

A propos de la transformation générateur de tension - générateur de courant

par J.-M. DUSSEAU

Laboratoire ERES - Université Montpellier II
Groupe IUFM - 2, place M. Godechot - B.P. 4152
34092 Montpellier Cedex

La transformation d'un générateur (de tension) de Thévenin en un générateur (de courant) de Norton et sa réciproque s'insère dans un ensemble plus vaste de transformations de circuits électriques appelé dualité. La dualité est souvent présentée dans les ouvrages d'enseignement de l'électricité comme une notion utile pour déterminer la distribution des courants dans un réseau qui comporte des sources de courant. En effet, dans le réseau dual le rôle des sources de tension est souvent plus évocateur. Or ces transformations possèdent une réalité expérimentale, et cet article a pour but d'en montrer un exemple de mise en œuvre.

1. NOTION SUR LA DUALITÉ

Lorsque pour un réseau donné, on résout les équations de Kirchhoff par les méthodes successives des mailles et des paires de nœuds, on observe un parallélisme rigoureux entre les forces électromotrices, les impédances et les courants de maille d'une part, et les courants des sources, les admittances et les tensions entre paires de nœuds d'autre part.

Par exemple [1], dans le cas très simple des deux circuits de la figure 1, la loi d'Ohm s'écrit dans chaque cas :

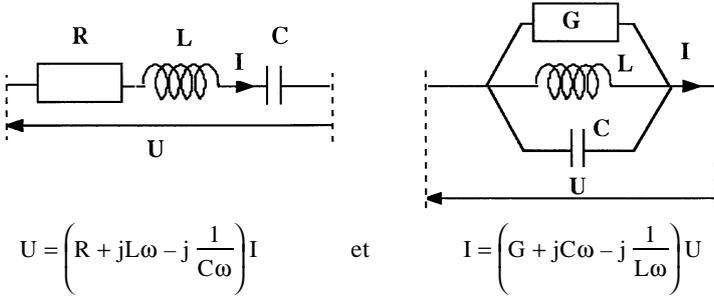


Figure 1 : Identité formelle des lois régissant le comportement électrique de deux circuits différents.

Lorsque en généralisant ceci, on constate que les relations qui régissent le comportement électrique de deux circuits ont la même forme, à savoir : $\{E\} = \{Z\} \{I\}$ et $\{I\} = \{Y\} \{U\}$, de tels réseaux sont dits duaux (ou réciproques l'un de l'autre).

2. CONSTRUCTION DU RÉSEAU DUAL D'UN RÉSEAU DONNÉ

Pour construire le réseau dual d'un réseau donné (figure 2), on place un point à l'intérieur de chacune des mailles de ce dernier et un point quelconque à l'extérieur du circuit. Ces points seront les nœuds du circuit dual cherché. Entre chaque paire de nœuds on insère une branche pour chaque élément commun aux deux mailles qui entourent ces nouveaux nœuds. On place alors sur chaque branche l'élément dual de l'élément qu'elle traverse.

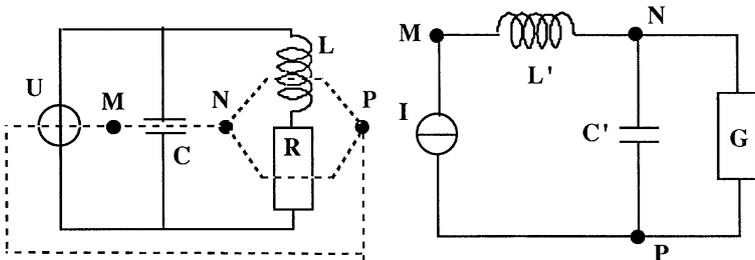


Figure 2 : Construction du réseau dual d'un réseau donné.

3. VALEURS DES ÉLÉMENTS RÉCIPROQUES

A un générateur de Thévenin (de tension E , d'impédance interne Z_g) correspond un générateur de Norton (de courant $I = \frac{E}{Z_g}$ et d'admittance $Y = \frac{1}{Z_g}$) et réciproquement.

Une résistance R et une conductance $G = \frac{R}{R_o^2}$, où R_o^2 est une résistance de normalisation de valeur arbitraire, sont duales l'une de l'autre [2].

A une inductance L correspond par dualité un condensateur C' de valeur L/R_o^2 et réciproquement à un condensateur C correspond une inductance L' de valeur $R_o^2 C$.

La résistance de normalisation comme son nom l'indique permet de conserver la dimension des éléments duaux.

Le choix de R_o est essentiellement guidé par des considérations pratiques. En effet, si nous attribuons à R_o la valeur 1 k Ω , la valeur du condensateur dual d'une inductance de 0,1 H sera 0,1 μ F. L'ordre de grandeur de chacune de ces deux valeurs correspond à celui de composants fréquemment rencontrés dans des montages d'électronique au lycée ou à l'université. Il n'en serait pas de même par exemple pour $R_o = 1 \Omega$ ou pour $R_o = 1 \text{ M}\Omega$, puisqu'à cette même inductance de 0,1 H, correspondrait des condensateurs de valeur respectivement 0,1 F ou 0,1 pF.

4. MISE EN ŒUVRE EXPÉRIMENTALE

Soit le circuit de la figure 3. Le générateur de tension sinusoïdale E a pour résistance interne $R_g = 50 \Omega$. L est une bobine d'inductance de valeur 0,2 H et de résistance interne mesurée en courant continu $R_b = 26 \Omega$; cette bobine est commercialisée par la société SÉCRÉ Composants. C est un condensateur, considéré comme parfait, de valeur 0,2 μ F. Z est une impédance quelconque. Par commodité, nous utilise-

rons pour $|Z|$ une boîte de résistances dont les valeurs peuvent varier de 0 à 100 k Ω par pas de 1 Ω .

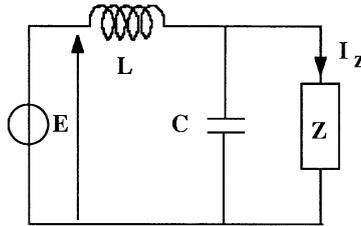


Figure 3 : Circuit expérimental étudié.

Dans un premier temps, en ne prenant pas en compte les résistances internes du générateur et de la bobine, on déduit que le courant circulant dans Z a pour valeur complexe :

$$I_z = \frac{E}{jL\omega + Z(1 - LC\omega)}$$

A la pulsation de résonance $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, le courant qui circule dans l'impédance Z est indépendant de la valeur de cette impédance. Ce dispositif est connu sous le nom de système Boucherot à courant constant [3].

Pour les étudiants, ce résultat obtenu de manière très simple est extrêmement surprenant. Ils le vérifient en utilisant divers condensateurs de valeurs inférieures à 200 nF, et diverses bobines de valeurs inférieures à 200 mH. Cela leur montre que au-delà des manipulations calculatoires, l'aspect physique des phénomènes ne doit jamais être perdu de vue.

Ici, l'explication est grandement facilitée par l'utilisation d'une transformation duale partielle (figure 4a), où le générateur de Norton qui apparaît, est le transformé d'un générateur de Thévenin ayant pour impédance interne la bobine de la figure 3. La pulsation à laquelle se produit la résonance se conserve par transformation duale. La bobine et le condensateur étant alors montés en parallèle, on a, à la résonance, une source de courant de résistance interne équivalente infinie, qui débite donc un courant constant dans l'impédance Z quelle que soit la valeur de cette dernière.

Mais lors de l'expérimentation, il est nécessaire de tenir compte de la valeur des résistances internes R_g du générateur et R_b de la bobine. Posons $R_t = R_b + R_g$.

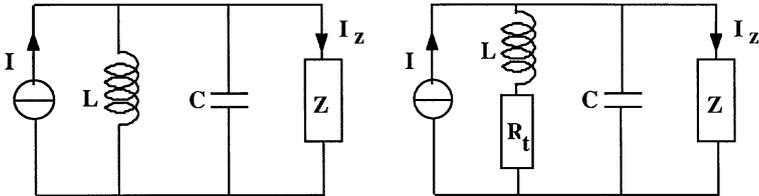


Figure 4 : a) Circuit expérimental après transformation du générateur de tension en générateur de courant - b) en tenant compte des résistances internes.

A la résonance, l'expression complexe de la valeur du courant dans l'impédance Z est :

$$I_z = \frac{E}{R_t + j(L + ZR_t C)\omega_0}$$

Ce courant dépend de la valeur de l'impédance Z . Lorsque Z est un court-circuit, il a pour valeur $I_z = \frac{E}{R_t + jL\omega_0}$. Lorsque le module de l'impédance Z augmente, ce courant diminue.

Calculons, toujours à la résonance la valeur du module Z pour lequel la valeur efficace du courant dans Z n'est plus que les 90 % de la valeur en court-circuit.

$$\text{De } \frac{E}{\sqrt{R_t^2 + (L + ZCR_t)^2 \omega_0^2}} = 0,9 \frac{E}{\sqrt{R_t^2 + L^2 \omega_0^2}}$$

on déduit $|Z| = 1470 \Omega$.

Autrement dit, pour le circuit réel, le courant dans Z ne variera pas de plus de 10 % tant que $|Z|$ ne dépassera pas une valeur $|Z_0|$ égale à 1470Ω .

Ceci peut être plus facilement vu comme étant dû au fait que le générateur de Norton, équivalent (figure 4b) au générateur de Thévenin

(ayant pour impédance interne R_t en série avec L), ne possède pas une admittance interne nulle (ou une résistance interne infinie).

L'admittance des deux branches en parallèle contenant la bobine et le condensateur a pour expression :

$$\underline{Y}_r = jC\omega_o + \frac{1}{R_t + jL\omega_o} = \frac{1 - LC\omega_o^2 + jR_tC\omega_o}{R_t + jL\omega_o}$$

Au voisinage de la résonance on suppose $R < L\omega_o$, d'où l'approximation de cette admittance $\underline{Y}_{ar} \approx \frac{1}{jL\omega_o} + jC\omega_o + \frac{RC}{L}$ qui conduit au circuit équivalent de la figure 5.

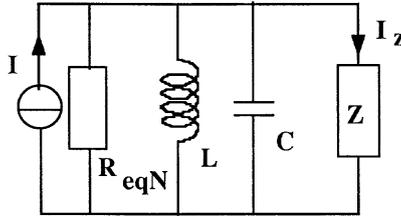
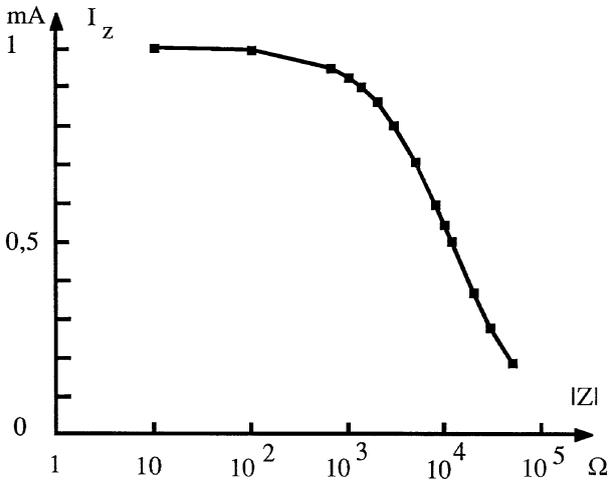


Figure 5 : Représentation équivalente approchée du circuit de la figure 4b.

A la résonance le circuit bouchon présente une impédance infinie et la résistance du générateur de Norton vaut $R_{eqN} = \frac{L}{CR_t}$ soit ici 13 k Ω .

Le courant circulant dans Z sera les 90 % du courant de court-circuit pour une valeur $|Z_o|$ de $|Z|$ égale à $\frac{1}{9} R_{eqN}$ soit 1460 Ω .

Expérimentalement on trace la variation du courant dans Z en fonction de $|Z|$ (courbe 1), sur laquelle, en tenant compte de l'impédance interne de l'ampèremètre, on détermine une valeur de $|Z_o|$ égale à 1420 Ω .



Courbe 1 : Variation du courant I_z en fonction de $|Z|$.

Lorsque la valeur du courant dans Z est égale à la moitié du courant initial de court-circuit, cela signifie que le courant fourni par le générateur se partage également entre la résistance R_{eqN} et l'impédance Z . On obtient donc ainsi une détermination expérimentale de R_{eqN} égale à 12 kΩ.

5. MISE EN ÉVIDENCE DES PROPRIÉTÉS DUALES

Soit le circuit (figure 6a) dual du circuit précédemment étudié (figure 3). Par dualité, on doit observer que, à la résonance, la tension V aux bornes de l'admittance Y est indépendante de Y . Pour réaliser le générateur de courant, on utilise le générateur de tension précédant en lui adjoignant en série une résistance R_N de forte valeur (100 kΩ). Le condensateur et la bobine étant duaux l'un de l'autre sont les mêmes que ceux utilisés précédemment.

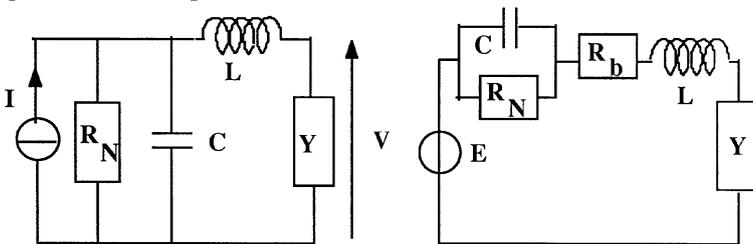
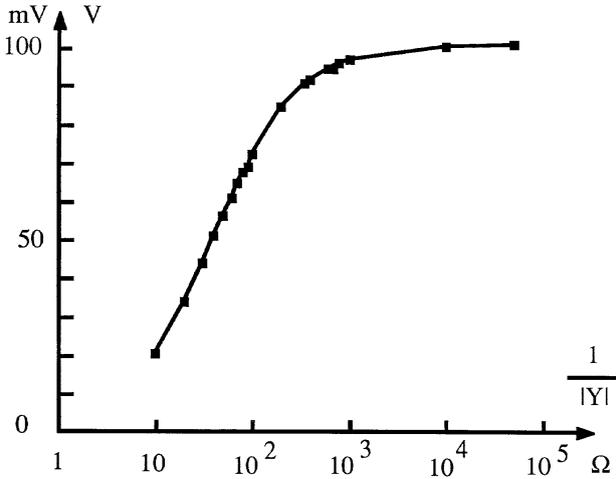


Figure 6 : a) Circuit dual de celui représenté figure 3 - b) Après transformation du générateur de courant en un générateur de tension équivalent.

La courbe 2 représente la variation de la tension V aux bornes de l'admittance Y en fonction de l'inverse du module de cette admittance. On observe, à la fréquence de résonance de L et C , que pour des valeurs de $1/|Y|$ diminuant depuis l'infini jusqu'à 350Ω , la tension V est constante à 10 % près.



Courbe 2 : Variation de la tension V en fonction de $1/|Y|$.

Ceci s'explique par la transformation du générateur de Norton en un générateur de Thévenin (figure 6b), qui met en évidence un circuit série résonnant, l'impédance due au condensateur étant à la fréquence de résonance bien inférieure à la résistance R_N . Cette dernière n'étant pas infinie, on peut calculer son équivalent série $\left(R_{Ns} = \frac{R_N}{1 + R_N^2 C^2 \omega_0^2} \right)$, soit avec les valeurs des éléments considérés ici, 10Ω .

$$\text{La tension } V \text{ a alors pour valeur : } V = \frac{E}{1 + Y(R_b + R_{Ns})}.$$

Si $|Y| = 0$, $V = E$, et V diminue théoriquement de 10 % pour :

$$\frac{1}{|Y|} = 9 (R_b + R_{Ns}) = 324 \Omega$$

Lorsque cette tension V a diminuée de moitié, la valeur de $\frac{1}{|Y|}$ correspond à celle de $R_b + R_{Ns}$ soit théoriquement 36Ω pour 40Ω mesurés.

6. CONCLUSION

Nous avons voulu, à travers ces montages très simples, mettre en évidence la réalité expérimentale des transformations duales, en insistant tout particulièrement sur l'aspect concret de l'équivalence générateur de tension - générateur de courant, aspect qui ne nous semble pas assez souligné dans les ouvrages d'enseignement.

REMERCIEMENTS

Il m'est agréable de remercier mon collègue Monsieur J. MICHEL, Maître de conférences à l'Université MONTPELLIER II, pour nos discussions amicales sur ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. MILSANT : «*Cours d'électronique*» - Tome 1 : circuits à régime variable, Eyrolles.
- [2] J. ORTUSI : «*Étude mathématique des circuits de l'électronique*» - Tome 1 : analyse des circuits, Masson.
- [3] F. MILSANT : «*Problèmes d'électronique avec leurs solutions*» - Tome 1 : circuits à régime variable, Eyrolles.