

# Kepler, Newton... et Mercure

par J.-P. ROSENSTIEHL  
Lycée Montesquieu - 72000 Le Mans

---

## INTRODUCTION

Le tracé de l'orbite de la planète Mercure permet d'étudier les lois de Kepler et celle de la gravitation due à Newton.

Plusieurs T.P. sont possibles. Les parties décrites dans les paragraphes 1. et 2. sont utilisables dès le début de l'année scolaire dans le chapitre «Interaction gravitationnelle».

La partie 3. (Loi de Newton) peut faire l'objet d'un deuxième T.P. Il faut avoir traité les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  et les lois de la dynamique. Il y a là une belle illustration pour calculer la masse du Soleil.

La partie 4 peut être intéressante surtout pour l'enseignant... et quelques élèves. Étant donnée la lourdeur du programme, on ne passera sans doute pas trop de temps sur cette partie. On peut donner aux élèves l'organigramme du programme et leur laisser chercher chez eux le programme correspondant à leur équipement (calculatrice ou ordinateur) ou bien leur fournir directement le listing. Nous fournissons ce listing en annexe.

## 1. LA TRAJECTOIRE DE MERCURE

On trace au milieu d'une feuille de format A3 ( $42 \times 29,7$ ) une ligne  $x'x$  dans le sens de la longueur et on place S (le Soleil) à 18 cm du bord droit (figure 1).

Les positions successives de Mercure (point M) sont reportées grâce aux valeurs figurant dans le tableau de l'annexe 1\* avec  $r = SM =$  distance entre Soleil et Mercure en unité astronomique U.A. ;  $1 \text{ U.A.} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$  ;  $\theta = (Sx, SM) =$  anomalie vraie de Mercure.

---

\* Note à la fin de l'article.

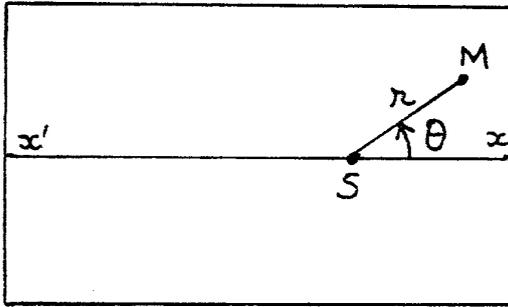


Figure 1

Échelle conseillée : 30 cm  $\Rightarrow$  1 U.A.

On trace ensuite soigneusement la trajectoire par continuité. On obtient la figure 2.

## 2. LOIS DE KEPLER

### 2.1. Nature de la trajectoire

Manifestement, il ne s'agit pas d'un cercle de centre S. Montrons qu'il s'agit d'une ellipse dont S est l'un des foyers. La position de Mercure la plus proche du Soleil (c'est le point de départ de la construction) est le périhélie P. On trace PS qui coupe la trajectoire en un deuxième point : l'aphélie A qui est la position de Mercure la plus éloignée du Soleil. On mesure  $PA = 23,2 \text{ cm} = 2a$  avec  $a =$  demi-grand axe. Soit O le milieu de PA et S' le symétrique de S par rapport à O.

On mesure  $OS = c = 2,4 \text{ cm}$ .

L'excentricité est  $e = c/a = 2,4/11,6 = 0,207$ .

Soit M un point de la trajectoire. On vérifie que :

$$SM + S'M = 2a = 23,2 \text{ cm}$$

et ceci, quel que soit le point M choisi : cela prouve que la trajectoire est bien une ellipse dont S est l'un des foyers (première loi de Kepler).

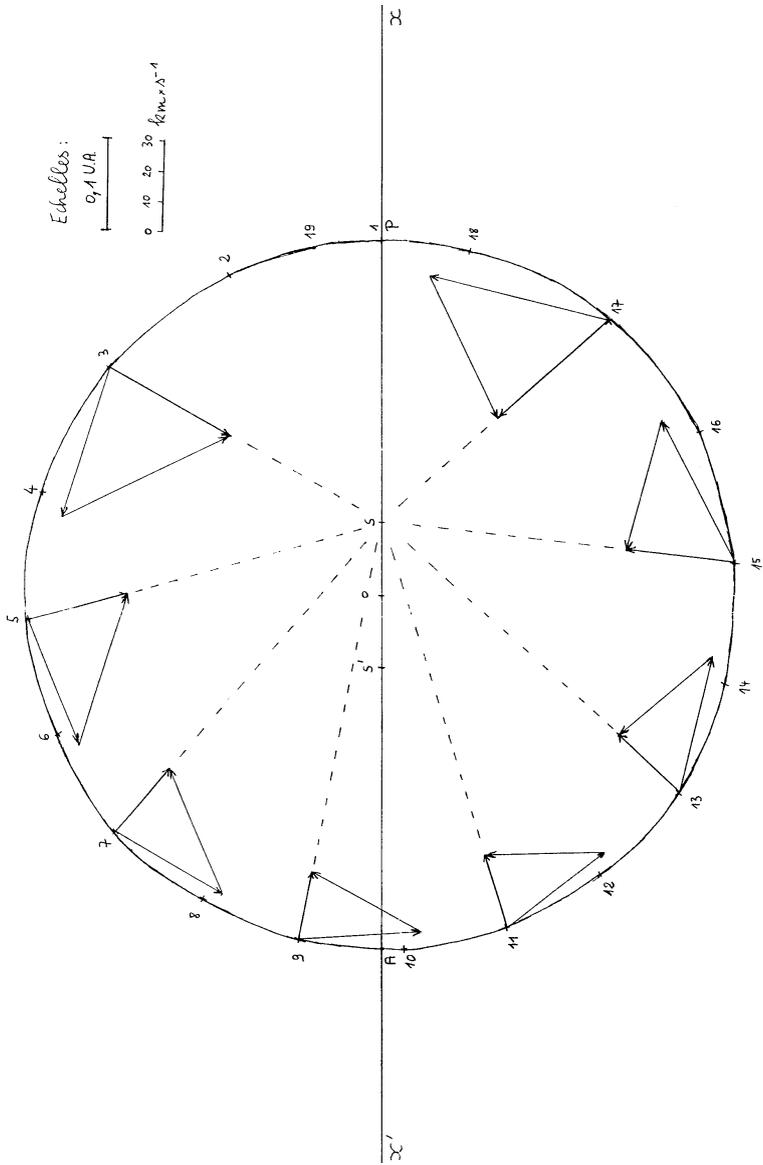


Figure 2 : Orbite de Mercure.

### 2.2. Loi des aires

On place une feuille de papier calque de format  $24 \times 32$  sur la trajectoire obtenue. On y marque les positions de S et celles de Mercure pour les indices 1, 3, 8, 10, 13 et 15.

Ce calque est ensuite placé sur du carton épais et on y reporte à l'aide d'une épingle à tête plate (dite de signalisation) les contours des surfaces S,1,3 S,8,10 et S,13,15 (figure 3).

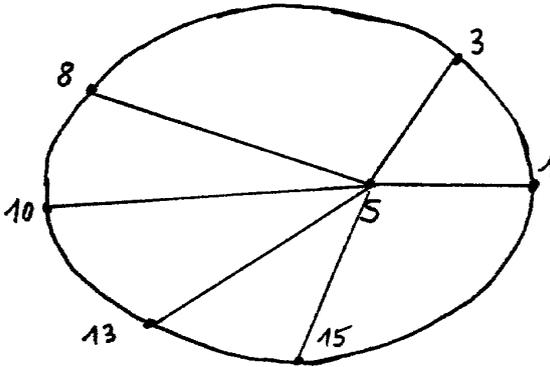


Figure 3

Après découpage au cutter on réalise les pesées.

Le carton étant homogène et d'épaisseur constante, l'égalité des masses montre l'égalité des aires des surfaces. Ainsi, le rayon vecteur SM a balayé des aires égales pendant des durées égales à dix jours. C'est la seconde loi de Kepler. Nous avons obtenu huit grammes pour dix jours (carton d'épaisseur 3,5 mm).

### 2.3. Loi harmonique

– Pour Mercure :  $a = 11,6$  cm sur le dessin, soit en tenant compte de l'échelle  $11,6/30 = 0,387$  U.A.

La période de révolution sidérale s'obtient à partir de la trajectoire : entre les positions 1 et 18 il s'est écoulé  $17 \times 5 = 85$  jours mais la planète n'a pas totalement bouclé son tour. Une interpolation entre les points 18 et 19 donne la valeur à ajouter :  $3/5 \times 5 = 3$  jours. Ainsi  $T = 88$  jours.

Exprimons cette période en année terrestre  $T = 88/365,25 = 0,241$  an  
d'où :

$$a^3/T^2 = (0,387)^3/(0,241)^2 \# 1 \text{ UA}^3 \text{ an}^{-2}$$

– Pour la Terre :  $a' = 1 \text{ U.A.}$   $T' = 1 \text{ an}$

d'où  $a^3/T^2 = 1 \text{ UA}^3 \text{ an}^{-2}$

La troisième loi de Kepler se trouve vérifiée.

Exercice complémentaire : sachant que la période de révolution sidérale de Mercure est de quatre-vingt-huit jours et en utilisant les résultats du paragraphe 2., quelle est la masse de la plaque de carton obtenue en découpant l'ellipse complète ?

(réponse : loi des aires  $\Rightarrow 0,8 \times 88 = 70,4 \text{ g}$ .)

A vérifier par pesée.

### 3. LOI DE NEWTON

#### 3.1. Tracé de vecteurs accélération

On trace le vecteur accélération en plusieurs points de la trajectoire ; exemple : point  $M_3$ .

Construire en  $M_3$  le vecteur  $\vec{v}_4 // M_3\vec{M}_5$  puis à partir de son extrémité tracer  $-\vec{v}_2 // M_3\vec{M}_1$  d'où :

$$\vec{\Delta v} = \vec{v}_4 - \vec{v}_2 \quad \text{d'où} \quad \vec{a}_3 = \vec{\Delta v} / \Delta t$$

Échelle conseillée :  $1 \text{ cm} \Rightarrow 10 \text{ km.s}^{-1}$ .

On utilise pour faire ces tracés la méthode de «l'équerre et de la règle». La mesure donne :

$$\Delta v \Rightarrow 4,5 \text{ cm} \Rightarrow 45 \text{ km s}^{-1}$$

et  $\|\vec{a}_3\| = 5,2 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$

On fait de même pour d'autres points (indices pairs pour la moitié des élèves et impairs pour les autres).

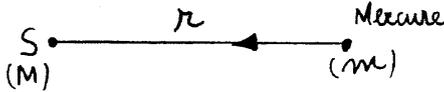
Résultats :

Point	$\Delta v$ (km s <sup>-1</sup> )	$\ \vec{a}\ $ (m s <sup>-2</sup> )	r (m)	$a r^2$ 10 <sup>20</sup> (SI)
M <sub>3</sub>	45	5,2 10 <sup>-2</sup>	5,04 10 <sup>10</sup>	1,32
M <sub>5</sub>	33	3,8	5,88	1,31
M <sub>7</sub>	27	3,1	6,60	1,35
M <sub>9</sub>	23	2,7	6,96	1,29
M <sub>11</sub>	25	2,9	6,93	1,39
M <sub>13</sub>	27	3,2	6,50	1,34

etc.

Tous les vecteurs  $\vec{a}$  sont dirigés pratiquement vers S : l'accélération est radiale et on vérifie que les produits  $a r^2$  sont pratiquement égaux et de valeur moyenne  $\cong 1,33 \times 10^{20}$  SI.

### 3.2. Calcul de la masse du Soleil



$$F = G M m / r^2 = m a$$

$$\text{Ainsi } a r^2 = G M \Rightarrow M = 1,33 \times 10^{20} / 6,67 \times 10^{-11} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

*N.B.* : On peut aussi reporter les points de la trajectoire (par exemple de deux jours en deux jours) dans un tableau-grapheur (comme REGRESSI) et faire tracer l'orbite et retrouver la masse du Soleil.

Bien sûr l'excentricité est exagérée, les axes n'étant pas orthonormés !

X m	Y m	T s	Vx m/s	Vy m/s	ax m/s/s	ay m/s/s	a m/s/s	arr	M kg*E30
45.140G	10.120G	172.80k	-10.848k	58.032k	-63.278m	-17.141m	65.559m	140.30E	2.1034
42.355G	19.840G	345.60k	-21.097k	54.226k	-55.027m	-26.325m	61.000m	133.44E	2.0006
37.940G	28.779G	518.40k	-29.813k	49.031k	-46.204m	-34.446m	57.631m	130.69E	1.9594
32.140G	36.705G	691.20k	-37.032k	42.382k	-36.900m	-41.971m	55.885m	133.02E	1.9943
25.240G	43.370G	864.00k	-42.520k	34.712k	-26.583m	-45.843m	52.993m	133.44E	2.0005
17.545G	48.680G	1.0368M	-46.241k	26.710k	-16.625m	-46.590m	49.467m	132.45E	1.9858
9.3500G	52.600G	1.2096M	-48.360k	18.709k	-8.7411m	-45.782m	46.609m	133.03E	1.9945
905.00M	55.160G	1.3824M	-49.279k	10.964k	-870.95p	-43.637m	43.645m	132.83E	1.9915
-7.6000G	56.415G	1.5552M	-48.700k	3.6820k	6.6503m	-40.530m	41.072m	133.09E	1.9953
-15.870G	56.465G	1.7280M	-47.155k	-3.0213k	10.352m	-37.098m	38.515m	132.50E	1.9865
-23.865G	55.405G	1.9008M	-45.156k	-9.1315k	13.775m	-33.576m	36.292m	132.07E	1.9801
-31.435G	53.345G	2.0736M	-42.388k	-14.617k	17.626m	-29.891m	34.701m	133.04E	1.9946
-38.485G	50.390G	2.2464M	-39.128k	-19.461k	20.088m	-26.189m	33.006m	132.69E	1.9894
-44.935G	46.655G	2.4192M	-35.479k	-23.679k	22.037m	-22.684m	31.626m	132.70E	1.9894
-50.730G	42.240G	2.5920M	-31.544k	-27.317k	23.386m	-19.509m	30.455m	132.71E	1.9897
-55.825G	37.245G	2.7648M	-27.416k	-30.428k	24.411m	-16.445m	29.434m	132.56E	1.9874
-60.195G	31.755G	2.9376M	-23.114k	-33.001k	25.387m	-13.319m	28.669m	132.79E	1.9908
-63.805G	25.870G	3.1104M	-18.661k	-35.045k	25.999m	-10.506m	28.041m	132.93E	1.9929
-66.640G	19.670G	3.2832M	-14.144k	-36.639k	26.329m	-7.8364m	27.471m	132.62E	1.9883
-68.690G	13.235G	3.4560M	-9.5679k	-37.751k	26.567m	-5.0433m	27.042m	132.33E	1.9839
-69.945G	6.6500G	3.6288M	-4.9672k	-38.395k	26.731m	-2.5397m	26.852m	132.55E	1.9873
-70.405G	-10.000M	3.8016M	-332.75	-38.631k	26.885m	-76.744p	26.885m	133.27E	1.9980
-70.060G	-6.6750G	3.9744M	4.3065k	-38.414k	26.649m	2.5734m	26.773m	132.60E	1.9881
-68.920G	-13.260G	4.1472M	8.8735k	-37.746k	26.381m	5.0921m	26.868m	132.35E	1.9842
-66.995G	-19.695G	4.3200M	13.424k	-36.651k	26.156m	7.6712m	27.258m	132.91E	1.9927
-64.285G	-25.900G	4.4928M	17.899k	-35.089k	25.631m	10.389m	27.657m	132.85E	1.9917
-60.815G	-31.795G	4.6656M	22.273k	-33.063k	24.978m	13.001m	28.159m	132.61E	1.9882
-56.595G	-37.300G	4.8384M	26.519k	-30.584k	24.112m	15.848m	28.854m	132.56E	1.9874
-51.660G	-42.335G	5.0112M	30.592k	-27.575k	23.013m	18.916m	29.789m	132.89E	1.9923
-46.035G	-46.800G	5.1840M	34.452k	-24.048k	21.540m	21.900m	30.718m	132.38E	1.9847
-39.770G	-50.615G	5.3568M	38.018k	-19.992k	19.801m	25.216m	32.061m	132.85E	1.9917
-32.915G	-53.675G	5.5296M	41.266k	-15.328k	17.559m	28.597m	33.557m	133.03E	1.9945
-25.535G	-55.880G	5.7024M	44.047k	-10.110k	14.574m	31.904m	35.075m	132.39E	1.9849
-17.725G	-57.135G	5.8752M	46.267k	-4.2945k	11.045m	35.429m	37.111m	132.81E	1.9911
-9.5850G	-57.330G	6.0480M	47.806k	2.1243k	6.4468m	38.781m	39.313m	132.82E	1.9913
-1.2550G	-56.370G	6.2208M	48.438k	9.0832k	847.71p	41.671m	41.680m	132.51E	1.9866
7.0950G	-54.165G	6.3936M	48.040k	16.495k	-5.7398m	44.105m	44.477m	132.73E	1.9899
15.275G	-50.650G	6.5664M	46.381k	24.265k	-13.670m	45.498m	47.508m	132.96E	1.9934
23.040G	-45.775G	6.7392M	43.253k	32.118k	-22.692m	45.052m	50.444m	132.48E	1.9861
30.130G	-39.565G	6.9120M	38.493k	39.718k	-32.576m	42.650m	53.667m	132.73E	1.9900
36.245G	-32.085G	7.0848M	31.995k	46.706k	-42.505m	37.582m	56.737m	132.94E	1.9932
41.095G	-23.490G	7.2576M	23.864k	52.532k	-51.421m	29.383m	59.224m	132.70E	1.9895
44.415G	-14.025G	7.4304M	14.359k	56.696k	-57.607m	18.068m	60.374m	130.98E	1.9637
46.005G	-4.0150G	7.6032M	4.032k	58.708k	-62.755m	5.9726m	63.038m	134.43E	2.0155
45.750G	6.1500G	7.7760M	-7.2059k	58.651k	-66.563m	-7.3017m	66.962m	142.69E	2.1393

Tableau : Orbite de Mercure.

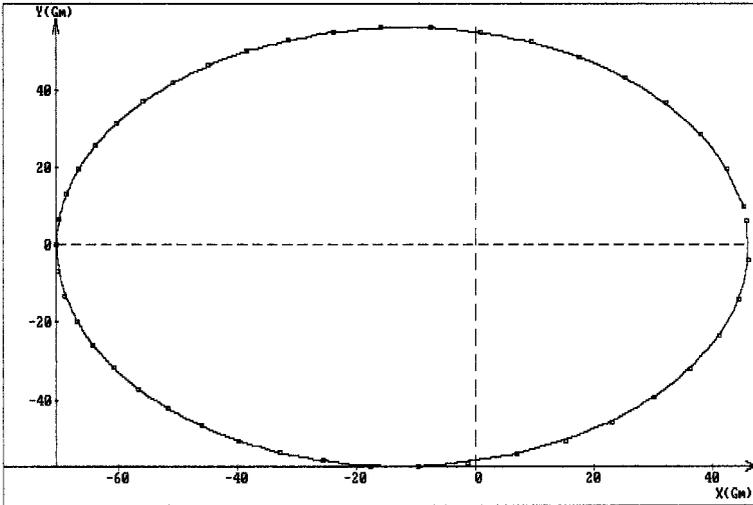


Figure 4 : Orbite de Mercure.

#### 4. DE NEWTON À LA TRAJECTOIRE AVEC UNE CALCULETTE

##### 4.1. Principe de la méthode

On se donne la position d'un point  $M(x_0, y_0)$  et son vecteur  $\vec{v}_0$  ( $B_{x_0}, V_{y_0}$ ) à un instant  $t_0$ . Puis on fait agir sur  $M$  (de masse  $m$ ) pendant une durée  $\Delta t$  la force de gravitation considérée comme constante pendant cette durée : ainsi le vecteur accélération  $\vec{a}$  sera lui aussi constant pendant cette durée ; ainsi

$$\vec{a} = \vec{F}/m = \vec{\Delta v}/\Delta t = -GM/r^2 \times \vec{u}$$

$$\vec{u} \left| \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{array} \right.$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = -GM \frac{x}{r^3} \\ a_y = -GM \frac{y}{r^3} \end{array} \right.$$

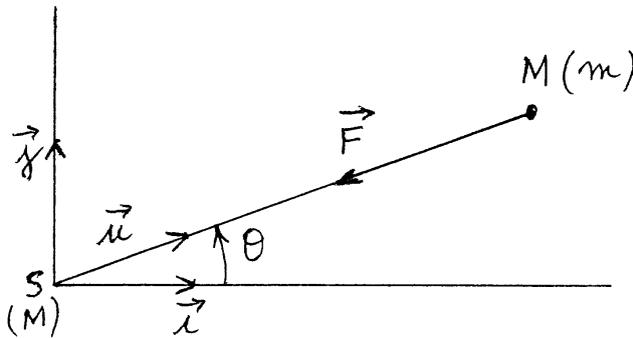


Figure 5

$$\vec{v}_1 \begin{cases} v_{x_1} = v_{x_0} + a_x \Delta t \\ v_{y_1} = v_{y_0} + a_y \Delta t \end{cases}$$

la nouvelle vitesse sera  $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}$  et la nouvelle position de M s'en déduit :

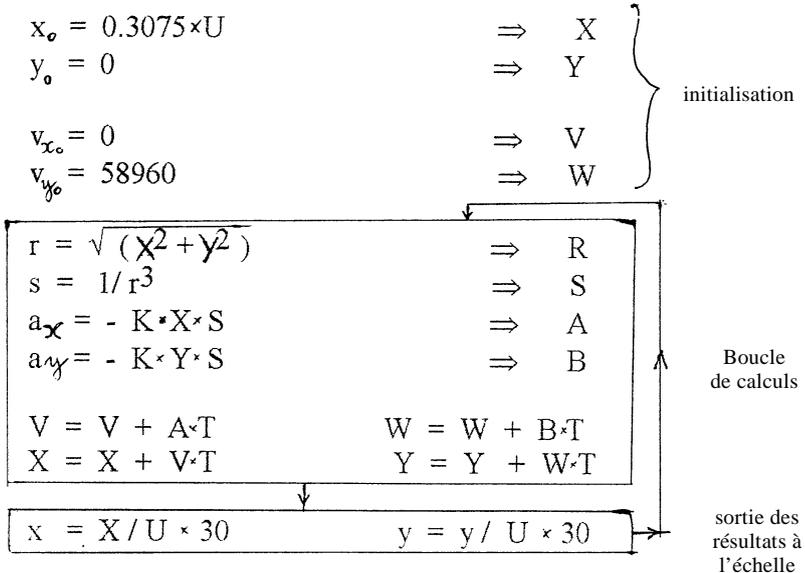
$$x_1 = x_0 + v_{x_1} \Delta t \quad y_1 = y_0 + v_{y_1} \Delta t$$

Ensuite, on refait le même raisonnement à partir de cette nouvelle position et, de proche en proche, on obtient les positions successives que l'on reporte sur papier millimétré. Cette méthode d'intégration numérique met très bien en évidence le raisonnement physique (c'était d'ailleurs également celui de Newton lui-même !) sans utiliser un formalisme mathématique compliqué. La méthode est d'autant plus performante que la durée  $\Delta t$  est plus petite.

#### 4.2. Application à Mercure

$$\left. \begin{array}{ll} G M = 1,3267 \times 10^{20} \text{ S.I.} & \Rightarrow K \\ \Delta t = 10\,800 \text{ s (soit } 1/8 \text{ de jour)} & \Rightarrow T \\ U = 1,5 \times 10^{11} \text{ m} & \Rightarrow U \end{array} \right\} \text{ constantes}$$

l'organigramme s'écrit :



On obtient pratiquement la même trajectoire que dans la partie 1.

## BIBLIOGRAPHIE

- «*Gravitation et lumière*», hors série n° 5 des Cahiers Clairaut.
- «*Éphémérides astronomiques*», Annuaire du Bureau des longitudes.
- Guy SÉRANE : «*Astronomie et ordinateur*», Dunod.
- «*De Newton à Kepler avec une calculette*», Cahiers Clairaut n° 21.

## NOTE DE LA RÉDACTION ET DE L'AUTEUR

Le choix de Mercure pour ce «T.P.» est dû à son excentricité. Malheureusement les mesures ne peuvent être faites directement sur Mercure en raison de sa proximité du Soleil.

Le tableau de valeurs utilisé par l'auteur a donc été calculé à partir des documents cités en bibliographie et d'un programme réalisé par l'auteur et non directement à partir des lois de Newton, ce qui poserait évidemment un problème déontologique !

L'auteur nous signale en outre qu'il existe un T.P. permettant de construire l'orbite de Mercure en partant de l'**observation** de ses élongations maximales. Je l'ai pratiqué en option de première S mais c'est "acrobatique" et les élèves risquent de s'y perdre (Collection Synopses - Hachette éducation p. 111). Par ailleurs il faut des conditions particulièrement favorables pour observer Mercure».

## *Annexe 1*

### *Données positions et vitesses de Mercure*

---

Indice	Date	Angle $\theta$ (°)	Distance r U.A.	Vitesse v km.s <sup>-1</sup>
1	1995.0720	0	0,3075	58,9
2	1995.0725	31	0,315	57,8
3	1995.0730	60	0,336	54,6
4	1995.0804	85	0,363	50,9
5	1995.0809	106	0,392	47,3
6	1995.0814	124	0,418	44,2
7	1995.0819	140	0,440	41,7
8	1995.0824	155	0,455	40,1
9	1995.0829	169	0,464	39,1
10	1995.0903	183	0,467	38,8
11	1995.0908	197	0,462	39,3
12	1995.0913	211	0,450	40,6
13	1995.0918	227	0,432	42,6
14	1995.0923	244	0,408	45,4
15	1995.0928	263	0,381	48,6
16	1995.1003	286	0,352	52,4
17	1995.1008	312	0,326	56,1
18	1995.1013	342	0,310	58,6
19	1995.1018	13	0,309	58,7

*Date* : AAAA.MMJJ 1995.0903 est le 3 septembre 1995.

## Annexe 2

### Listing en Q.BASIC

---

```

REM      trajectoire de MERCURE avec une calculette... ou un ordinateur

REM      auteur JP ROSENSTIEHL *** LYCEE MONTESQUIEU LE MANS ***
REM      sortie écran ou imprimante

K = 1.327E+20: T = 10800: U = 1.5E+11      ' constantes
X = .3075 * U: Y = 0                      ' conditions
V = 0: W = 58960: I = 0: n = 5           ' initiales

boucle: I = I + T / 86400                  ' début boucle et durée écoulée
R = SQR(X ^ 2 + Y ^ 2)                    ' en jours
S = 1 / R ^ 3
A = -K * X * S: B = -K * Y * S
V = V + A * T: W = W + B * T
X = X + V * T: Y = Y + W * T
Xe = X / U * 30: Ye = Y / U * 30         ' mise à l'échelle

IF I / n - INT(I / n) = 0 THEN PRINT USING "###.###  "; I; Xe; Ye
IF I > 90 THEN END                        'valeurs tous les n jours
GOTO boucle                               ' ici n = 5

```

#### Remarques :

1 - Pour une sortie imprimante on remplacera PRINT par LPRINT.

2 - Pour tracer la trajectoire à l'écran on remplacera les trois dernières lignes du programme ci-dessus par les lignes suivantes.

```

SCREEN 12: COLOR 2                        ' tracé de la trajectoire
xx = 350 + Xe * 15                        '
yy = 240 - Ye * 15                        '
PSET (350, 240)                           ' soleil
PSET (xx, yy)
IF I > 89 THEN END                        ' sortie conditionnelle
GOTO boucle

```

3 - *Compléments* : faire calculer aux élèves la vitesse initiale que devrait avoir Mercure pour que son orbite soit circulaire.

Réponse :  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$  ici  $r = x_0$

Remplacer alors W par  $W = 53\,640$  et observer l'écran.

Il est possible aussi d'essayer par tâtonnement d'autres valeurs et de modifier les deux composantes V et W. Le jeu est amusant et instructif.

### *Annexe 3*

#### *Listing pour calculette TI 81*

---

```

: All -Off
: ClrDraw
: - 15 → Xmin
: 13 → Xmax
: - 15 → Ymin
: 13 → Ymiax
: 1.327E20 → K
: 108000 → T
: 1.5E11 → U
: .3075*U → X
: 0 → Y
: 0 → V
: 58960 → W
: 0 → I
: Lbl 1
: I + T/864000 → I
: √(X ^ 2 + Y ^ 2) → R
: 1/R ^ 3 → S
: - K * X * S → A
: - K * Y * S → B
: V + A * T → V
: W + B * T → W
: X + V * T → X
: Y + W * T → Y
: X/U * 30 → D
: Y/U * 30 → E
: PT - On (D,E)
: If I < 90
: GOTO 1
: End

```