

Analyse spectrale et filtrage en sup PCSI

par François et Anne CLAUSET
Lycée La Martinière Monplaisir
41, rue Antoine Lumière - 69008 Lyon

RÉSUMÉ

Nous nous proposons de décrire différents travaux concernant l'analyse spectrale et le filtrage d'un signal. Ces travaux ont été exécutés par nos élèves, soit en séances d'informatique, soit en séances de travaux pratiques. Dans tous les cas nous avons utilisé le logiciel PHYSCOPE, soit en tant que logiciel de simulation, soit associé à une carte d'acquisition (Candibus ou Eurosmart) en tant qu'analyseur de spectre, soit en combinant les deux possibilités. De plus, nous avons écrit un programme de simulation de filtres linéaires permettant de filtrer n'importe quel signal.

INTRODUCTION

L'approche de la notion de filtrage et du contenu fréquentiel d'un signal qui est proposée dans les programmes de Sup PCSI donne la possibilité aux élèves de comprendre ce qu'est un filtre et son utilité. Une fonction de transfert n'est plus seulement une expression mathématique, mais elle est associée à une opération dont l'élève peut prévoir et expliquer l'effet sur un signal donné. La différence de comportement entre circuits linéaires (appauvrissement du spectre) et non linéaires (enrichissement possible du spectre) [1] est aisément observable en T.P. ou simulable avec un logiciel tel que PHYSCOPE.

Notre but est de montrer qu'il n'est pas nécessaire de savoir calculer des coefficients de Fourier pour mettre en pratique des études intéressantes. On peut simplement introduire le spectre en signalant que

tout signal périodique $s(t)$ de pulsation ω peut se décomposer en une somme :

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cos(k\omega t + \phi_k)$$

S_0 représentant la valeur moyenne de $s(t)$, ω la pulsation fondamentale, $\omega_k = k\omega$ la pulsation harmonique de rang k . Le spectre en amplitude du signal $s(t)$ est la représentation des coefficients S_k (k positif ou nul) en fonction de $f_k = \omega_k/2\pi$.

Nous proposons en premier une approche simple de la notion de spectre, puis une simulation de filtre. Du point de vue horaire, cela correspond à une séance d'informatique de deux heures devant les élèves. Pour cette simulation, nous avons écrit un programme sur PHYSCOPE utilisant les transformations de Fourier et permettant d'appliquer n'importe quel filtre à un signal entré directement dans la feuille de calcul ou acquis grâce à la carte d'acquisition. En troisième partie nous comparerons l'effet d'un filtre réel sur un signal délivré par un générateur, et l'effet du filtre simulé sur le même signal d'entrée. Enfin, nous décrirons rapidement l'étude de l'évolution du spectre lors du redressement et filtrage d'un signal sinusoïdal par une diode et filtre R-C. Cette étude nous a été proposée lors de la journée de présentation des programmes de Sup PC-SI [1].

Nous utiliserons des variables propres à PHYSCOPE, dont la signification est rappelée en annexe 1.

1. APPROCHE SIMPLE DE LA NOTION DE SPECTRE

Nous appellerons T_0 la période fondamentale des signaux, et f_0 la fréquence associée. La durée d'un enregistrement est égale à $D = T_{\text{base}} \times (\text{Nbpoint} - 1)$. La fréquence d'échantillonnage du signal est $f_e = 1/T_{\text{base}}$, et la résolution fréquentielle est $1/D$. L'étendue utilisable du spectre est $[0, f_e/2]$. La méthode utilisée par PHYSCOPE pour calculer le spectre du signal, la F.F.T. (Fast Fourier Transform) exige de prendre certaines précautions : en particulier, le nombre de points de calcul doit être une puissance de 2, et l'intervalle de temps choisi pour l'analyse

doit être égal à un nombre entier de périodes. Voir pour plus de renseignements l'article de P. BRUNET [2].

Il est nécessaire de trouver un compromis dans le choix de T_{base} , N_{bpoint} et T_0 , de manière à avoir une résolution suffisante, une étendue spectrale suffisante dans le cas d'existence d'harmoniques, mais non exagérée (l'amplitude des harmoniques s'atténuant, les erreurs d'arrondis deviennent relativement plus importantes), et une valeur de N_{bpoint} pas trop grande pour assurer un temps de calcul raisonnable. Nous avons choisi $T_{\text{base}} = 10 \mu\text{s}$, $N_{\text{bpoint}} = 128$ et $T_0 = D$ (une période) soit $T_0 = 1,27 \text{ ms}$, et $f_0 = 787,4 \text{ Hz}$.

1.1. Signal directement décomposable

Il est indispensable de commencer par l'observation de spectres simples, ceux de signaux directement décomposables en somme de cosinus.

Tout d'abord, celui de $v(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ (figure 1a), t étant le temps défini en Annexe 1. On mesure alors une seule fréquence 787 Hz correspondant à celle de la fonction trigonométrique, d'amplitude 1 (figure 1b). Ce signal est monochromatique. De manière à sensibiliser les élèves au fait qu'un nombre entier de périodes est nécessaire, on peut leur faire étudier le spectre d'un signal de fréquence $1,5 f_0$ pour voir l'apparition d'harmoniques indésirables (figures 1c et 1d, attention les échelles des figures peuvent être différentes). Il nous semble cependant inutile à ce stade de l'étude d'évoquer l'existence de fenêtres de filtrage [2].

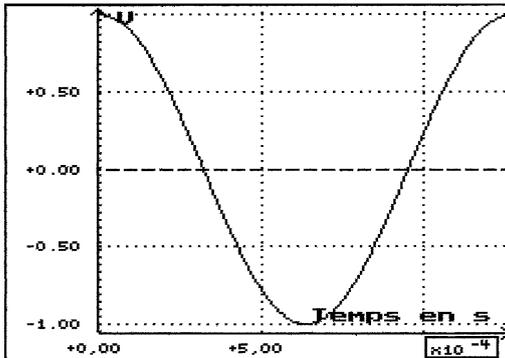


Figure 1a

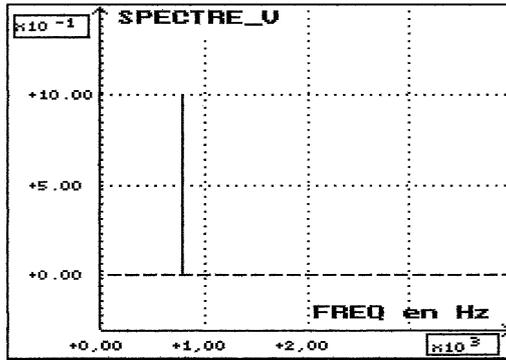


Figure 1b

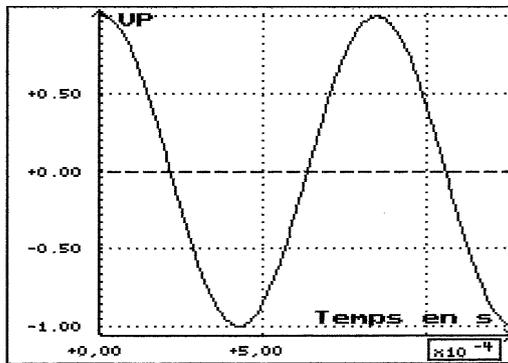


Figure 1c

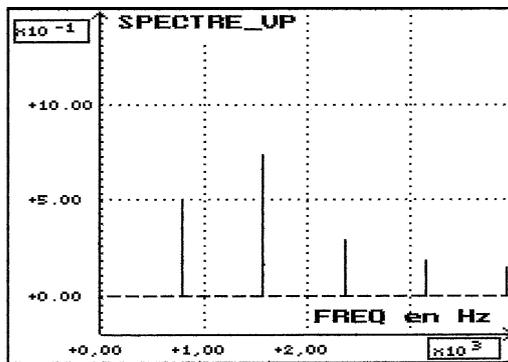


Figure 1d

La somme de deux sinusoïdes et d'une composante continue permet une première approche de la décomposition. On peut sur cet exemple simple comparer les fréquences des signaux, les amplitudes et surtout faire apparaître que la composante continue (fréquence nulle) n'est autre que la valeur moyenne du signal (celle que l'on mesure avec un multimètre en mode DC. On n'insistera jamais assez sur ce fait). Sur le spectre de $u(t) = 1 + \cos(2\pi f_0 t) + 0,5 \cos(4\pi f_0 t)$, (figures 1e et 1f), on mesure les amplitudes et fréquences suivantes :

Fréquence (Hz)	0	787	1574 (= 787 × 2)
Amplitude	1	1	0,5

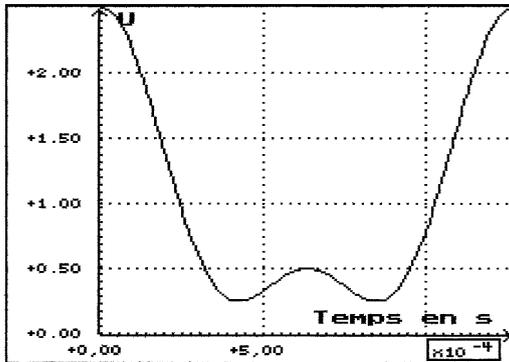


Figure 1e : Signal.

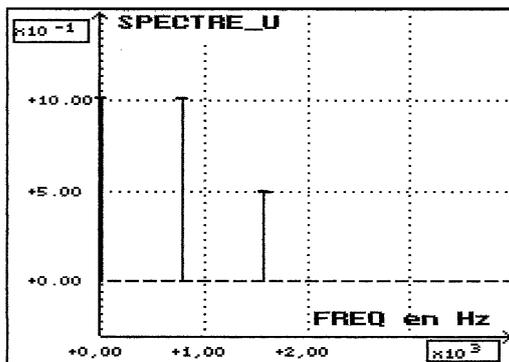


Figure 1f : Spectre.

On peut enfin étudier le spectre d'un signal modulé en amplitude (signal étudié lors d'un T.P. ultérieurement),

$$w(t) = \left(1 + \cos(2\pi f_0 t)\right) \cos(8\pi f_0 t)$$

(figures 1g et 1h). Les amplitudes différentes des deux composantes symétriques de part et d'autre de la porteuse sont sans doute dues à une erreur dans le calcul du spectre par le logiciel.

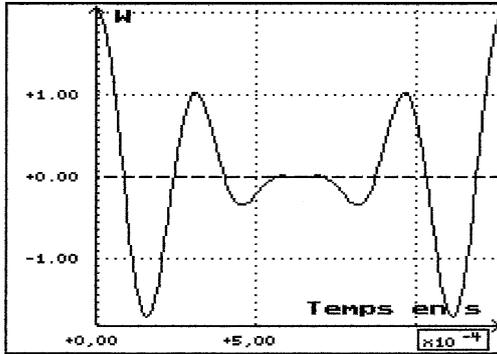


Figure 1g : Signal.

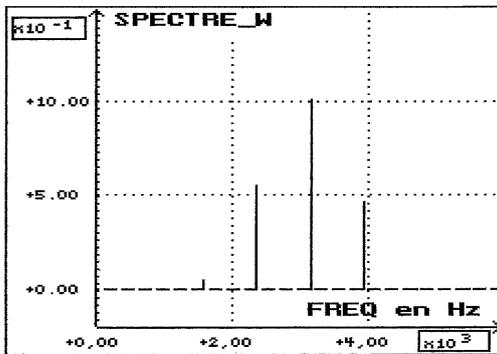


Figure 1h : Spectre.

1.2. Signal plus complexe

Nous terminerons cette étude par celle d'un signal «créneau» $z(t) = 0,5 - \text{crene}(33,96)^1$, de valeur moyenne nulle. Il s'agit ici de

1. Voir annexe 1 pour la fonction créneau.

vérifier l'existence des harmoniques impaires, et de constater que leur amplitude décroît en $1/k$ (k : rang de l'harmonique). Sur la figure 2a (spectre du créneau), nous mesurons les amplitudes et fréquences suivantes :

Fréquence (Hz)	787	2361 (787×3)	3935 (787×5)	5509 (787×7)	7083 (787×9)
Amplitude	$a = 0,64$	$0,215 (= a/3)$	$0,125 (= a/5)$	$0,09 (= a/7)$	$0,08$

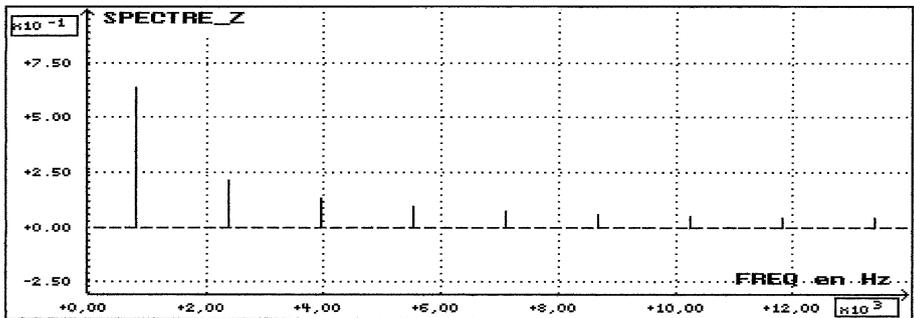


Figure 2a

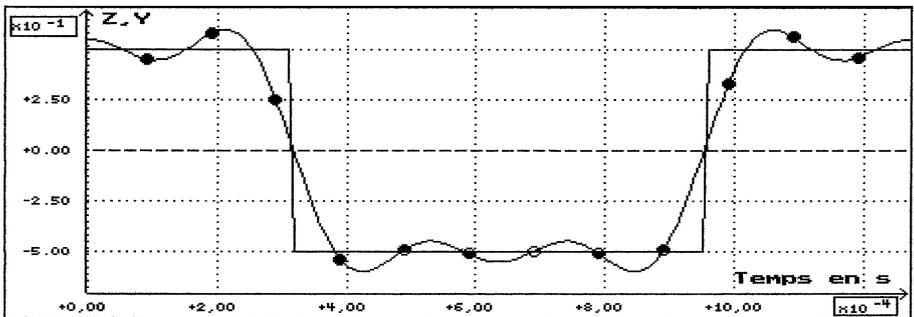


Figure 2b

Il est intéressant d'essayer de recomposer le signal à partir du fondamental et d'un petit nombre d'harmoniques (figure 2b). En utilisant les amplitudes mesurées précédemment, on programme le signal suivant dans la feuille de calcul :

$$y(t) = \left[\cos(2\pi f_0 t) + \cos(6\pi f_0 t) + \cos(10\pi f_0 t) \right] \times a$$

et on le compare à $z(t)$. Malgré la décroissance rapide de leurs amplitudes, les harmoniques de rangs élevés sont indispensables à une bonne reconstitution du signal.

La version 2 de PHYSCOPE donne la possibilité de reconstituer un signal à partir d'un spectre en choisissant les harmoniques de l'analyse spectrale précédente (option synthèse dans l'analyse de Fourier).

2. FILTRAGE D'UN SIGNAL

Nous utilisons dans ces travaux le programme de filtrage donné et commenté en Annexe 2. Nous nous limiterons ici aux exemples suivant : le filtrage d'un signal sinusoïdal bruité par un filtre plus ou moins sélectif, puis le filtrage d'un créneau par des filtres du premier et du deuxième ordre.

2.1. Signal bruité

Étudions le signal suivant : $U_e(t) = \cos(2\pi f_0 t) + 0,2 \cos(20\pi f_0 t)$. Nous voulons supprimer le signal de fréquence $10 f_0$. La première idée est d'utiliser un filtre passe-bas le plus simple, c'est-à-dire un passe-bas du premier ordre. Nous introduisons dans le programme les parties réelles et imaginaires de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(jf) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}}$$

pour laquelle nous avons choisi la fréquence de coupure égale à f_0 , fréquence du signal fondamental. Nous attendons donc une atténuation de 3 dB pour le fondamental, et 20 dB pour l'harmonique. Les résultats sont donnés sur les figures 3a, 3b, 3c et 3d). Les mesures des amplitudes et fréquences sont données dans le tableau suivant.

U_e		U_s	
Fréquence (Hz)	Amplitude	Fréquence (Hz)	Amplitude
787	1	787	0,71
7870	0,2	7870	$1,9 \cdot 10^{-2}$

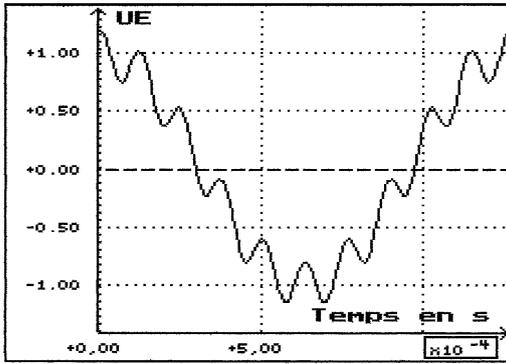


Figure 3a : Signal d'entrée U_e .

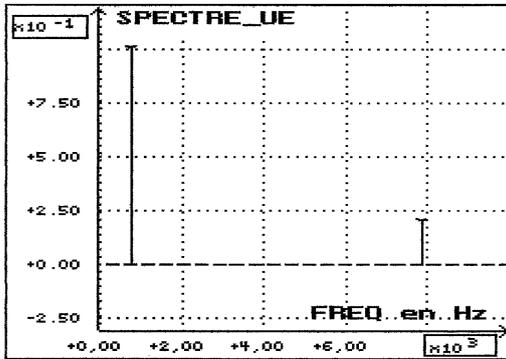


Figure 3b : Spectre de U_e .

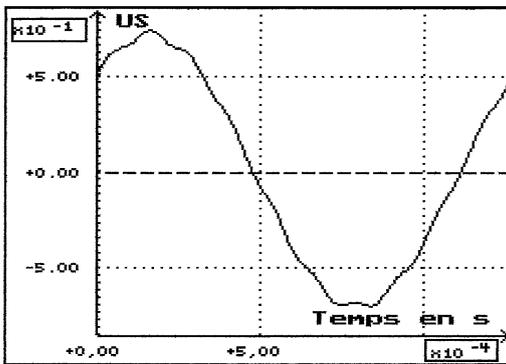


Figure 3c : U_s , signal filtré par le filtre du premier ordre.

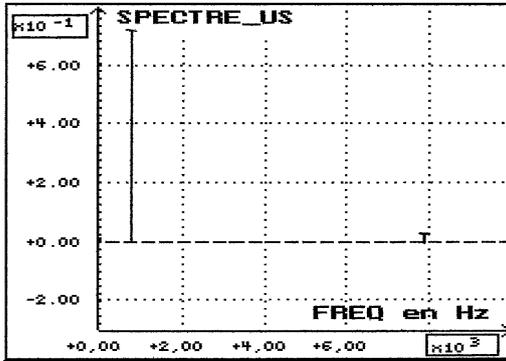


Figure 3d : Spectre de U_s .

Trois conclusions à tirer :

- les amplitudes mesurées sont celles attendues,
- il n'y a pas d'introduction de fréquences supplémentaires par le filtre (filtre linéaire),
- vérification du théorème de superposition qui permet de traiter indépendamment les signaux de fréquences différentes.

Le filtrage par le filtre du premier ordre n'est pas satisfaisant, aussi allons-nous utiliser un filtre passe-bas du deuxième ordre dont la fréquence propre est égale à f_0 . La nouvelle fonction de transfert à introduire dans le programme est la suivante :

$$\underline{H}(jf) = \frac{1}{1 - \frac{f^2}{f_0^2} + j \frac{f}{f_0 Q_0}}$$

Q_0 étant le facteur de qualité du filtre. Les résultats sont illustrés par les figures 3e et 3f. La composante de fréquence $10 f_0$ n'apparaît plus sur le spectre ce qui prouve l'efficacité plus importante du filtre du deuxième ordre. Cette meilleure efficacité du filtre du deuxième ordre est visible non seulement sur le contenu spectral mais aussi sur l'allure du signal.

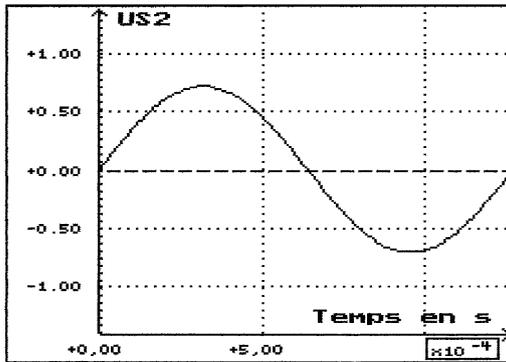


Figure 3e : U'_s , signal U_c filtré par le filtre du deuxième ordre, avec $Q_0 = 0,707$; cas critique.

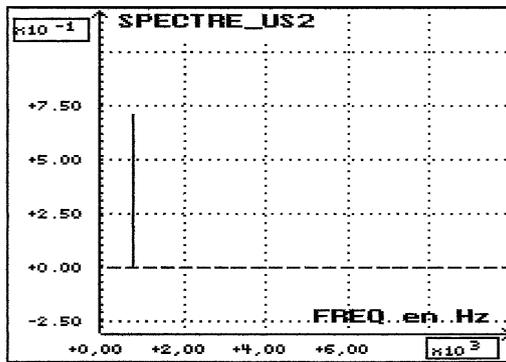


Figure 3f : Spectre de U'_s .

2.2. Filtrage d'un créneau

Nous allons de nouveau comparer l'efficacité d'un filtrage du premier et du deuxième ordre sur un signal créneau $z(t) = 0,5 - \text{crene}(33,96)$. Le filtre passe-bas du premier ordre est le même que le filtre précédent, sa fréquence de coupure est celle du créneau f_0 . Quant à celui du deuxième ordre, il s'agit d'un passe-bande :

$$\underline{H}(jf) = \frac{j \frac{f}{f_0} Q_0}{1 - \frac{f^2}{f_0^2} + j \frac{f}{f_0} Q_0}$$

de fréquence de résonance f_0 . Les résultats sont donnés sur les figures 4a, 4b, 4c, 4d, 4e et 4f. Les fréquences et amplitudes mesurées sont regroupées dans le tableau suivant : (nous rappelons les composantes du créneau pour pouvoir comparer l'efficacité des filtres)

Fréquences (Hz)	Amplitudes			
	Créneau	Filtre premier ordre	Filtre deuxième ordre ($Q_0 = 0,5$)	Filtre deuxième ordre ($Q_0 = 10$)
787	0,64	0,45 ($= 0,64/2^{0,5}$)	0,64	0,64
2361	0,215	0,07	0,125	non mesurable
3935	0,125	0,025	0,048	non mesurable
5509	0,09	0,01	0,02	non mesurable

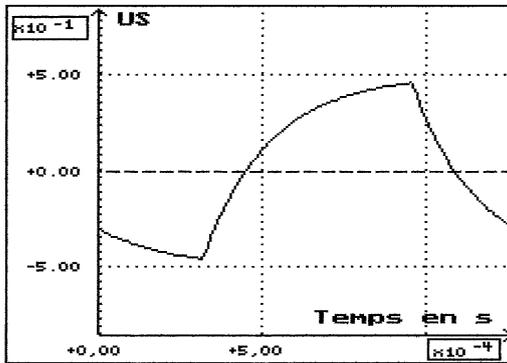


Figure 4a : Signal filtré par le passe-bas du premier ordre.

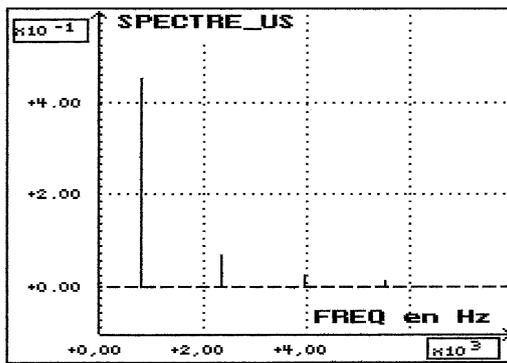


Figure 4b : Spectre du signal filtré par le passe-bas du premier ordre.

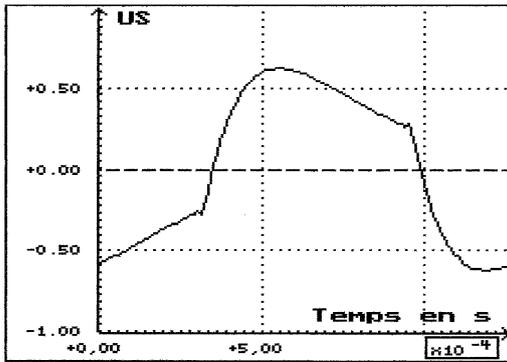


Figure 4c : Signal filtré par le passe-bande du deuxième ordre avec $Q_0 = 0,5$.

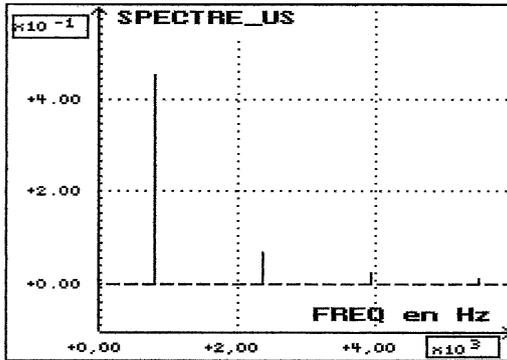


Figure 4d : Spectre du signal filtré par le passe-bande du deuxième ordre avec $Q_0 = 0,5$.

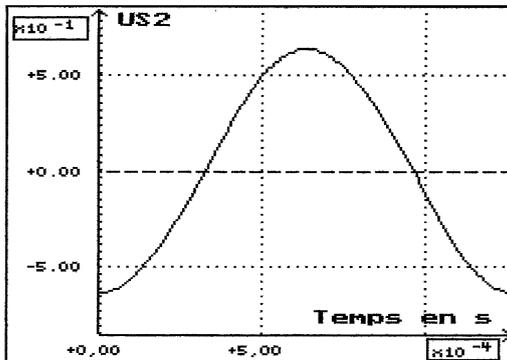


Figure 4e : Signal filtré par le passe-bande du deuxième ordre avec $Q_0 = 10$.

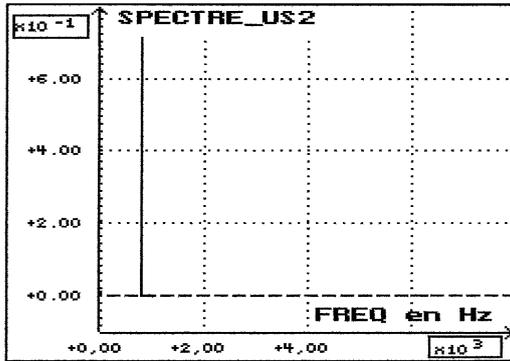


Figure 4f : Spectre du signal filtré par le passe-bande du deuxième ordre avec $Q_0 = 10$.

Il est intéressant de remarquer que l'on obtient avec le filtre du premier ordre un signal semblable à la tension aux bornes d'un condensateur d'un circuit R-C soumis à un échelon de tension. N'est-ce pas le circuit à partir duquel le filtre passe-bas fondamental du premier ordre a été introduit ? Il est important de profiter de ce résultat pour insister sur le fait que la fonction de transfert a été obtenue à partir de l'équation différentielle du circuit, et que cette même fonction de transfert permet de retrouver l'équation différentielle. Les deux approches sont liées.

L'efficacité du filtre du deuxième ordre et l'importance du facteur de qualité sur la sélectivité sont bien illustrées par les mesures. Pour $Q_0 = 10$, seul le fondamental du créneau subsiste, et l'on retrouve un signal sinusoïdal.

3. COMPARAISON D'UN FILTRE ÉLECTRONIQUE ET D'UN FILTRE NUMÉRIQUE

Nous avons consacré une partie du T.P. cours sur les filtres à la comparaison d'un filtre passe-bande du deuxième ordre, avec son équivalent simulé par le programme décrit en Annexe 2.

Le filtre étudié est celui représenté ci-après avec $R = 1 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 33 \text{ k}\Omega$, $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$. Il s'agit d'un filtre passe-bande du deuxième ordre dont les paramètres théoriques sont : une fréquence de résonance $f_r = 392 \text{ Hz}$, un facteur de qualité théorique $Q_0 = 4,06$, un gain en tension

à la résonance $G_0 = -16,5$. Nous avons mesuré ces trois grandeurs sur un montage, soit : $f_r = 385$ Hz, $Q_0 = 4$, et $G_0 = -14,8$.

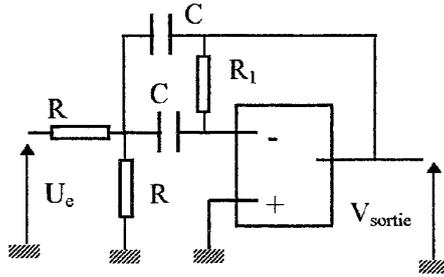


Figure 5

Dans le programme, nous avons introduit les parties réelle et imaginaire du filtre dont la fonction de transfert est celle donnée au § 2.2. multipliée par le gain G_0 et avec les valeurs f_r et Q_0 mesurées précédemment.

Nous avons réalisée l'acquisition simultanée des signaux U_e et V_{sortie} , avec $N_{\text{point}} = 128$ et $T_{\text{base}} = 41 \mu\text{s}$, de manière à avoir une période du signal. Le signal U_e a été filtré par le filtre informatique pour donner le signal U_{S1} que nous avons comparé à V_{sortie} . Les figures 6 montrent la superposition des trois signaux dans les cas suivants : signal sinusoïdal de fréquence f_r (figure 6a), signal créneau de fréquence f_r (figure 6b) et signal créneau de fréquence 230 Hz ($< f_r$) (figure 6c).

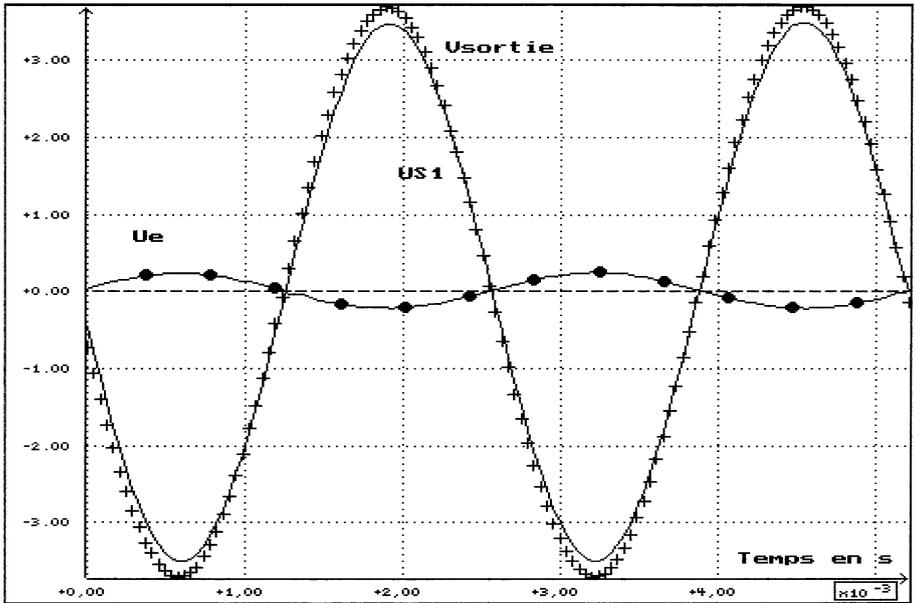


Figure 6a : Filtre passe-bande du second ordre.

Courbe U_e : Unité : non définie - Style : continu rond -

Nombre de points : 128 -

Min. = 0,2138 - Max. = 0,2513

Courbe V_{sortie} : Unité : non définie - Style : discret croix -

Nombre de points : 128 -

Min. = - 3,7072 - Max. = 3,6997

Courbe U_{S1} : Unité : non définie - Style : continu -

Nombre de points : 128 -

Min. = - 3,5009 - Max. = 3,4977

Abscisse : temps en s

Nombre de points : 128 durée : 41 μ s.

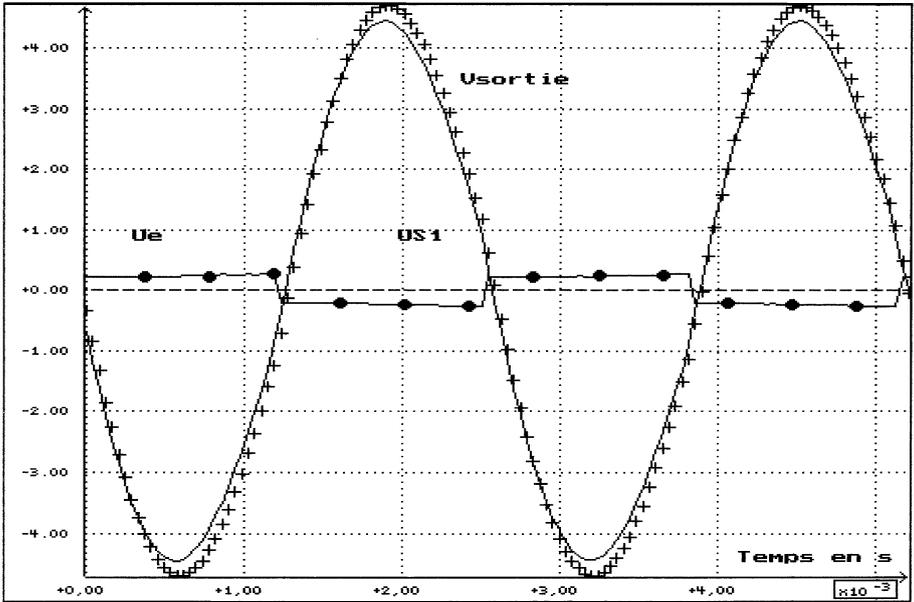


Figure 6b : Filtre passe-bande du second ordre.

Courbe U_e : Unité : non définie - Style : continu rond -
 Nombre de points : 128 -
 Min. = -0,2588 - Max. = 0,2763

Courbe V_{sortie} : Unité : non définie - Style : discret croix -
 Nombre de points : 128 -
 Min. = -4,7049 - Max. = 4,6999

Courbe U_{S1} : Unité : non définie - Style : continu -
 Nombre de points : 128 -
 Min. = -4,4569 - Max. = 4,4522

Abscisse : temps en s

Nombre de points : 128 durée : 41 μ s.

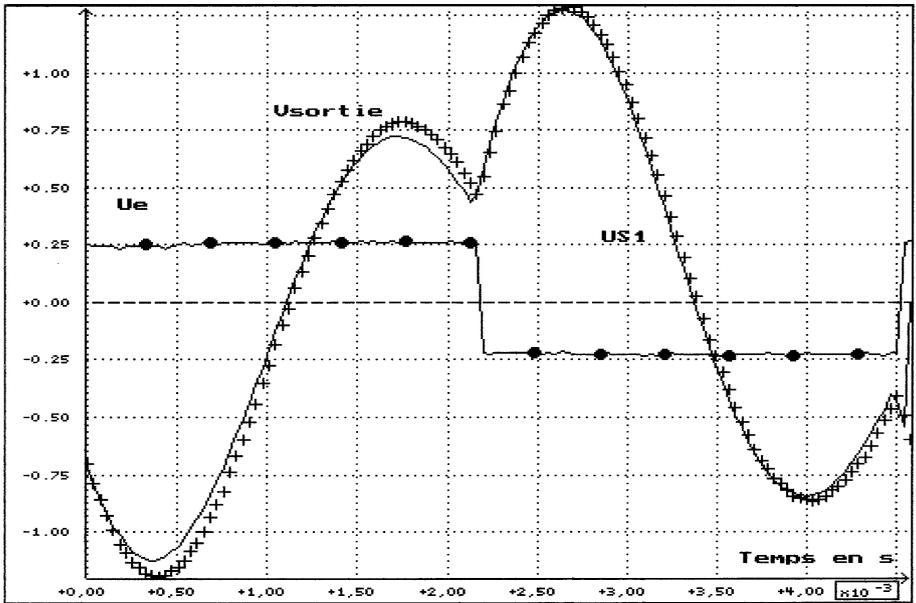


Figure 6c : Filtre de second ordre.

Courbe U_e : Unité : non définie - Style : continu rond -
 Nombre de points : 128 -
 Min. = -0,2363 - Max. = 0,2688

Courbe V_{sortie} : Unité : non définie - Style : discret croix -
 Nombre de points : 128 -
 Min. = -1,1965 - Max. = 1,2866

Courbe U_{S1} : Unité : non définie - Style : continu -
 Nombre de points : 128 -
 Min. = -1,1247 - Max. = 1,271

Abscisse : temps en s

Nombre de points : 128 durée : 36 μ s.

On trouve un très bon accord entre la simulation et la mesure, ce qui permet d'affirmer que le filtre est bien représenté par sa fonction de transfert.

Le temps de réponse de la carte nous a forcé à choisir une faible valeur de la fréquence de résonance de manière à pouvoir réaliser une acquisition correcte. Une fréquence plus grande nous aurait forcé à acquérir plusieurs périodes d'où une diminution de la résolution.

4. ÉVOLUTION DU SPECTRE DU SIGNAL APRÈS FILTRAGE PAR UN DÉTECTEUR DE CRÊTE

Cette étude nous a été proposé lors de la journée de présentation des programmes de Sup PC-SI, aussi nous ne ferons que rappeler les résultats et les conclusions.

Nous comparons sur les figures 7a, 7b, 7c et 7d le résultat du filtrage d'un signal sinusoïdal (de fréquence 135,8 Hz) pour deux valeurs du produit RC.

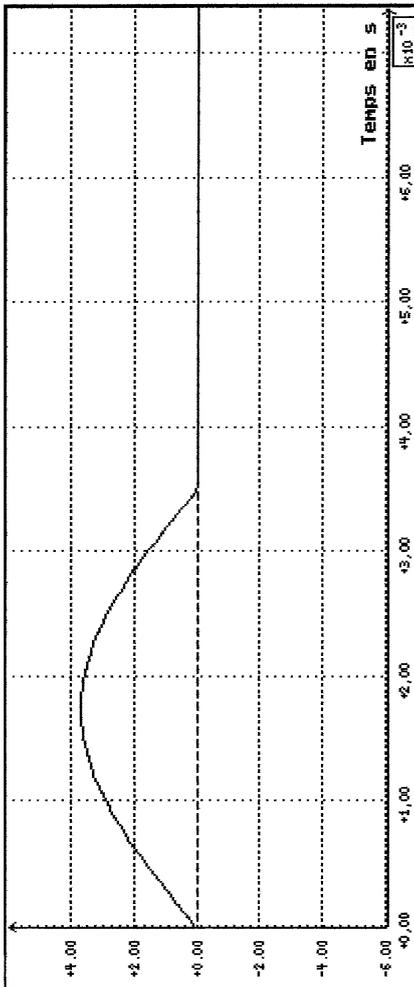


Figure 7a : Signal A analyser = U_s ; RC infini.

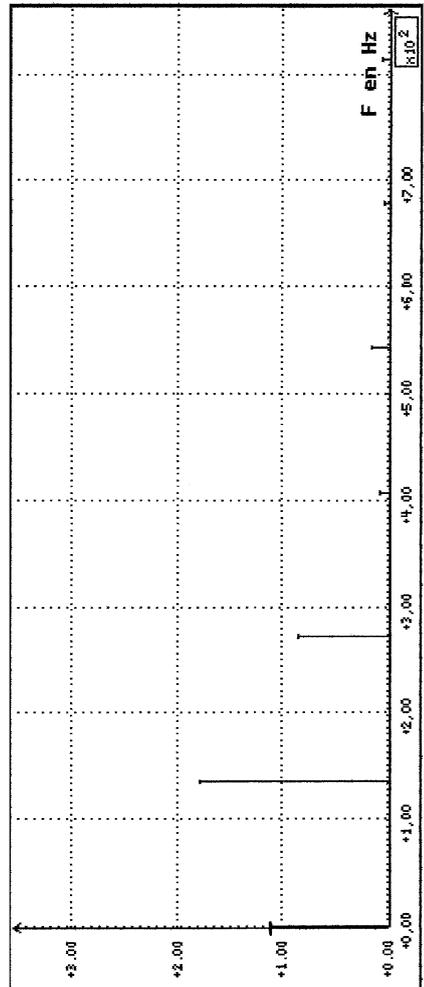


Figure 7b : Spectre (amplitude) UF = 135,8 Hz. RC infini.

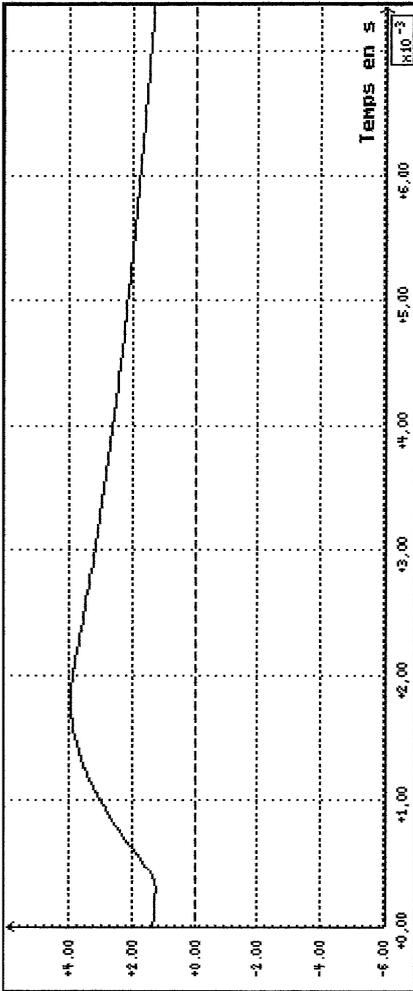


Figure 7c : Signal A analyser = U_s ;
RC = 5ms

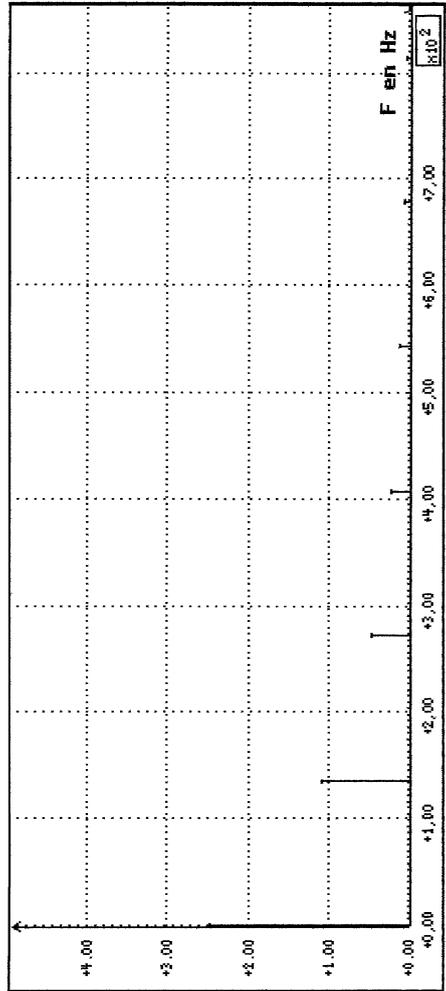


Figure 7d : Spectre (amplitude)
UF = 135,8 Hz ; RC = 5 ms.

A remarquer : L'enrichissement du signal par la diode pour RC infini.
L'importance croissante de la composante continue avec l'augmentation
de RC.

CONCLUSION

Les différents travaux que nous avons proposés sont aisément réalisables par les élèves. Nous pensons qu'ils illustrent bien l'étude spectrale que l'on doit mener en SUP PC-SI dans le cadre du programme.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Communications de la journée nationale d'information sur les programmes de physique des classes préparatoires aux grandes écoles de la filière PC-SI ; 17 mai 1995.
- [2] P. BRUNET : «*Utilisation d'un analyseur de spectre associé à un système d'acquisition de données*», 1994, B.U.P. n° 768, pp. 1527-1549

Annexe 1

Nbpoint : nombre de points d'échantillonnage.

Tbase : durée d'échantillonnage.

La durée d'un enregistrement est donc égale à $Tbase \times (Nbpoint - 1)$.
Les valeurs de ces deux variables sont initialisables dans le mode acquisition.

t : tableau «temps» de Nbpoint espacés de Tbase, soit :

$$t \in [0, Tbase(Nbpoint - 1)]$$

crene(n_0, n_1) : tableau de Nbpoint valeurs, prenant la valeur 1 entre les éléments de rang n_0 et n_1 , et 0 ailleurs.

Annexe 2

Programme de simulation d'un filtre

Le programme suivant permet de calculer le signal résultant du filtrage de n'importe quel signal (entré dans la feuille de calcul ou acquis par carte d'acquisition). Le programme calcule l'amplitude et la phase, ce que ne permettent pas les exemples donnés dans PHYSCOPE. Le listing du programme est donné ci-après. Les commentaires ont été écrits en italique. Nous avons laissé l'exemple du signal créneau filtré par un filtre du deuxième ordre.

Si l'on désire filtrer un signal acquis, il suffit de supprimer les lignes de définition de U_e , de nommer le signal acquis U_e , ou bien de définir dans la feuille $U_e = \langle \text{nom du signal acquis} \rangle$.

En ce qui concerne le filtre, il suffit d'entrer la partie réelle (Refi) et la partie imaginaire (Imfi).

Le signal filtré se nomme U_s .

Nous avons, dans le texte, réalisé le filtrage sur une seule période, la fréquence du signal étant appelée f_c , dans le programme, mais il est possible de travailler à partir d'un signal U_e contenant plusieurs périodes. Il faut par contre nécessairement que le nombre de périodes soit entier. Les seules parties modifiables du programme sont :

- la définition de U_e ,
- la définition du filtre.

Listing

```

fc=1/((nbpoint-1)*tbase)    {fréquence minimale après FFT}

{
    Ue : signal d'entrée
}
Ue=crene(nbpoint/4+1,3*nbpoint/4)-0.5    {signal créneau}

{
    calcul du spectre de Ue
}
REue=fftr(Ue)    {partie réelle du spectre}
IMue=ffti(Ue)    {partie imaginaire du spectre de Ue}
fe=1/tbase    {fréquence d'échantillonnage}
f1=rampe(0,fe)    {génération des fréquences}
    {1ère moitié du spectre n<=nbpoint/2+1}
    {2ème moitié du spectre n>nbpoint/2+1}
{il faut symétriser le tableau par rapport à npoint/2}
nsur2=nbpoint/2
fsym=fe/(nbpoint-1)*nsur2    {f commence à 0}
tfsy=table(fsym)    {table de fsym}
f=f1*crene(1,nsur2)+(2*tfsy-f1)*crene(nsur2+1,nbpoint)

    { FILTRES}
q0=0.707
x=f/fc
denom=module(1-x*x,x/q0)
Refi=x*x/q0/q0/denom/denom
Imfi=-x*(1-x*x)/q0/denom/denom

    {calcul FFT Vs}
{antisymétrisation de IMfi}
IMfi=IMfi*crene(1,nsur2)-IMfi*crene(nsur2+1,nbpoint)

{produit H(jf)*spectre de Ue}
REus=Refi*REue-IMfi*IMue
IMus=REue*IMfi+Refi*IMue
Us=rfft(REus,IMus)    {signal filtré}

```