

LE CADRE GEOMETRIQUE DES INTERACTIONS FONDAMENTALES

Vincent BOURGES
IPEST BP 51 -2070 La Marsa - Tunisie

Résumé : On peut donner une explication géométrique aux interactions fondamentales en attribuant aux particules un espace interne; le cadre géométrique des interactions devient alors un espace fibré. La dérivée ordinaire est remplacée par la dérivée covariante, et les transformations de jauge correspondent alors simplement à des changements de base dans l'espace interne, donnant ainsi une explication cohérente aux interactions.

De la physique classique à la physique quantique.

Le cadre géométrique de la physique classique est, comme chacun sait, l'espace euclidien à trois dimensions auquel il faut ajouter le temps, absolu et indépendant de l'observateur. Une particule est caractérisée par sa masse ; elle est ponctuelle (ceci est valable également pour un milieu continu tel qu'un solide ou un fluide qui ne sont jamais qu'un ensemble continu de points). Ses propriétés (position, vitesse, quantité de mouvement, moment cinétique...) sont spatio-temporelles : mise à part la masse, elles ne font intervenir que les propriétés de l'espace et du temps.

Mais on sait bien que les particules présentent une foule d'autres propriétés et qu'elles sont soumises aux quatre interactions fondamentales : gravitation, interactions électromagnétique et faible regroupées sous le nom d'électrofaible et interaction forte. Pour les expliquer en physique classique, il faut transformer les interactions en forces qui, à ce stade, paraissent tout à fait arbitraires (forces à distance sans support et instantanées) et inadaptées.

Il fallait donc changer de cadre et ce programme fut accompli par la révolution quantique. De nos jours, la mécanique classique (bien que très utile dans son domaine d'application) est cernée de toutes parts : à une vitesse non négligeable devant la vitesse de la lumière, elle doit céder la place à la mécanique relativiste ; pour les objets petits caractérisés par une grandeur de type action (énergie×temps) de l'ordre de la constante de Planck, (et c'est le cas pour toute la physique atomique) on doit passer à la physique quantique ; enfin, pour les objets complexes et même pour le problème à trois corps, le mouvement est de type chaotique et la mécanique classique perd rapidement tout pouvoir de prédiction.

Le cas de l'électromagnétisme.

Pourquoi, pourrait-on dire, ne pas avoir parlé de l'électromagnétisme dans la physique classique, puisque Maxwell en avait donné les lois bien avant la venue d'Einstein sur la scène de la physique : c'est que les équations de Maxwell sont des équations *relativistes*, que le cadre naturel de ces équations est le cadre relativiste, et que la formulation simple de ces équations est une formulation tensorielle dans l'espace-temps (le tenseur électromagnétique qui regroupe les champs électrique et magnétique) ; c'est d'ailleurs la raison pour laquelle les lois de l'électromagnétisme sont si compliquées et difficiles à résoudre dans le cadre classique qui n'est pas fait pour elles ! Avec Einstein, le cadre naturel de la physique devient l'espace-temps à 4 dimensions de Minkowski, où l'électromagnétisme trouve sa place naturelle. Néanmoins les phénomènes électriques n'ont pas de signification géométrique et se superposent sans véritable explication aux phénomènes mécaniques.

Passage au quantique.

Le passage à la physique quantique implique de profonds changements. On renonce à la notion de localisation de la particule ; celle-ci ne sera plus ponctuelle, mais décrite par une fonction d'onde, ou vecteur d'état, définie dans l'espace entier, l'interprétation physique étant que le carré du module de la fonction d'onde représente la densité de présence de la particule au point considéré.

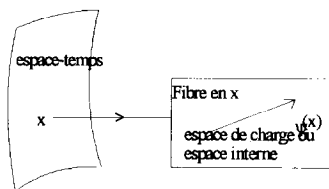
Un autre changement essentiel est que la fonction d'onde est une fonction *complexe*, qui va mélanger les aspects ondulatoire et corpusculaire. En effet, un nombre complexe est défini par un module et une phase, et qui dit phase en physique dit le plus souvent ondes, interférences et diffraction. La physique quantique est une physique de nombres complexes.

L'évolution de la fonction d'onde se fait conformément à l'équation de Schrödinger pour une particule non relativiste.

Les interactions en physique quantique.

Dans l'espace-temps, la formulation des lois physiques doit être covariante, c'est-à-dire qu'elle exprime l'égalité entre deux êtres géométriques de même nature : scalaires, vecteurs ou tenseurs. Ces êtres géométriques se définissent par leur loi de transformation lorsque l'on effectue un changement de base de l'espace-temps : si U est la matrice de changement de base, un scalaire reste invariant, un vecteur se transforme suivant $X' = UX$, un opérateur linéaire, tenseur d'ordre deux, suivant $A' = UAU^{-1}$. Afin d'avoir une écriture automatique des indices, on distingue les composantes contravariantes (indices en haut) et covariantes (indices en bas).

L'explication des interactions en physique quantique par les *théories de jauge* va généraliser cette demande dans un cadre géométrique élargi. Dorénavant, la particule ne va pas se suffire de l'espace-temps : elle va posséder son propre espace, son espace personnel, appelé *espace interne*, ou *espace de charge*, défini en chaque point.



La fonction d'onde $\psi(x)$, ou plus généralement le vecteur d'état de la particule, (noté $|x\rangle$ dans la notation de Dirac), va devenir un vecteur de l'espace interne qui pourra être à plusieurs dimensions ; la physique de la particule devra être indépendante de la base choisie dans l'espace interne, ce qui revient à dire que la formulation devra être covariante dans l'espace interne et que les lois physiques feront intervenir des êtres géométriques de même nature de l'espace interne ; c'est de cette demande, et de l'imbrication des structures de l'espace-temps et de l'espace interne que vont sortir les interactions.

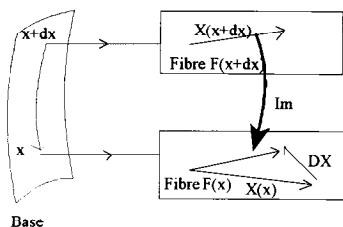
Mathématiquement, il s'agit là d'un *espace fibré vectoriel*.

Espace fibré vectoriel et connexion linéaire.

L'espace naturel de la physique devient, avec la physique quantique et les théories de jauge, un espace fibré vectoriel : celui-ci comprend une *base*, qui est l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte ; en chaque point x de la base, on introduit une fibre, qui est un espace vectoriel, $F(x)$, de dimension N , en général complexe : c'est l'espace interne, ou espace de charge de la particule au point de l'espace-temps considéré. L'état physique local de la particule est décrit par sa fonction d'onde, ou vecteur d'état, qui est un vecteur $X(x)$ de la fibre $F(x)$. On utilise une base $\{\vec{e}_a(x)\}$ de $F(x)$, avec $a = 1, 2, \dots, N$.

Avec cette introduction, il est nécessaire, pour construire une théorie physique, de pouvoir comparer les états physiques en des points de l'espace-temps différents, c'est-à-dire de pouvoir comparer des vecteurs de fibres différentes : c'est le rôle de la *connexion linéaire*.

La connexion linéaire permet de projeter le vecteur $X(x+dx)$ de la fibre $F(x+dx)$ sur la fibre $F(x)$; cette projection, ou "image", notée $Im(X(x+dx))$ est un vecteur de $F(x)$ qui représente, en x , un état physique identique à celui représenté par $X(x+dx)$ en $x+dx$. La connexion est supposée linéaire, et elle est donc



complètement définie lorsqu'on se donne l'image en x des vecteurs de base de $F(x+dx)$.

$$\text{Im}[\bar{e}_a(x+dx)] = \bar{e}_a(x) + \Gamma_{a\mu}^b(x) dx^\mu \bar{e}_b(x),$$

les coefficients $\Gamma_{a\mu}^b(x)$ sont les coefficients de la connexion linéaire qui définissent l'opération Im au premier ordre en dx . On a alors, au premier ordre en dx ,

$$\text{Im}[X^a(x+dx)\bar{e}_a(x+dx)] = X^a(x+dx)\bar{e}_a(x) + \Gamma_{a\mu}^b dx^\mu X^a(x)\bar{e}_b(x)$$

où l'on a remplacé dans le dernier terme $X^a(x+dx)$ par $X^a(x)$ en négligeant le terme du deuxième ordre. On remarquera le jeu automatique des indices, les indices intermédiaires se retrouvant toujours en haut et en bas et impliquant une somme sur les indices (convention d'Einstein), et un indice unique dans le membre de gauche devant se retrouver à la même place dans le membre de droite. La connexion permet de tenir compte de la variation des vecteurs de base lorsque l'on change de fibre.

La dérivée covariante.

On définit la *différentielle absolue* DX par

$$DX = \text{Im}[X(x+dx)] - X(x)$$

En utilisant l'expression de $\text{Im}[X(x+dx)]$ donnée plus haut et en notant

$dX = (X^a(x+dx) - X^a(x))\bar{e}_a(x) = dX^a \bar{e}_a$ la différentielle (ordinaire) de X , on obtient, avec $DX = D_\mu X dx^\mu$,

$$D_\mu X = \partial_\mu X + \Gamma_{a\mu}^b X^a \bar{e}_b = \partial_\mu X + \Gamma_\mu X$$

avec $\Gamma_\mu X = (\Gamma_\mu^a X^a) \bar{e}_a = \Gamma_{b\mu}^a X^b \bar{e}_a$, soit $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$

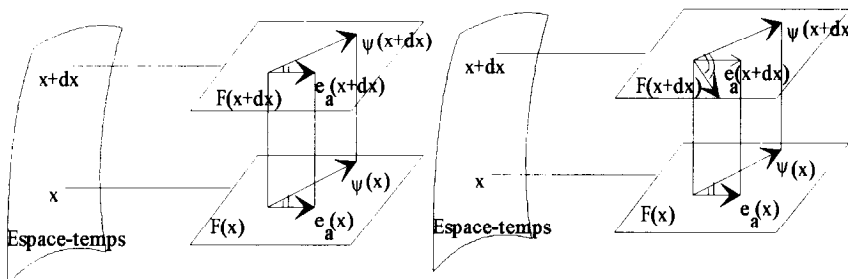
$D_\mu X$ est la *dérivée covariante* de X où l'on tient compte à la fois des changements du vecteur (c'est le rôle de ∂_μ qui s'occupe de la variation lorsque il n'y a pas de changement dans les vecteurs de base) et des changements des vecteurs de base lorsque l'on passe d'une fibre à l'autre (c'est le rôle de Γ_μ qui s'occupe uniquement des variations des vecteurs de base).

La dérivée covariante va remplacer la dérivée dans les lois de la physique lorsqu'il y a interaction, l'interaction se manifestant par l'intermédiaire de la connexion.

Γ_{μ} a une structure de vecteur de l'espace-temps ; c'est le vecteur- champ de la connexion, ou, dans le langage de la physique des particules, le *champ de jauge* de l'interaction. Ce qu'il faut noter ici est que le champ de jauge a une double structure, à la fois dans l'espace-temps et dans l'espace de charge ; étant un vecteur de l'espace-temps, la particule intermédiaire de l'interaction sera une particule vectorielle de spin 1 (comme le photon). Il n'a par contre pas de structure géométrique intrinsèque dans la fibre et dépend donc de la base choisie dans la fibre comme nous allons le voir.

Si l'on déplace un vecteur le long d'un chemin donné de telle sorte que sa dérivée covariante reste nulle, on effectue un *transport parallèle* du vecteur; l'état physique de ce vecteur reste " identique " à lui-même le long du chemin.

Effectuons un transport parallèle suivant un chemin donné, d'abord sans connexion : le vecteur ne change pas ; effectuons ensuite le transport parallèle avec une connexion: les composantes du vecteur changent du fait de la rotation des vecteurs de base et le changement du vecteur équivaut à une interaction sur la particule chargée.



Si le chemin est paramétré par s , l'équation du transport parallèle s'écrit :

$$\frac{d\psi^a}{ds} + \Gamma_{b\mu}^a \psi^b \frac{dx^\mu}{ds} = 0$$

qui est l'équation d'une particule soumise uniquement au champ. L'action de celui-ci se fait par l'intermédiaire de la connexion dans le second terme de l'équation.

Changement de base de la fibre.

Pour que la définition donnée ci-dessus de la différentielle absolue soit celle d'un vecteur de la fibre, donc ne dépende pas du choix d'une base dans la fibre, il faut

que la différentielle absolue se transforme comme un vecteur de l'espace interne, ce qui s'écrit, si U est la matrice de changement de base,

$$D(UX) = UD(X),$$

$$\text{soit } (\partial_\mu + \Gamma'_\mu)(UX) = U(\partial_\mu + \Gamma_\mu)X$$

$$\text{ou bien } (\partial_\mu U)X + U(\partial_\mu X) + \Gamma'_\mu(UX) = U(\partial_\mu X) + U\Gamma_\mu X,$$

$$\text{soit encore } \Gamma'_\mu U = U\Gamma_\mu - \partial_\mu U \text{ ce qui donne en multipliant à gauche par } U^{-1},$$

$$\Gamma'_\mu = U\Gamma_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U)U^{-1} \quad \text{équation (1)}$$

et ceci nous montre que Γ'_μ ne se transforma pas comme une matrice de $F(X)$ à cause du dernier terme qui fait intervenir le changement de U avec x ; un tel changement de base est ce que l'on désigne dans la littérature comme un changement de jauge ; dans un tel changement, le vecteur d'état et la dérivée covariante se transforment comme des vecteurs de l'espace interne : c'est la transformation de jauge locale de *première espèce*, et le champ de jauge se transforme suivant la transformation ci-dessus qui est une transformation de jauge de *deuxième espèce*.

L'interaction électromagnétique.

L'interaction électromagnétique s'explique dans ce cadre pour une particule chargée de charge q en supposant l'espace interne complexe de dimension 1. Le champ de jauge sera noté $\Gamma'_\mu = iqA_\mu$ et A_μ s'interprète comme le quadrivecteur potentiel électromagnétique. La dérivée covariante s'obtient en remplaçant ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ et toute l'interaction électromagnétique se trouve contenue dans ce changement (que l'on connaissait depuis longtemps sans pouvoir l'expliquer).

L'espace interne étant ici un espace complexe à une dimension, un changement de base équivaut à une rotation dans le plan complexe ; l'ensemble de ces rotations forme un groupe, appelé $U(1)$ (ce sont les transformations unitaires à une dimension) ; elles sont de la forme $e^{i\alpha(x)}$; d'après l'équation (1), lors d'un tel changement de base, on a :

$$iqA'_\mu = iqA_\mu - i\partial_\mu \alpha(x) \quad \text{ou}$$

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

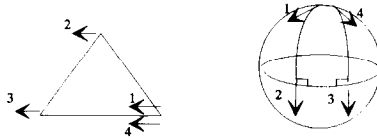
Ceci correspond à ce que l'on appelle *invariance de jauge* en électromagnétisme classique : les lois de l'électromagnétisme ne changent pas si l'on ajoute au

potentiel scalaire V (première composante du quadrivecteur) une fonction du temps et au potentiel vecteur $\vec{A}$ (trois composantes d'espace du quadrivecteur)

le gradient d'une fonction scalaire ; on en profite pour choisir une jauge particulière (de Coulomb, de Lorentz ...) pour simplifier les équations, ce qui revient à choisir une base particulière de l'espace interne.

Le tenseur de courbure et le tenseur électromagnétique.

Une notion importante dans un espace courbé est celle de tenseur de courbure. Elle s'introduit à partir du transport parallèle. Considérons un vecteur que l'on déplace par transport parallèle : il garde un angle constant avec la courbe le long de laquelle on le déplace. Déplaçons ce vecteur le long d'un contour fermé 1-2-3-4 : si l'espace est plat, il revient sur lui-même (cas du triangle : 1 = 4) ; si l'espace est courbé, il ne revient pas sur lui-même (cas de la sphère : 4 est différent de 1). La variation du vecteur le long d'un contour fermé est proportionnel au vecteur et à la surface du contour fermé, le coefficient de proportionnalité étant une composante du tenseur de courbure.



Pour un parallélogramme élémentaire de côtés dx_μ et dx_ν , la variation d'un vecteur X de la fibre après transport parallèle est

$$(\Delta X)^a = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)^a_b X^b dx_\mu dx_\nu = R^a_{b\mu\nu} X^b dx^\mu dx^\nu = (iqF^a_{b\mu\nu}) X^b dx^\mu dx^\nu ;$$

$R^a_{b\mu\nu}$ est le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann-Christoffel pour un espace courbé. $F^a_{b\mu\nu}$ est le tenseur du champ de jauge ; il a une structure de tenseur à la fois dans l'espace-temps et, comme nous allons le voir, dans l'espace interne, ce qui lui donne une signification intrinsèque dans l'espace interne que ne possède pas le champ de jauge lui-même qui dépend du système de coordonnées choisi.

On a en effet, par changement de base dans la fibre, en utilisant la relation $D'_\mu (UX) = U D_\mu X$,

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)^a_b U^b = D'_\mu (U D_\nu) - D'_\nu (U D_\mu) = U (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)^a_b,$$

d'où, en multipliant à droite par U^{-1} , $F^a_{\mu\nu} = U F^a_{\mu\nu} U^{-1}$ et c'est donc bien un tenseur d'ordre 2 de l'espace interne (un scalaire est invariant, un vecteur se

transforme suivant $X' = UX$ et le tenseur d'ordre 2 une fois covariant et une fois contravariant F suivant $F' = UFU^{-1}$).

En électromagnétisme, on travaille avec les vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et champ magnétique $\vec{B}$ de préférence au potentiel scalaire V et au potentiel vecteur $\vec{A}$, composantes du quadrivecteur relativiste A_μ , dont l'expression dépend de la jauge choisie; cela revient à utiliser le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ dont les composantes sont $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Ce tenseur est défini dans l'espace interne par $iqF_{\mu\nu} = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu$ (il n'y a qu'une seule composante dans l'espace interne à 1 dimension, donc $a = b = 1$ que l'on omet), soit

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi = (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu)\psi = iq(\partial_\mu(A_\nu\psi) + A_\nu\partial_\mu\psi - \partial_\nu(A_\mu\psi) - A_\mu\partial_\nu\psi) \\ = iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi; \quad \text{d'où}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

On a alors $U = e^{i\alpha(x)}$ et $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est invariant de jauge; il a une structure de scalaire dans l'espace interne et une structure de tenseur d'ordre 2 dans l'espace-temps.

Si l'on calcule $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}$, on trouve

$$\partial_\lambda(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda)$$

ce qui est nul puisque l'on peut permuter les dérivées partielles. On a donc

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

c'est le *premier groupe d'équations de Maxwell*, correspondant à $\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

et $\text{div}\vec{B}=0$.

Puisque $F_{\mu\nu}$ est un scalaire de l'espace interne, sa dérivée partielle s'identifie à sa dérivée covariante et l'on a $D_\lambda F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} = 0$, qui s'appelle identité de Bianchi en géométrie différentielle; le *premier groupe d'équations de Maxwell* a donc une signification purement géométrique. Le second groupe d'équations de Maxwell, qui fait intervenir les courants, sera déduit de la formulation lagrangienne de la physique et découlera d'un principe de moindre action.

Equations de Klein-Gordon et Dirac.

Prenons le cas d'une particule scalaire : l'équation de sa fonction d'onde peut se déduire de la formule classique de l'énergie : $E = \frac{p^2}{2m} + V$ (où V est l'énergie potentielle de la particule) par le principe de correspondance qui consiste à remplacer les variables classiques par des opérateurs :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} = (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z})$$

L'équation entre opérateurs qui en résulte agit sur la fonction d'onde complexe $y(\vec{x}, t)$, et l'on a (avec $\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi = 0, \quad \text{avec} \quad \nabla^2 \psi = \Delta \psi = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad \text{l'opérateur laplacien.}$$

On reconnait là l'équation de Schrödinger.

Avec l'équation relativiste $E^2 = p^2 + m^2$ (avec $c = 1$), on arrive à l'équation de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\psi = 0, \quad \text{avec} \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \text{l'opérateur D'Alembertien}$$

Cherchons maintenant E de la forme ; $E\psi = (\alpha_i p_i + \beta m)\psi$

$$\text{on a } E^2 \psi = (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m)\psi =$$

$$\underset{=1}{\alpha_i^2 p_i^2} + \underset{=0}{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j} + \underset{=0}{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m} + \underset{=1}{\beta^2 m^2} \psi \quad \text{avec } i < j ;$$

d'où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ anticommulent et $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1$. α_i et β ne peuvent pas être des nombres, ce sont des matrices, et $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)\psi$ et,

$$\text{en multipliant par } \beta, \quad i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m)\psi ;$$

avec $\gamma_\mu = (\beta, \beta \vec{\alpha})$ les matrices de Dirac, on trouve finalement l'équation de Dirac valable pour les fermions de spin 1/2,

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \text{où } \psi \text{ est un spineur.}$$

Structure geometrique du vecteur d'etat quantique

La fonction d'onde quantique est un vecteur de l'espace interne, comme nous l'avons vu précédemment. Mais elle a aussi une structure dans l'espace-temps reliée au spin de la particule : si le spin est 0, alors la fonction d'onde est un scalaire dans l'espace-temps et un vecteur de l'espace interne ; elle obéit à la loi de Klein-Gordon. Si le spin est 1, c'est un vecteur de l'espace-temps qui obéit à la loi de Proca et si le spin est 1/2, un spineur à 4 composantes de l'espace-temps qui obéit à la loi de Dirac.

Les particules élémentaires (à l'exception des particules intermédiaires de jauge) ont un spin $\frac{1}{2}$ et sont donc des fermions; ce sont :

- les leptons, qui forment trois familles de 2 particules (e^- , ν_e : électron et neutrino électronique; μ^- , ν_μ : muon et neutrino muonique; τ^- , ν_τ : tau et neutrino du tau)
- les quarks, regroupés eux aussi en trois familles (u,d : up et down ; c,s : charm et strange ; t et b : top et bottom)
- les particules intermédiaires des interactions, correspondant aux champs de jauge, de spin 1: le photon pour l'interaction électromagnétique, les 8 gluons pour l'interaction forte et les bosons faibles, w^+ , w^- et Z^0 , particules massives, pour l'interaction faible.

Les quarks sont les seules particules sensibles à l'interaction forte, expliquée par la charge de couleur et un espace interne à 3 dimensions ; enfin les doublets correspondent à l'interaction faible, expliquée par une charge faible et un espace interne à 2 dimensions. D'où le tableau valable pour les particules élémentaires :

spin	structure dans l'espace-temps	espace interne de l'électromagnétisme (1 dimension)	espace interne de l'interaction forte (3 dimensions)	espace interne de l'interaction faible (2 dimensions)
1/2, leptons	spineur	oui, si chargé	non	oui
1/2, quarks	spineur	oui	oui	oui
1, particules intermédiaires	vecteur	oui, si chargé	non	non

Pour illustrer ce tableau, prenons le cas d'un quark : c'est un fermion, il a donc la structure d'un spineur de l'espace-temps avec 4 composantes Ψ_μ , mais, de plus, c'est un vecteur des trois espaces à 1, 2 et 3 dimensions, donc du produit tensoriel des trois espaces $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Formulation lagrangienne de la physique.

On peut déduire toutes les lois essentielles de la physique grâce à la formulation lagrangienne, ou, ce qui revient au même, à un principe de moindre action. Cela consiste à dire que, parmi tous les chemins possibles que la particule peut suivre pour aller de A à B, la particule choisit celui qui extrémise (en général minimise) l'action notée S, celle-ci étant définie comme l'intégrale du lagrangien entre

$$\text{l'instant de départ et l'instant d'arrivée } S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

L'optique géométrique se déduit du principe de Fermat où l'action est le chemin optique, produit de l'indice de réfraction du milieu par la longueur du trajet.

En mécanique classique, c'est le principe de Maupertuis : le lagrangien a ici une signification physique moins évidente : c'est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, et donc, pour un système sans interaction, l'énergie cinétique.

Quand on passe à la mécanique quantique, les équations font intervenir la fonction d'onde ou vecteur d'état $\Phi(x)$, défini sur tout l'espace ; le lagrangien est alors l'intégrale étendue à l'espace entier d'une densité lagrangienne :

$$L = \int_{\text{espace}} \ell d^3x, \text{ où } \ell \text{ est la densité lagrangienne, avec } S = \int L dt = \int \ell d^4x.$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial \Phi / \partial x_\mu)} \right) - \frac{\partial \ell}{\partial \Phi} = 0$$

Particule dans un champ électromagnétique.

L'équation de Dirac dérive (par les équations de Lagrange), de la densité lagrangienne $\ell = i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$.

Le scénario que l'on décrit habituellement dans la littérature est alors le suivant : ce lagrangien n'est pas invariant par transformation locale de jauge $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x)$ (correspondant à un changement de base de l'espace interne, pouvant être différent en chaque point, mais néanmoins continu).

On a en effet $\partial_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi + ie^{i\alpha(x)} \psi \partial_\mu \alpha$ et le dernier terme brise l'invariance du lagrangien.

Pour rétablir cette invariance (ce qui revient à exiger que le lagrangien soit un scalaire non seulement dans l'espace-temps, mais aussi dans l'espace interne), on a vu qu'il faut remplacer la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante D_μ qui se transforme suivant $D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi$ avec $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, A_μ se transformant comme $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha$ (transformation de jauge de deuxième espèce).

Le lagrangien transformé s'écrit :

$$\ell = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu.$$

Le premier terme est le lagrangien de la particule libre ; le second peut s'écrire $-j^\mu A_\mu$ où j_μ est la densité de courant : $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi$: c'est le lagrangien d'interaction entre la particule et le champ électromagnétique.

Le champ de jauge introduit A_μ est un champ vectoriel dans l'espace-temps ; il correspond (lorsqu'il est quantifié), à des particules d'échange, ou particules intermédiaires de spin 1, qui sont les photons dans le cas électromagnétique.

Pour avoir le lagrangien complet, il faut ajouter le lagrangien du champ de jauge libre qui est un scalaire de l'espace interne ; on prend le scalaire le plus simple formé à partir de A_μ , qui s'écrit pour les photons : $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ et le lagrangien complet s'écrit finalement :

$$\ell = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Toute l'électrodynamique quantique est contenue dans ce lagrangien qui mène à des prédictions extrêmement précises.

On a le schéma :

lagrangien $\xrightarrow{\text{invariance de jauge locale}}$ introduction du champ de jauge $\rightarrow$ lagrangien de l'interaction

On peut proposer un autre schéma menant au même résultat :

Lorsque la particule est chargée, elle possède un espace interne à 1 dimension en chaque point et le vecteur d'état de la particule est un vecteur de l'espace interne ; les différents espaces internes sont reliés par une connexion qui n'est autre (à une constante près) que le quadripotential électromagnétique, champ de jauge de

l'interaction. Le lagrangien de la particule dans le champ est un scalaire à la fois dans l'espace-temps et dans l'espace interne : si l'on effectue un changement de base dans l'espace interne, il y a une variation du champ de jauge qui vient compenser la variation du vecteur d'état de sorte que le lagrangien reste constant: le champ de jauge est en quelque sorte un champ de *compensation*. L'espace interne n'est pas visible, mais se manifeste par l'interaction.

On peut faire deux remarques au sujet des photons :

D'abord, ceux-ci sont sans masse : en effet un terme de masse du type

$$\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \text{ n'est pas invariant de jauge.}$$

Ensuite, les photons, ne possédant pas de charge électrique, n'ont pas d'action les uns sur les autres : nous allons voir qu'il en est différemment avec les interactions forte et faible, qui se comportent de façon très différente parce que les changements de base dans les espaces de dimension 2 et 3 (groupes SU(2) et SU(3)) ne commutent pas entre eux et donc les groupes des transformations unitaires de changement de base ne sont pas abéliens.

L'interaction forte.

Elle correspond à une charge appelée charge de couleur : le vecteur d'état est un vecteur d'un espace à trois dimensions, comme si la particule pouvait posséder une couleur choisie parmi les trois couleurs : R (Red=rouge), B (Blue=bleue) et G (Green=verte). Si l'on note le vecteur d'état $q = (q_1, q_2, q_3)$, où q_1, q_2 et q_3 sont les trois champs de couleur, le lagrangien de la particule libre s'écrit : $\ell = \bar{q}_j (\gamma^\mu \partial_\mu - m) q_j$ (avec sommation sur $j = 1, 2$ et 3) ; nous demandons que le lagrangien reste invariant par transformation locale de jauge, c'est-à-dire que le lagrangien soit un scalaire de l'espace interne à trois dimensions. Les changements de base sont de la forme : $q(x) \rightarrow Uq(x) = e^{i\alpha_a(x)T_a} q(x)$ où U est une matrice unitaire 3×3 ; il y a une sommation sur a de 1 à 8 ; les matrices T_a , avec a variant de 1 à 8, sont 8 matrices linéairement indépendantes formant une base du groupe SU(3).

Le groupe est non-abélien car les générateurs T_a ne commutent pas entre eux et le commutateur $[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$, où f_{abc} sont des constantes réelles, appelées constantes de structure du groupe.

Pour que le lagrangien reste constant par transformation locale de jauge, on doit remplacer la dérivée par la dérivée covariante, qui s'écrit $D_\mu = \partial_\mu + igT_a G_\mu^a$.

où l'on a introduit 8 champs de jauge G_μ^a , les gluons, qui sont les opérateurs de changements de couleur et g qui est la constante de couplage de l'interaction forte.

Les gluons n'ont pas de masse, et, contrairement au cas de l'interaction électromagnétique, ils interagissent entre eux. On en tire pour conséquence que l'interaction augmente avec la distance entre quarks et diminue au contraire si les quarks sont très proches : c'est la propriété de liberté asymptotique. L'espace interne étant inobservable, on ne peut pas observer un quark isolé qui aurait une couleur, mais seulement des assemblages de 3 quarks colorés (un quark rouge, un bleu et un vert) formant un ensemble non coloré (scalaire de l'espace interne) ou des assemblages d'un quark coloré et d'un antiquark portant son anticouleur, l'ensemble étant non coloré. C'est la propriété de confinement des quarks.

Interaction faible.

On justifie de la même façon l'interaction faible, par une théorie de jauge sur un espace interne à deux dimensions, le groupe des changements de base étant $SU(2)$. La théorie est tout à fait semblable à celle de l'interaction forte, mais à deux dimensions au lieu de trois. L'histoire ne s'arrête cependant pas là, car l'interaction faible se comporte tout à fait différemment de l'interaction forte et les particules intermédiaires W^+ , W^- et Z^0 sont des particules massives, ce qui est interdit par les théories de jauge. L'explication en est donnée par une brisure spontanée de symétrie (voir référence bibliographique : Jean Sivardière) : le principe de symétrie de Curie, qui dit les symétries des causes se retrouvent dans les effets produits, n'est valable que dans le cas d'une solution unique; dans le cas de solutions multiples, la symétrie se retrouve dans l'ensemble des solutions, qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation du groupe de symétrie, mais chaque solution subit une brisure spontanée de symétrie, qui fait que la symétrie initiale n'y est plus présente ; c'est ce qui s'est passée pour l'interaction faible qui a subi une brisure de symétrie à une certaine époque lors du refroidissement de l'univers. Il reste cependant une symétrie résiduelle $U(1)$, qui explique l'électromagnétisme dans le cadre de l'interaction électrofaible. La symétrie brisée est à l'origine de la faiblesse de l'interaction et de la masse des particules intermédiaires qui implique une courte portée pour l'interaction. On peut dire que l'interaction faible n'est qu'un souvenir (de très grande importance cependant) de l'interaction symétrique initiale.

Conclusion.

C'est dans le cadre géométrique des espaces fibrés que se trouve l'explication des interactions fondamentales. Les particules intermédiaires des interactions, photon, gluons et bosons faibles sont directement issus de la connexion entre les espaces internes en des points différents de la particule étudiée. Cette géométrisation donne une grande logique et une grande cohérence à l'interprétation des interactions fondamentales, et, par là même, à notre interprétation de l'univers de la physique. Reste cependant la gravitation, expliquée géométriquement dans le cadre de la Relativité Générale par un espace courbé par la présence de matière; il s'agit là d'une interprétation tout à fait différente et incompatible avec la fonction d'onde quantique et les espaces internes; là se situe un des grands défis que la nature lance aux physiciens.

BIBLIOGRAPHIE.

- Philippe TOURENC: Relativité et gravitation (Armand Colin, 1992)
- Jean-Claude BOUDENOT: Electromagnétisme et gravitation relativiste (Ellipses, 1989)
- David GRIFFITS: introduction to elementary particles (John Wiley & Sons, 1987)
- TA-PEI et LING-FONG LI: gauge theory of elementary particle physics (Clarendon Press Oxford, 1989)
- Claude COHEN-TANNOUDJI, Bernard DIU et Franck LALOE: mécanique quantique (Hermann, nouveau tirage 1992)
- Jean SIVARDIERE: La symétrie en mathématiques, physique et chimie (Presses Universitaires de Grenoble, 1995)
- Vincent BOURGES: interaction de jauge des particules élémentaires (numéro spécial du B.U.P. de juin 1994).