un circuit non-linéaire dont la caractéristique est modélisable par un polynôme de degré 3, dans un circuit de base constitué d'un double intégrateur à amplificateur opérationnel.

1. Réalisation d'une non-linéarité polynomiale cubique

1.1. Circuit de réalisation

Considérons le circuit suivant :



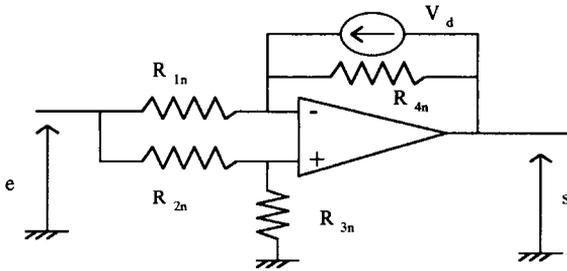
1.2. Analyse du circuit

Pour l'analyse de ce circuit, nous supposons que l'amplificateur opérationnel est idéal et que les diodes D_1 et D_2 identiques, sont caractérisées par la tension seuil V_d : nous les modélisons comme une impédance infinie pour les tensions V inférieures à V_d , et comme une impédance nulle pour $V = V_d$.

- **cas e de faible valeur** : en supposant que la tension d'entrée e du circuit soit suffisamment faible pour que la tension aux bornes des diodes soit inférieure en valeur absolue à V_d , les diodes sont équivalentes à des impédances infinies. L'application du théorème de Millmann au noeud situé au niveau de la borne inverseuse conduit alors à :

$$s = \left(\frac{R_{3n} R_{4n} + R_{1n}}{R_{1n} R_{2n} + R_{3n}} - \frac{R_{4n}}{R_{1n}} \right) e = \lambda e$$

- **cas $e > 0$ de forte valeur** : en supposant que la tension d'entrée e soit suffisamment grande pour que la diode D_1 soit modélisable par un générateur idéal de tension V_d et la diode D_2 par une impédance infinie, le circuit est alors équivalent à :



Il vient donc :

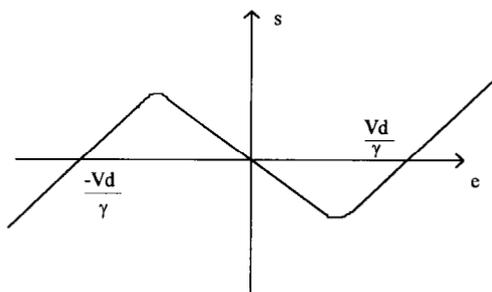
$$s = \frac{R_{3n}}{R_{2n} + R_{3n}} e - V_d = \gamma e - V_d$$

- **cas $e < 0$ de forte valeur absolue** : nous avons directement :

$$s = \gamma e + V_d$$

1.3. Caractéristique $s=f(e)$

La caractéristique est constituée de trois parties linéaires dont nous venons de déterminer les équations. Nous pouvons donc tracer cette caractéristique en lissant son allure aux endroits correspondant au passage régime bloqué-régime saturé des diodes (qui se fait plus continûment que dans nos hypothèses simplificatrices). Nous limitons dans l'ensemble de l'article au cas où $\lambda < 0$, l'allure est alors la suivante :



Elle est caractérisée par trois zéros : $\frac{V_d}{\gamma}$, 0 et $-\frac{V_d}{\gamma}$. La pente de cette caractéristique vaut λ à l'origine et γ en $e = \pm \frac{V_d}{\gamma}$. Nous pouvons donc considérer deux interpolations possibles de cette caractéristique par un polynôme impair de degré 3 :

- **modélisation A** : le polynôme de zéros $\frac{V_d}{\gamma}$, 0 et $-\frac{V_d}{\gamma}$ et de pente à l'origine égale à λ :

$$\begin{aligned} s &= \lambda e \left[1 - \left(\frac{\gamma}{V_d} \right)^2 e^2 \right] \\ &= \lambda e - \lambda \left(\frac{\gamma}{V_d} \right)^2 e^3 = \alpha_A e + \beta_A e^3 \end{aligned}$$

- **modélisation B** : le polynôme de zéros $\frac{V_d}{\gamma}$, 0 et $-\frac{V_d}{\gamma}$ et de pente égale à γ en $e = \pm \frac{V_d}{\gamma}$:

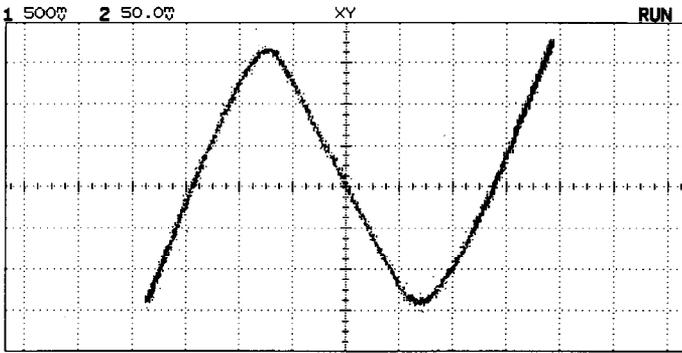
$$\begin{aligned} s &= \frac{\gamma}{1 - 3\frac{V_d}{\gamma}} e \left[1 - \left(\frac{\gamma}{V_d} \right)^2 e^2 \right] \\ &= \frac{\gamma}{1 - 3\frac{V_d}{\gamma}} e - \frac{\gamma \left(\frac{\gamma}{V_d} \right)^2}{1 - 3\frac{V_d}{\gamma}} e^3 = \alpha_B e + \beta_B e^3 \end{aligned}$$

1.4. Détermination expérimentale de $s = f(e)$

Nous prenons $R_{1n} = R_{2n} = R_{4n} = 1k\Omega$, $R_{3n} = 600\Omega$ et deux diodes 1N4002. Alors,

$$\lambda = \frac{R_{3n} R_{4n} + R_{1n}}{R_{1n} R_{2n} + R_{3n}} - \frac{R_{4n}}{R_{1n}} = -\frac{1}{4} \text{ et } \gamma = \frac{R_{3n}}{R_{2n} + R_{3n}} = \frac{3}{8}$$

Le relevé expérimental de la caractéristique $s = f(e)$ à l'oscilloscope en mode X-Y est le suivant :



caractéristique du circuit non-linéaire

Les valeurs (normalement opposées) des deux zéros $\pm \frac{V_d}{\gamma}$ non nuls sont donc :

$$\frac{V_d}{\gamma} = 1.4$$

Nous pouvons donner l'expression numérique des polynômes A et B :

- modélisation A :

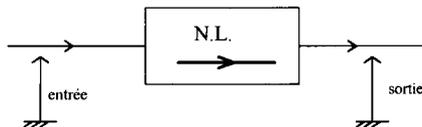
$$s = -\frac{4}{16}e + \frac{100}{784}e^3$$

- modélisation B :

$$s = -\frac{3}{16}e + \frac{75}{784}e^3$$

Une analyse plus fine du comportement du circuit se fait en calculant le spectre de $s(t)$ pour une entrée $e(t) = e \sin(\omega t)$: l'existence d'une partie quadratique dans la non-linéarité est alors mis en évidence.

Dans les schémas électriques suivant, nous remplacerons le circuit que nous venons d'étudier ($\lambda < 0$) par le symbole :



(la flèche indiquant le sens entrée-sortie) ; sa caractéristique sera notée $s = \alpha e + \beta e^3$ en précisant pour les applications numériques si la modélisation A ou B est employée.

2. Oscillateur de Van der Pol

2.1. Rappels

Il s'agit d'un oscillateur qui est non-linéaire par son amortissement ; il est décrit par l'équation différentielle suivante :

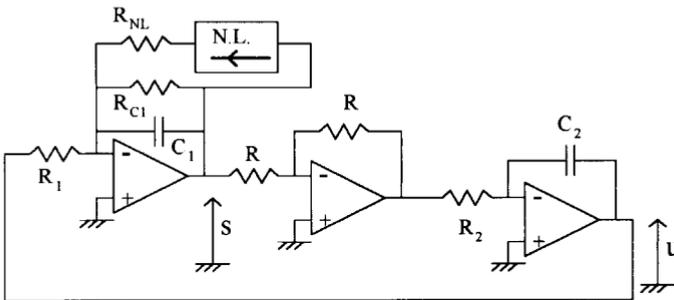
$$\frac{d^2s}{dt^2} - r(\varepsilon - s^2)\frac{ds}{dt} + \omega_0^2s = 0$$

où ε désigne une constante.

- Si $\varepsilon < \varepsilon_c = 0$, l'amortissement est positif quelque soit la valeur de s . Lâché d'une condition initiale $((\frac{ds}{dt})_{t=0}, s(0))$ quelconque, s converge rapidement vers 0.
- Si $\varepsilon > \varepsilon_c = 0$ avec $\varepsilon \ll 1$, le signe de l'amortissement dépend de la valeur de s . Si s est grand devant $\sqrt{\varepsilon}$, l'amortissement est positif et s tend à décroître. Si s est petit devant $\sqrt{\varepsilon}$, l'amortissement est négatif et s tend à croître. On peut montrer l'existence d'une oscillation sinusoïdale stable $s(t) = 2\sqrt{\varepsilon}\sin(\omega_0 t)$ qui se traduit par l'existence d'un cycle limite elliptique dans le plan de phase vers lequel le système converge quelque soit sa condition initiale.
- Si $\varepsilon \gg \varepsilon_c = 0$, le circuit est le siège d'oscillation de relaxation ; on peut montrer que leur période est proportionnelle à ε .

2.2. Analyse de la réalisation pratique

Considérons le circuit suivant :



Pour simplifier son analyse, omettons tout d'abord les résistances R_{NL} , R_{C1} et le circuit non-linéaire : ce circuit est un simple oscillateur harmonique non amorti décrit par :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} s = 0$$

Le fait de rajouter une résistance R_{C1} conduit à rajouter un terme d'amortissement dans le système :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{R_{C1}C_1} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} s = 0$$

Enfin, le rajout de R_{NL} et du circuit non-linéaire de caractéristique $s = \alpha e + \beta e^3$ le transforme en oscillateur de Van der Pol :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{\alpha}{R_{NL}} + \frac{3\beta}{R_{NL}} s^2 \right) \frac{ds}{dt} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} s = 0$$

D'après ce qui précède, le système est le siège d'oscillations dès que $\frac{1}{R_{C1}} + \frac{\alpha}{R_{NL}} \leq 0$, soit :

$$R_{NL} \leq -\alpha R_{C1}$$

Pour des valeurs de R_{NL} proches de $-\alpha R_{C1}$, les oscillations sont sinusoïdales d'amplitude égale à :

$$2\sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}}$$

Par contre, pour des valeurs plus proches de $0k\Omega$, la période des oscillations de relaxation est proportionnelle à :

$$T_{relax} = -\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}$$

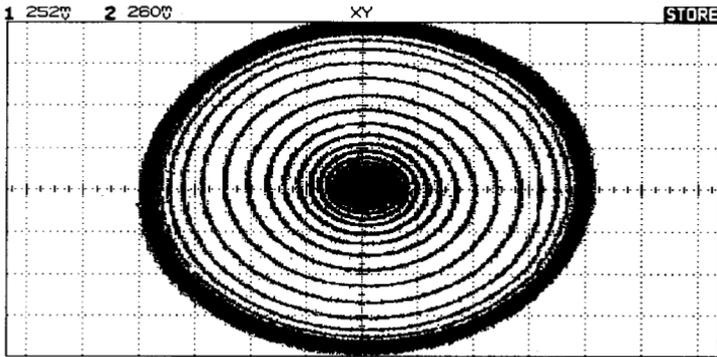
2.3. Partie expérimentale

Nous avons réalisé le circuit avec :

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 &= 0,1\mu F \\ R_1 = R_2 &= 10k\Omega \\ R &= 1k\Omega \\ R_{C1} &= 100k\Omega \\ R_{1n} = R_{2n} = R_{4n} &= 1k\Omega \\ R_{3n} &= 600\Omega \end{aligned}$$

et R_{NL} est une résistance réglable entre $[0k\Omega; 30k\Omega]$; notons que R_{C1} doit être choisie de manière à être négligeable devant la résistance de fuite de C_1 .

Nous désirons mettre en évidence le démarrage des oscillations. Lors du démarrage (condition initiale $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = 0$ et $s(0) = 0$), la caractéristique $s = \alpha e + \beta e^3$ va être décrite sur sa partie de pente négative correspondant à un amortissement négatif de l'oscillateur : il convient donc pour bien décrire ce phénomène de prendre la modélisation A (soit $\alpha_A = -4/16$ et $\beta_A = 100/784$). Expérimentalement, le démarrage des oscillations a lieu pour $R_{NL} = 24k\Omega$, ce qui confirme notre choix de modélisation car $-\alpha_A R_{C1} = 25k\Omega \simeq 24k\Omega$ ($\neq -\alpha_B R_{C1} = 19k\Omega$) :



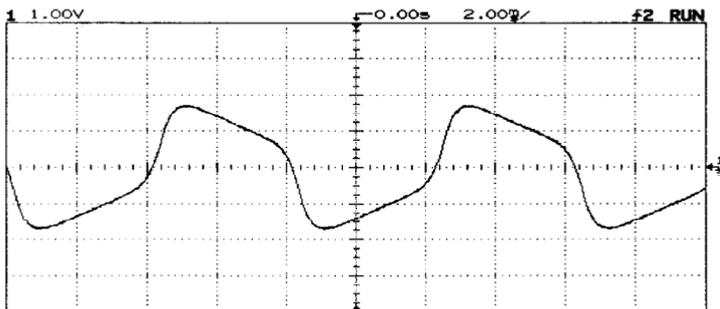
Démarrage des oscillations dans le plan de phase

Nous avons vérifié à l'analyseur de spectre que les oscillations sont bien sinusoïdales pour $R_{NL} \in [15k\Omega; 24k\Omega]$ à une fréquence égale à $158Hz$ (ce qui correspond à la valeur théorique $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$). Nous avons relevé l'amplitude de cette sinusoïde pour différentes valeurs de R_{NL} ; elle vérifie approximativement la loi prévue :

R_{NL}	$22k\Omega$	$21k\Omega$	$20k\Omega$	$19k\Omega$	$18k\Omega$	$17k\Omega$	$16k\Omega$	$15k\Omega$
amplitude théorique	.56	.65	.72	.79	.85	.91	.96	1.02
amplitude mesurée	.71	.76	.81	.85	.89	.93	.97	1.01

les écarts pouvant certainement s'expliquer par la mauvaise qualité de la modélisation de la caractéristique du circuit non-linéaire près des deux points à tangentes nulles (s proche de $\pm V_d$).

Pour $R_{NL} < 10k\Omega$, le signal $s(t)$ est de moins en moins sinusoïdal à mesure que R_{NL} tend vers 0Ω : nous avons relevé expérimentalement l'allure suivante :



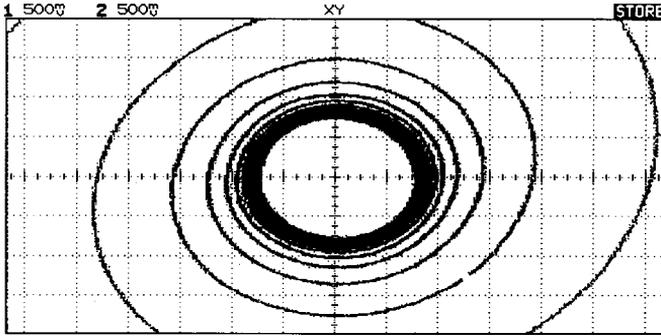
oscillations de relaxation

Nous n'avons pas pu mettre clairement en évidence que la période des oscillations de relaxation est proportionnelle à $\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}$ pour des faibles valeurs de R_{NL} . Nous pensons expliquer cet écart en tenant compte de la résistance de fuite $R_{f2} \simeq 1M\Omega$ de la capacité C_2 ; alors, l'équation régissant le circuit est :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{C}{R_{f2}C_2} - \frac{\alpha}{R_{NL}} + \frac{3\beta}{R_{NL}} s^2 \right) \frac{ds}{dt} + \left(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} + \frac{1}{R_{C1} R_{f2} C_1 C_2} - \frac{\alpha}{R_{NL} R_{f2} C_1 C_2} + \frac{\beta}{R_{NL} R_{f2} C_1 C_2} s^2 \right) s = 0$$

Donc, l'oscillateur est non seulement non linéaire par son amortissement, mais encore et surtout par sa force de rappel; l'influence du rappel non linéaire ne se fait raisonnablement sentir que pour les faibles valeurs de R_{NL} où justement l'on a du mal à mettre en évidence la loi de proportionnalité de la période des oscillations.

Nous visualisons l'ensemble de ces phénomènes dans le plan de phase en connectant les tensions s et $u = -\frac{1}{R_2 C_2} \int s$ sur l'oscilloscope. Il est possible de lâcher le système avec des conditions initiales réglables en court-circuitant l'entrée inverseuse de l'intégrateur $R_1 C_1$ avec la masse, ou en court-circuitant la sortie s avec la masse; expérimentalement, nous avons obtenu :



convergence vers un cycle limite elliptique

3. Oscillateur anharmonique en régime libre

3.1. Rappels

Considérons l'oscillateur anharmonique décrit par l'équation :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + r \frac{ds}{dt} + \delta s + \lambda s^3 = 0$$

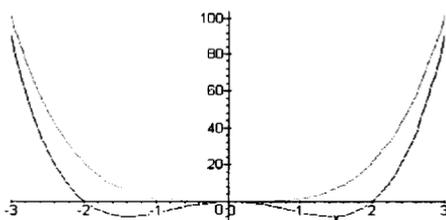
Le potentiel dont dérive la force de rappel vaut :

$$V(s) = \frac{1}{2} \delta s^2 + \frac{1}{4} \lambda s^4$$

Selon le signe de δ et λ , ce potentiel ne présente pas la même allure :

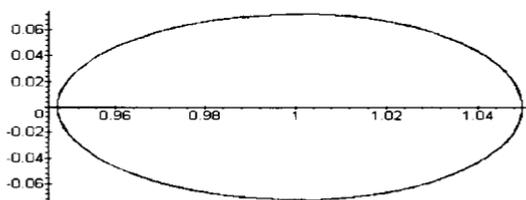
- si $\delta > 0$ et $\lambda > 0$, l'oscillateur présente un unique point d'équilibre stable $s = 0$ vers lequel converge nécessairement le système quelque soit sa condition initiale.
- si $\delta < 0$ et $\lambda > 0$, l'oscillateur présente un point d'équilibre instable $s = 0$ et deux points d'équilibre stables $\pm\sqrt{-\frac{\delta}{\lambda}}$: il s'agit d'un potentiel à deux puits. Selon les conditions initiales, le système converge vers l'une des deux positions stables.

Ainsi, les deux allures possibles de $V(s)$ sont représentées sur même graphe :



Nous nous intéressons dans la suite au cas du potentiel à deux puits. L'équation différentielle régissant l'oscillateur n'a pas de solution analytique explicite bien que cette dernière puisse cependant être approchée par une méthode dite des perturbations. Nous avons étudié numériquement cet oscillateur sur Maple dans le cas où il est non amorti : $\delta = -1$, $\lambda = 1$ et $r = 0$; on distingue plusieurs allures du plan de phase correspondant à des situations physiques différentes :

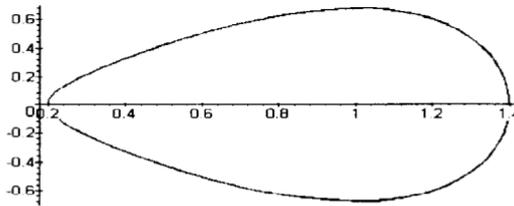
- **allure (I)** : l'oscillateur évolue périodiquement dans l'un des deux puits (correspondant ici à la position d'équilibre $+1$), mais est très proche de la position d'équilibre. La trajectoire dans le plan de phase est elliptique :



conditions initiales : $s(0)=1.05$ et vitesse nulle

Elle correspond à de petites oscillations quasi-sinusoïdales autour +1 (de pulsation $\sqrt{2}$).

- **allure (II)** : l'oscillateur évolue périodiquement dans l'un des deux puits (correspondant ici à la position d'équilibre +1), mais loin de la position d'équilibre. La trajectoire dans le plan de phase n'est plus elliptique :



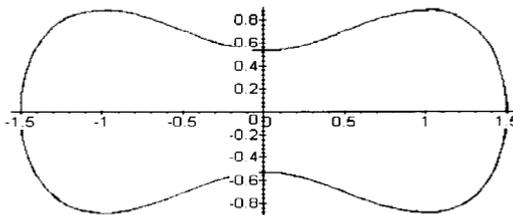
conditions initiales : $s(0)=1.4$ et vitesse nulle

L'oscillation est donc anharmonique. Pour mieux décrire l'évolution de s dans le puits de droite, effectuons le changement de variable $z = s - 1$, l'équation se réécrit :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2z + 3z^2 + z^3 = 0$$

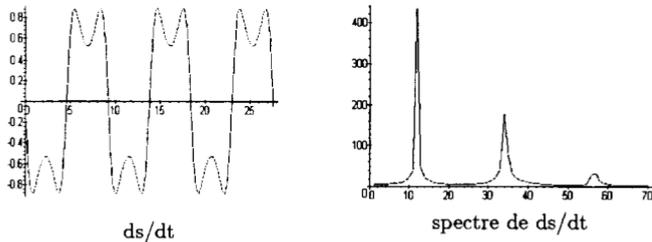
La non-linéarité n'ayant pas de parité particulière, l'application de la méthode des perturbations à cette équation conduit à dire que $s(t)$ est égale à $\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos(n\omega t)$ où η est une constante très proche +1 (mais dépendant, en toute rigueur, entre autres de $s(0)$). Notons que $\langle s(t) \rangle = \eta$.

- **allure (III)** : l'oscillateur non amorti chevauche périodiquement les deux puits, la trajectoire dans le plan de phase est la suivante :



conditions initiales : $s(0)=1.5$ et vitesse nulle

L'oscillation est visiblement fortement anharmonique. Nous donnons l'allure de $\frac{ds}{dt}$ et son spectre :



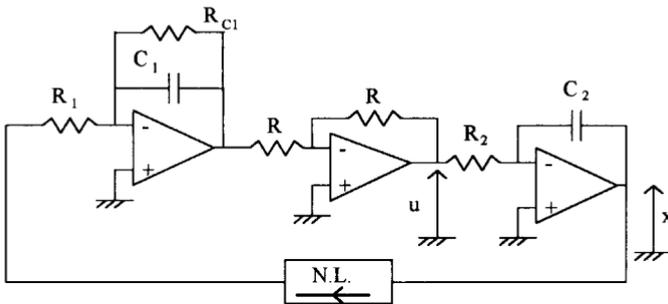
Remarquons que le spectre de $\frac{ds}{dt}$ laisse à penser que $s(t)$ est du type $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \cos((2n + 1)\omega t)$, $n = 0, \dots, \infty$ ce qui est cohérent avec le caractère impair de la non linéarité $-s + s^3$. Notons que $\langle s(t) \rangle = 0$.

3.2. Réalisation expérimentale du potentiel à deux puits

Pour réaliser l'oscillateur dans un potentiel à deux puits vérifiant :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + \delta x + \lambda x^3 = 0$$

avec $\delta < 0$ et $\lambda > 0$, le circuit non linéaire est tout simplement placée de la manière suivante :



L'équation différentielle qui régit le circuit est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{R_2 C_2} \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} x + \frac{\beta}{R_1 R_2 C_1 C_2} x^3 = 0$$

Il est réalisé avec les valeurs suivantes :

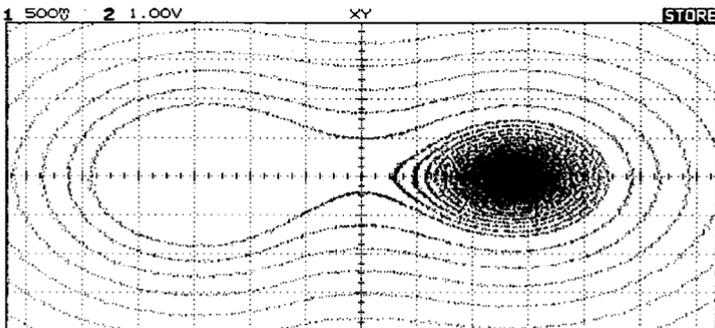
$$\begin{aligned}
 R &= R_1 &= 1k\Omega \\
 R &= R_1 &= 10\mu F \\
 R_2 &&= 10k\Omega \\
 R_{C1} &&= 1M\Omega \\
 R_{1n} = R_{2n} = R_{4n} &= 1k\Omega \\
 R_{3n} &&= 600\Omega
 \end{aligned}$$

Notons bien qu'il est impossible d'annuler l'amortissement en raison la résistance de fuite de C_1 .

3.3. Plan de phase

La visualisation du plan de phase se fait en connectant $u = -R_2 C_2 \frac{dx}{dt}$ et x à l'oscilloscope. La dynamique du système peut être accélérée ou ralentie en jouant sur la capacité C_1 ou la résistance R_{C1} . Des conditions initiales différentes sont obtenues soit en court-circuitant la tension x avec la masse, soit en court-circuitant l'entrée inverseuse de l'intégrateur R_2, C_2 avec la masse.

Expérimentalement, nous avons relevé le plan de phase dans un cas faiblement amorti :



convergence dans le plan de phase vers une position d'équilibre stable

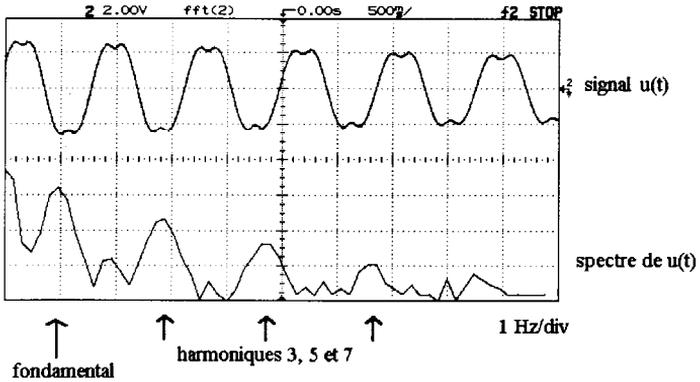
On y distingue bien les trois allures (I), (II) et (III) (au phénomène d'amortissement près) dont nous avons discuté précédemment.

3.4. Analyse fréquentielle

Nous désirons déterminer le spectre du signal $s(t)$ pour les allures (II) et (III). Or, le signal $s(t)$ n'est pas stationnaire car il est impossible d'annuler l'amortissement de l'oscillateur. Expérimentalement, nous avons pris soin de prendre un amortissement très faible, et nous avons préféré faire notre analyse sur le signal

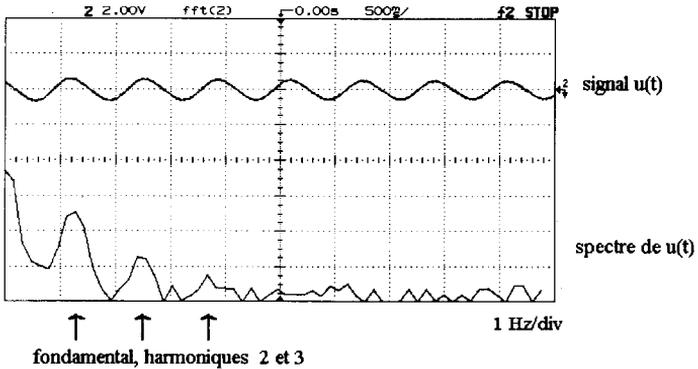
$u = -R_2 C_2 \frac{dx}{dt}$, ce qui ne change en rien la répartition spectrale des pulsations non nulles. Ainsi, nous avons obtenu :

- pour l'allure (III), le spectre suivant :



Le signal $u(t)$ est légèrement amorti ; le spectre contient bien un fondamental et des harmoniques impairs de façon prépondérante.

- pour l'allure (II), le spectre suivant :



Le signal $u(t)$ est légèrement amorti ; le spectre contient bien un fondamental et des harmoniques pairs et impairs.

4. Oscillateur anharmonique en régime forcé

4.1. Rappels

Considérons l'oscillateur anharmonique précédant, mis en régime forcé :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + \delta x + \lambda x^3 = \Gamma \cos(\omega t)$$

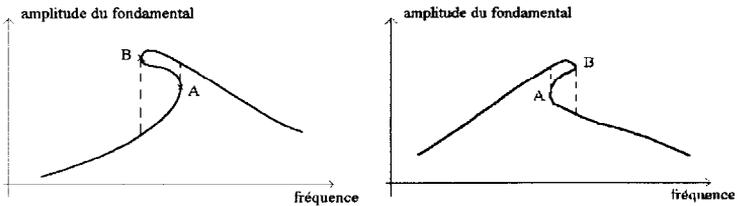
avec $\delta < 0$ et $\lambda > 0$. Supposons que Γ soit suffisamment faible pour que l'oscillateur reste confiné dans un des deux puits, par exemple celui qui correspond à la position d'équilibre $\sqrt{-\frac{\delta}{\lambda}}$. Effectuons le changement de variable :

$$z = x - \sqrt{-\frac{\delta}{\lambda}}$$

pour étudier la dynamique du système au voisinage de la position d'équilibre ; l'équation différentielle du système devient :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + r \frac{dz}{dt} - 2\delta z + 3\sqrt{-\lambda\delta}z^2 + \lambda z^3 = \Gamma \cos(\omega t)$$

Au voisinage de la pulsation $\sqrt{-2\delta}$, la courbe de résonance de cet oscillateur, c'est à dire l'amplitude du fondamental de z en fonction de la fréquence d'excitation, peut, sous certaines conditions, se présenter sous une des deux formes indiquées ci-dessous :



Les parties des courbes comprises entre les points A et B correspondent à des solutions instables de l'équation différentielle ; le relevé expérimental de cette courbe fait donc apparaître un phénomène de saut, correspondant à un hystérésis matérialisé par les traits pointillés.

L'équation théorique de cette courbe de résonance s'obtient en recherchant une solution de l'équation différentielle sous la forme :

$$x(t) = c + a \cos \omega t + b \sin(\omega t)$$

En reportant dans l'équation différentielle et identifiant entre eux les termes constants, les termes en $\cos(\omega t)$ et en $\sin(\omega t)$, on obtient l'équation :

$$\Gamma^2 = \rho^2 \left[\left(-2\delta - \omega^2 - \frac{15}{4} \lambda \rho^2 \right) + r^2 \omega^2 \right] \text{ avec } \rho^2 = a^2 + b^2$$

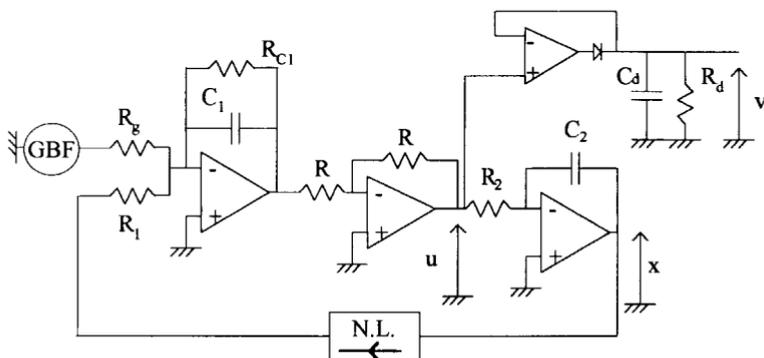
$$c^2 = -\frac{\delta}{\lambda} - \frac{3}{2} \rho^2$$

qui, selon les valeurs δ , λ , r et Γ , correspond à l'allure ci-dessus.

4.2. Réalisation expérimentale

Nous nous proposons de mettre en évidence expérimentalement la courbe de résonance dans le cas où elle présente un hystérésis.

Nous reprenons le schéma du chapitre précédent en y adjoignant un GBF, et une détection de crête réalisée avec une diode sans seuil pour la visualisation sur l'oscilloscope :



Nous choisissons, pour des raisons expérimentales, de visualiser le phénomène d'hystérésis sur le signal $u(t) = -R_2 C_2 \frac{dx}{dt}$ plutôt que sur $x(t)$. L'équation différentielle régissant le circuit est alors :

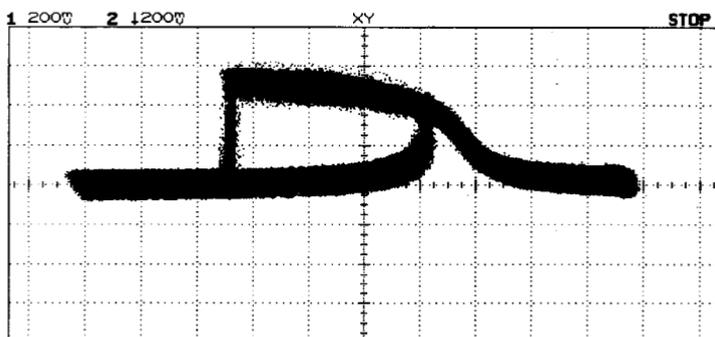
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{R_C C_1} \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} x + \frac{\beta}{R_1 R_2 C_1 C_2} x^3 = \frac{1}{R_g R_2 C_1 C_2} e$$

où $e(t)$ désigne la sortie du GBF. En toute rigueur, nous devrions filtrer le signal $u(t)$ pour n'en récupérer que le fondamental avant d'attaquer le détecteur de crête ; les résultats expérimentaux obtenus montre que l'on peut se passer de cette opération supplémentaire.

Nous avons réalisé ce circuit avec

$$\begin{aligned}
 R_1 = R_2 = R &= 1k\Omega \\
 R_g &= 500k\Omega \\
 R_{C1} &= 100k\Omega \\
 C_1 = C_2 &= 0.1\mu F \\
 R_{1n} = R_{2n} = R_{4n} &= 1k\Omega \\
 R_{3n} &= 600\Omega
 \end{aligned}$$

La détection de crête est réalisée avec $R_d = 80k\Omega$ et $C_d = 1\mu F$. L'amplitude de e est d'environ $5V$, le GBF est wobulé entre $500Hz$ et $1000Hz$ par un tension triangulaire symétrique de fréquence égale à $0.1Hz$. Le réglage est délicat : il ne faut pas hésiter à jouer sur les valeurs de R_g , R_{C1} et e . En plaçant la tension triangulaire sur la voie X de l'oscilloscope et la tension de sortie du détecteur de crête $v(t)$ sur la voie Y , nous avons visualisé l'hystérésis suivant :



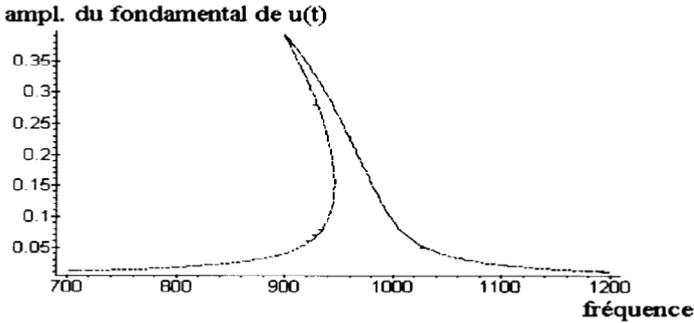
allure expérimentale de l'hystérésis

4.3. Comparaison des courbes de résonance

Nous souhaitons comparer la courbe expérimentale à celle décrite par l'équation $\Gamma^2 = \rho^2 \left[(-2\delta - w^2 - \frac{15}{4}\lambda\rho^2) + r^2w^2 \right]$. L'évolution du système se faisant au voisinage de la position d'équilibre $\sqrt{-\frac{\delta}{\lambda}}$, nous prenons pour les applications numériques la modélisation B du circuit non linéaire. En identifiant l'équation ci-dessus avec $\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + \delta x + \lambda x^3 = \Gamma \cos(\omega t)$, il vient :

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{\alpha_B}{R_1 R_2 C_1 C_2} = -1.875 \cdot 10^7 \\
 \lambda &= \frac{\beta_B}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 9.566 \cdot 10^6 \\
 \Gamma &= \frac{1}{R_g R_2 C_1 C_2} e = 2 \cdot 10^5 e
 \end{aligned}$$

et $r = 100$. Nous obtenons numériquement la courbe suivante pour $e = 1.1 V$:



allure théorique de l'hystérésis

Elle présente bien la même allure que la courbe expérimentale, l'intervalle de fréquence sur lequel s'observe l'hystérésis est $[900\text{Hz}; 1000\text{Hz}]$ alors que l'expérience conduit à $[650\text{Hz}; 750\text{Hz}]$. Expérimentalement, nous avons également relevé la valeur critique de e à partir de laquelle le phénomène d'hystérésis apparaît : $e_{crit} \simeq 3V$ alors que le tracé numérique de la courbe conduit à $e_{crit} \simeq 1V$. Les ordres de grandeurs sont donc respectés ; nous pensons pouvoir expliquer ces légers écarts par la mauvaise qualité de la modélisation de la caractéristique du circuit non-linéaire près des deux points à tangentes nulles.

5. Oscillateur anharmonique : transition vers le chaos

5.1. Explications

Le système considéré est décrit par :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + \delta x + \lambda x^3 = \Gamma \cos(\omega t)$$

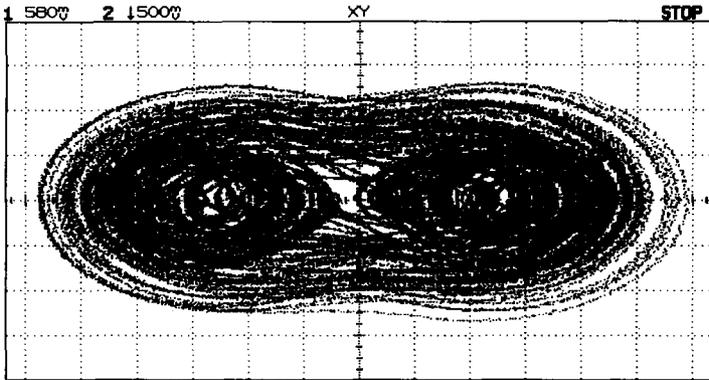
Considérons le vecteur $\mathbf{m} = (y, x, \phi)^T$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r \frac{dx}{dt} - \delta x - \lambda x^3 + \Gamma \cos(\omega \phi) \\ \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{d\phi}{dt} &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, le plan de phase est de dimension 3 car \mathbf{m} est le vecteur d'état de dimension minimale tel que le système soit décrit par une équation du type $\frac{d\mathbf{m}}{dt} = F(\mathbf{m})$. En visualisant x et sa dérivée $\frac{dx}{dt}$ à l'oscilloscope comme l'indique le montage du

chapitre précédent, nous avons accès à la projection de la trajectoire dans le plan de phase sur un sous-espace de dimension 2.

Si l'oscillateur est excité par une excitation d'amplitude Γ beaucoup plus importante que celle de la partie précédente, le signal $x(t)$ semble passer de manière aléatoire d'un puits de potentiel à l'autre alors que le système considéré est purement déterministe. Nous avons obtenu expérimentalement cette projection de la trajectoire dans le plan de phase :



comportement chaotique de l'oscillateur anharmonique

Il s'agit là d'un comportement chaotique.

Nous nous proposons d'illustrer expérimentalement à l'aide du montage précédent un type de transition vers un comportement chaotique que l'on appelle cascade sous-harmonique :

- Pour certaines valeurs des paramètres de l'oscillateur anharmonique, nous avons constaté que dès que Γ a dépassé une certaine valeur, $x(t)$ a une période égale au double de la période d'excitation $T_e = \frac{2\pi}{\omega}$, puis en continuant à augmenter Γ , on passe à $4T_e$, puis à $8T_e$ jusqu'à obtenir un comportement aperiodique avec impossibilité de synchroniser le signal à l'oscilloscope.
- Au niveau du spectre de $x(t)$, cela se traduit par l'apparition remarquable de sous-harmoniques jusqu'à obtenir finalement un spectre comprenant des parties plates caractéristiques des bruits blancs.
- Au niveau du plan de phase dont on ne voit qu'une projection, on passe d'un cycle limite, au dédoublement de ce cycle, puis au quadruplement du cycle jusqu'à obtenir un mouvement chaotique comme l'indique la figure ci-dessus.

5.2. Réalisation pratique

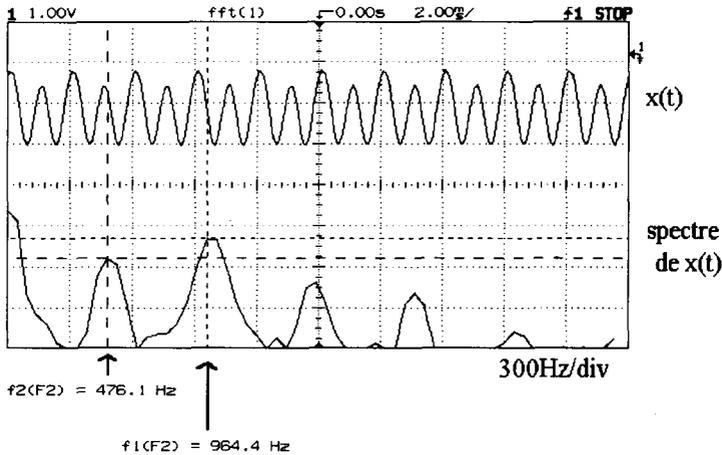
Reprenons le montage précédent en retirant la détection de crête. Les valeurs sont :

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = R &= 1k\Omega \\ C_1 = C_2 &= 0.1\mu F \\ R_{C1} &= 50k\Omega \\ R_g &= 10k\Omega \\ R_{1n} = R_{2n} = R_{4n} &= 1k\Omega \\ R_{3n} &= 600\Omega \end{aligned}$$

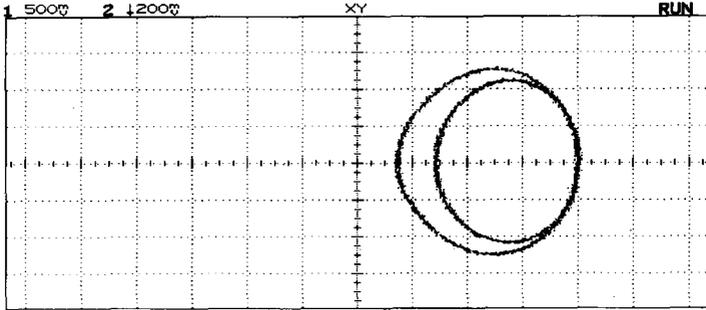
La résistance R_g est cinquante fois plus faible que lors la manipulation précédente, ce qui revient à augmenter cinquante fois l'amplitude de l'excitation.

Nous avons excité l'oscillateur avec une sinusoïde de fréquence $1kHz$ en augmentant progressivement l'amplitude e du GBF en partant de $0V$. Nous avons visualisé la cascade sous-harmonique et le comportement chaotique pour des valeurs de e de l'ordre du Volt. Il est intéressant d'analyser l'évolution de la dynamique du système successivement dans le plan de phase, dans le domaine temporel et dans le domaine spectral.

Expérimentalement, le doublement de période s'est traduit au niveau temporel et spectral par les relevés suivants :

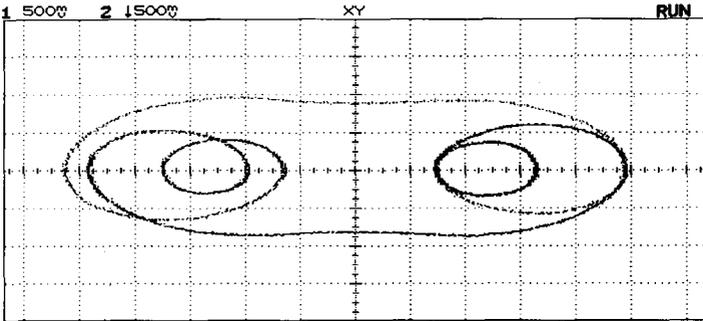


Nous notons bien l'apparition dans le spectre de $x(t)$ d'une fréquence sous-harmonique égale à $476.1Hz$ qui correspond approximativement au $500Hz$ cherché, la résolution de l'analyseur de spectre expliquant certainement l'écart ; la présence d'harmoniques quant à elle ne doit pas nous étonner. Au niveau du plan de phase, nous obtenons de manière analogue :



doublement de période dans le plan de phase

Concluons en donnant le plan de phase d'une situation expérimentale qui correspond à la présence de plusieurs sous-harmoniques :



cascade sous-harmonique dans le plan de phase

6. Références

MATHIEU	Vibrations et phénomènes de propagation	Masson, 1974
WILLAIME	Particule dans un potentiel à deux puits	Ecole Polytechnique, 1995
LANDAU	Mécanique	Mir, 1982
KORSCH	Chaos	Springer-Verlag, 1994
BERGE	L'ordre dans le chaos	Hermann, 1984
JORDAN	Nonlinear ordinary differential equations	Oxford University Press, 1987