

Un son pur est-il sinusoïdal ?

par Fatou GAYÉ
École Normale Supérieure - Bamako - Mali

RÉSUMÉ

Dans cet article, on examine d'un point de vue critique la vulgarisation de la décomposition spectrale d'un son. Cette notion, souvent mal comprise, présente l'inconvénient majeur de laisser «entendre» que notre perception du son est trop fortement liée à sa représentation mathématique sous la forme d'une série de fonctions sinusoïdales.

INTRODUCTION

Un étudiant de deuxième année de physique, probablement mal intentionné, me posa un jour la question suivante :

L'étudiant. - Madame, pourquoi décomposez-vous ce son périodique en une série de sons *sinusoïdaux* ?

J'avoue humblement avoir hésité quelques instants. Comment cet étudiant a-t-il osé transgresser le tabou de la série de Fourier ? Tous les cas de figure de l'analyse harmonique d'un signal défilèrent en un instant dans mon esprit. Passe encore pour les phénomènes de résonance, mais pourquoi donc prisme et réseau décomposent-ils la lumière de manière *harmonique* ? J'imaginai alors rapidement quelques réponses salvatrices possibles :

1. Le professeur (*Engageant*). - Vous l'apprendrez plus tard en licence de physique. C'est passionnant.
2. Le professeur (*Catégorique et tranchant*). - C'est Fourier qui l'a dit en 1820. Apprenez votre cours de mathématiques.
3. Le professeur (*Profondément intellectuel*). - C'est un artifice mathématique, analogue à l'approximation d'une courbe par un développement limité au voisinage d'un point donné, mais qui s'applique à des fonctions périodiques. Cela facilite les calculs.
4. Le professeur (*Astucieux et embobineur*). - L'expérience montre que les capteurs acoustiques, et en particulier l'organe majeur de votre oreille, la cochlée, décompose tout son complexe en des sons sinusoïdaux appelés «sons purs». C'est pourquoi l'analyse d'un son complexe passe toujours par l'analyse de Fourier.

Mais je ne répondis rien, car je m'aperçus rapidement que toutes les réponses étaient fausses. La première parce que, depuis la disparition de l'acoustique comme partie intégrante du cours normal de la physique, ce problème ne semble pas digne d'être évoqué en licence (voire même à un niveau supérieur). Cette réponse est cependant intéressante car elle montre la bonne volonté du professeur pour engager l'étudiant motivé à faire des études longues. La deuxième réponse est aussi fausse parce que ce n'est pas Joseph Fourier qui a eu cette idée, mais c'est vrai qu'il faut apprendre très tôt aux futurs physiciens à se réfugier derrière le cours de mathématiques, cela évite d'avoir à se poser ce genre de questions. La troisième réponse est fausse, surtout par l'utilisation du terme excessif d'artifice. Si l'on prolonge cette idée, tous les spectres dits de Fourier (acoustiques et autres) sont des artifices mathématiques qui facilitent les calculs. Un son est *réellement* la superposition de sinusoides. Enfin la quatrième réponse fausse hypocritement des données expérimentales connues de tous [1] c'est pour cela la plus mauvaise ! Elle permet de se retrancher derrière le mystère physiologique des organes de l'audition, dont seuls quelques physiciens élus possèdent la clé.

Dans le taxi qui me ramenait à ma modeste case, j'étais visiblement fatiguée car, tel un adroit disc-jockey, le chauffeur zappa rapidement du riff griffu d'un rock flamboyant vers une mélodie sucrée évoquant la voltige d'une ballerine digne du Bolchoï. Puis, d'un geste précis, il pondéra subtilement les sensors de l'égaliseur paramétrique trente-deux bandes de l'autoradio. Les yeux rivés sur les pulsations frénétiquement humaines des LED [2] vertes du vu-mètre, vaguement stimulée par des résonances organiques profondes mollement forcées par la membrane carbone des subwoofers 30 cm à filtres actifs noyés dans la mousse de la plage arrière, douillettement enveloppée par le bain nébuleux des reverbs d'une percussion à peau, délicatement mis en forme par un très léger noise-gate, je méditais...

Serai-je incapable d'enseigner en classe de seconde française [3], dont les programmes intransigeants mentionnent clairement la nécessité de traiter l'analyse spectrale de Fourier, de préférence en utilisant des algorithmes de transformée de Fourier rapide ? J'ouvris studieusement un livre qui vantait les mérites du fenêtrage de Welch, j'hésitai quelque peu sur les figures de mérite de Parzen et de Hanning, puis comme ultime refuge, je m'endormis. Il faut reconnaître que si mes connaissances en physique sont limitées, mon imagination débordante compense quelque peu ces lacunes, et je me surprends souvent à rêver. C'est

un songe de physicienne mal dans sa peau que j'ai l'impudeur de soumettre à l'analyse du lecteur.

SONOPHOBIE

Composants nécessaires

1. une jeune hippopotame¹,
2. Séfou Jophriré, philosophe éminent, (dénommé par la suite «le philosophe»),
3. un serpent python noir, de longueur environ cinq mètres,
4. une flûte nasale, si possible celle de James Cook, sinon n'importe quelle flûte nasale des Philippines peut faire l'affaire,
5. un serpent, si possible celui de la collection instrumentale du muséum, sinon n'importe quel serpent même mal accordé peut faire l'affaire.

L'hippopotame et le philosophe dans une île du Niger. On ne voit pas l'hippopotame, qui est sous l'eau. C'est le matin. Au loin, on entend l'appel du muezzin, puis le simple chant d'un vif berger². Le philosophe s'incline vers l'orient, et fait une prière. Au bout d'une demi-heure, l'hippopotame émerge bruyamment de l'eau en faisant des bulles.

Le philosophe. - Ha ! Vous avez troublé mon silence !

L'hippopotame. - Quel silence ? (*On entend le bêlement proche d'un agnelet*). N'entendez-vous pas tous ces merveilleux bruits de la nature ?

Le philosophe. - Votre émergence bruyante a dérangé le fil de ma pensée. Je contemplais justement cet innocent agnelet qui se désaltère, troublant à peine la surface de l'Onde reposante...

L'hippopotame. - ...et à quoi pensiez-vous ?

Le philosophe. - A la Pureté de cette Onde, à ces cercles concentriques qui s'élargissent vers l'Infini. Lorsque le troupeau vient boire, les Ondes Pures se mélangent, et la surface de l'eau devient un chaos de vagues anarchiques. Cet effet me semble universel, c'est-à-dire que toute la complexité apparente de la Nature s'explique par un

1. Le choix des protagonistes fait allusion à l'œuvre de T. Monod, *L'hippopotame et le philosophe* (Actes Sud, H. Nyssen Ed. Arles 1993).
 2. Chanson populaire africaine connue («le déclin de l'astre du berger»).

mélange d'éléments Purs, qui sont certainement d'Essence Divine. Comme la Lumière du Soleil est la superposition des Couleurs Pures de l'Arc-en-Ciel, un Bruit ou un Chant sont la superposition de Musiques Pures.

L'hippopotame (*ironique*). - Mais qu'entendez-vous par «pur» ? Si l'on applique un tel raisonnement au genre humain, cela entraîne de dangereuses conclusions. Vous êtes, je crois, fils de chef, mais votre mère n'était-elle pas peule et votre père bambara ? Ne vous prenez donc pas pour un hidalgo...

Le philosophe (*un peu irrité, mais diplomate*). - C'est vrai, mais je suis de haute lignée (*docte*). Toutefois saviez-vous que Pythagore de Samos avait construit son école sur la Pureté Arithmétique ? Son école renommée professait que le Nombre Pur était le «modèle des choses». Les longueurs des côtés du triangle rectangle pur respectent la divine proportion 3:4:5. Le cube a six faces, huit angles et douze arêtes. Au début, la pandora grecque comporte quatre cordes dont les longueurs doivent respecter les rapports harmoniques simples. Pour Pythagore, Euclide et Ptolémée, les Musiques Pures vérifient d'égales proportions. Les Sphères Célestes chantent en Harmonie. Après l'apparition de la polyphonie au Moyen Âge, les planètes forment un quatuor où Saturne et Jupiter jouent le rôle de basses, Mars est ténor, Vénus et la Terre sont contraltos et Mercure est soprano [4]...

L'hippopotame (*Se retournant pour surveiller ses enfants, qui se dirigent vers l'agneau qui se désaltère*). - Tchaka, Archimède et Hypatia³ venez ici ! - Excusez-moi, pendant que je discute, les enfants vont faire des bêtises. Figurez-vous qu'hier ma douce Hypatia a été féroce ment mordue à l'oreille par votre innocent agnelet. On imagine ce qui pourrait arriver avec ce garnement de Tchaka que mon amie m'a confié ce matin... (*Elle revient au sujet*). Vous savez, je me méfie des Grecs, ne serait-ce que parce qu'ils ont qualifié ma race de vulgaire cheval, alors que nos propres ancêtres ont vécu à une époque où ce pauvre animal n'existait probablement pas encore... Quant aux planètes, je parie qu'elles chantent faux [5]. Mais à votre avis de quelle nature seraient les ondes pures ?

3. Sur les crèches et l'instinct maternel chez les hippos, voir M. Burton, Le grand dictionnaire des animaux (Ed. Bordas, Genève 1973). Tchaka est le célèbre chef sanguinaire Zoulou, Hypatie est la première femme mathématicienne et philosophe.

Le philosophe (*A part*). - Ô Fourier, ô Savart [6] ! Ô Hermann Von Helmholtz [7, 8] ! Que ne devons-nous pas à leurs illustres travaux, et que ne suis-je plongé dans des abîmes de réflexion que pour être témoin aujourd'hui d'une telle ignorance ! (*Tout haut*). Et Georg Simon Ohm ? Ne savez-vous donc pas que ce célèbre savant eut le premier l'idée de décomposer un son complexe en une série de sinusoïdes [9] ?

L'hippopotame. - J'ai cru entendre aussi qu'il avait inventé une loi [10, 11] dont le succès n'a pas atteint le niveau de ses travaux en électricité... (*Le philosophe a un mouvement de surprise*). Gageons qu'il a emprunté une idée développée par Joseph Fourier [12] à propos de la propagation de la chaleur. Prétendez-vous entre autres qu'un son vraiment pur devrait être sinusoïdal, que toute musique est une superposition de sons sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences différentes [13] (figure 1) ? (*Le serpent passe en ondulant*).

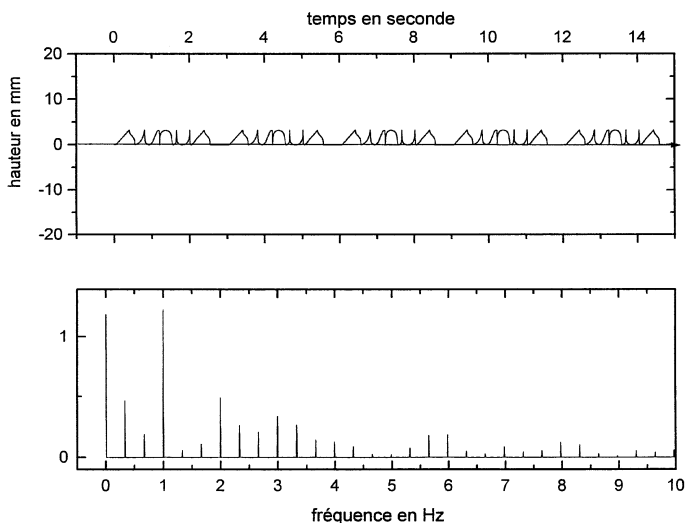


Figure 1 : Un son quelconque peut être considéré comme la superposition de sons sinusoïdaux de périodes différentes, multipliés par des coefficients adéquats. Le signal représenté sur cette figure ne représente pas les variations de pression sonore d'un son, mais la transcription d'une ligne d'écriture cursive «s.i.n.u.s.», dont on fait une transformée de Fourier rapide (*voir Annexe*).

Le philosophe (*Un peu déstabilisé*). - Regardez donc notre Grand Maître le Serpent Noir⁴ ramper majestueusement sur la grève sablonneuse. N'est-ce pas lui qui détient la Vérité Ancestrale ? Tout est Sinusoïdal.

Le serpent (*Il s'arrête et se rengorge. A part, d'un air supérieur*). - Qui sont ces simulateurs stupides semblant susurrer des superstitions sybillines sur les sons sinusoïdaux ?

Le philosophe. - La Sinusoïde est à la base de tout, c'est l'Onde Pure par excellence.

L'hippopotame. - Pour les ondes de gravité, vous faites évidemment erreur [14] ! Quant aux ondes sonores, écoutez donc cette petite prestation... (*L'hippopotame bouche discrètement sa narine droite avec un tampon d'herbes aromatiques du fleuve, prend sa flûte nasale de bambou marquetée d'ivoire, et exécute un petit air fort bien tourné, qui est une transcription de l'introduction de la troisième partie de la Damnation de Faust d'Hector Berlioz «Éloignez-vous, volières malfaisantes...»*).

Le philosophe (*De plus en plus impressionné au fur et à mesure du morceau*). - Oh, Ah !

Le serpent (*Jouant l'indifférence devant le son de la flûte. D'un air blasé*). - C'est pas suffisant pour la transe. Si c'était un *ray*, ce serait l'extase assurée ! (*A part*). Ceux-ci vont séans cesser ces simagrées. (*Il grimpe sur les branches basses d'un baobab et tire de son étui un serpent*).

L'hippopotame (*Assez fière*). - Ce n'est qu'une petite adaptation personnelle...

Le philosophe (*Encore bouleversé par l'interprétation magistrale de l'hippopotame*). - C'est extraordinaire ! Quelle pureté du son ! Mais où avez-vous donc acquis une telle maîtrise ?

Le serpent (*Essaie de se faire remarquer en montant lentement son curieux instrument*). - Et zig et zag, c'est comme ci et comme ça. Je sors aussi des sons sinusoïdaux suaves et exceptionnels ! (*A part*). Ces sots flatteurs sauront que je suis le célèbre phénix des

4. Au sujet du rôle du Serpent dans le mythe africain, on se reportera à l'œuvre de A.H. Bâ, citée dans A.H. Bâ et H. Heckman, Le courrier de l'UNESCO 1205 (1993) 20.

hôtes de ces brousses. (*Haut*). Cessez ces discussions ! (*Il tient par son bec le serpent*). Silence, on souffle !

L'hippopotame (*Elle débouche discrètement sa narine droite, rumine langoureusement le tampon d'herbes aromatiques du fleuve et l'avale*). - C'est une tradition très ancienne. Il y a fort longtemps, les hippopotames vivaient sur la Terre et avaient horreur de l'eau sale. Un jour la déesse Hipanpo, un peu éméchée comme d'habitude, se promenait au bord d'un marigot, lorsqu'elle aperçut un beau jeune rhinocyrinx élané dénommé Galoubet Flûtiau qui s'ébrouait dans la boue, dont elle tomba éperdument amoureuse. A cette époque reculée, ô mieux aimée, les rhinocyrinx n'étaient pas encore des pachydermes, et leur peau était fine, bien tendue et douce comme une peau de bébé. Galoubet avait de surcroît un appendice nasal unique particulièrement élégant qui ne fut pas pour rien dans le coup de foudre. Elle se mit à le poursuivre à vive allure, mais le rhino, sur le point d'être rattrapé, plongea dans le cloaque et se transforma illico en bambou. Surmontant sa répulsion, la déesse explorée entra dans le marigot et recueillit le bambou dont elle fit un instrument de musique qu'elle appela «flûte» en souvenir du jeune rhinocyrinx. Depuis cette aventure, toutes les femelles hippopotames vivent dans l'eau à la recherche d'un hypothétique jeune et beau rhinocyrinx. Pour rappeler l'élégance du fier appendice de Galoubet, différent des deux cornes ridicules dont sont affublés nos rhinocéros africains, les hippopotames perpétuent la tradition en jouant de la flûte nasale dès leur plus tendre enfance. Dans notre jargon, on dit qu'elles «seringuent». J'ai moi-même éduqué ma fille Hypatia dans ce sens, et en dépit de son attirance pour les mathématiques, elle seringue déjà fort bien. Pour son éducation, j'ai toujours mis l'accent sur la pureté du son, qui est d'ailleurs apprécié par notre communauté comme un gage de pureté de l'air exhalé par nos narines...

Le serpent du serpent (*Juste au-dessus, dans le baobab*). - Pouet !

Le philosophe (*N'a rien entendu*). - ...Et cette grande Pureté atteinte atteste que le son de la flûte est Sinusoïdal.

L'hippopotame. - Rien n'est moins sûr. (*Avec beaucoup d'élégance, elle sort de son sac à main en crocodile un petit notebook muni d'une carte son multimédia standard et un microphone caché dans une boucle d'oreille*). J'ai ici un oscilloscope de poche sur lequel je vais vous faire une démonstration. (*Elle accroche coquettement l'appareil ornemental sur le lobe grassouillet de son oreille rose,*

tapote sur le clavier, prend sa flûte et seringue un son si pur qu'il tient de la magie. Le serpent est furieux qu'on ne s'intéresse pas à lui).

Le philosophe (S'extasie). - Ah ! Que c'est beau !

L'hippopotame. - Voici le signal acoustique correspondant (figure 2 en haut).

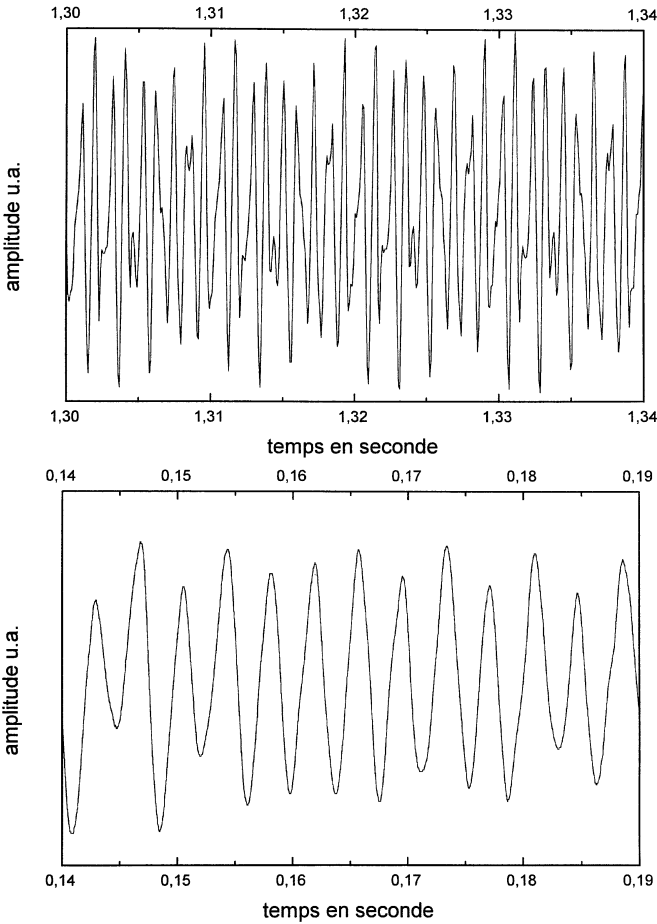


Figure 2 : Son quasiment pur non sinusoïdal et son quasiment sinusoïdal impur. Dans toutes les figures suivantes u.a. signifie «unité arbitraire».

Le serpent du serpent (*Fortissimo*). - Pouet ! Pou-ou-et !

L'hippopotame (*Levant enfin la tête*). - Pour qui sont ces serpents qui sifflent sur nos têtes ?

Le philosophe (*Trop absorbé, n'a toujours rien remarqué*). - Il est vrai que ce n'est pas vraiment le graphe d'une sinusoïde. Êtes-vous sûre que votre microphone transforme bien les vibrations de l'air en une tension électrique proportionnelle ?

L'hippopotame (*Choquée*). - Comment pouvez-vous douter ? Certes le look de ce HF à 562 Méga n'est pas très microphonique, mais cette dernière trouvaille de l'électroacoustique futuriste est impérative en close miking ou en overhead. Vous ne pouvez aucunement mettre en doute son énorme dynamique de cinq ordres de grandeur, comme l'atteste son diagramme de Bode, plat comme une galette de mil... Mais je continue ma démonstration... (*Elle tape sur le clavier, ouvre grand la bouche et émet une sorte d'éruption profonde et sonore*).

Le philosophe (*Sursaute, choqué*). - Ha !

Le serpent (*Dégoûté, il range son serpent et prend la tangente, en marmonnant des discours quelque peu de schizophrènes*). - Ça suffit ! Le son du serpent est si sublime cependant ! Ces soi-disant savants si nuls sont hideux ! C'est pas tout, accomplissons scrupuleusement notre cycle sidéral de dix-neuf siècles⁵...

L'hippopotame. - Vous attendiez-vous à ce résultat ? (figure 2 en bas). (*Elle tapote sur son clavier*).

Le philosophe (*Étonné*). - Mais cela ressemble beaucoup à une sinusoïde !

L'hippopotame. - Comme quoi la pureté des uns commence là où s'arrête celle des autres. Pour vous persuader, je viens de compiler à l'instant un algorithme rapide de SST [15]...

Le serpent (*Affolé*). - Sauve qui peut ! Ça sent la saucisse sèche sectionnée.

L'hippopotame (*Continuant*). - ...permettant de décomposer une ondulante sinusoïde en une série de dents de scie élémentaires fort

5. Bien entendu, le serpent se trompe, le cycle de Méton est bien de dix-neuf ans.

piquantes de fréquences harmoniques (figure 3). Tout est relatif : où est, quelle est, la pureté absolue ? (*L'hippopotame plonge sous l'eau*).

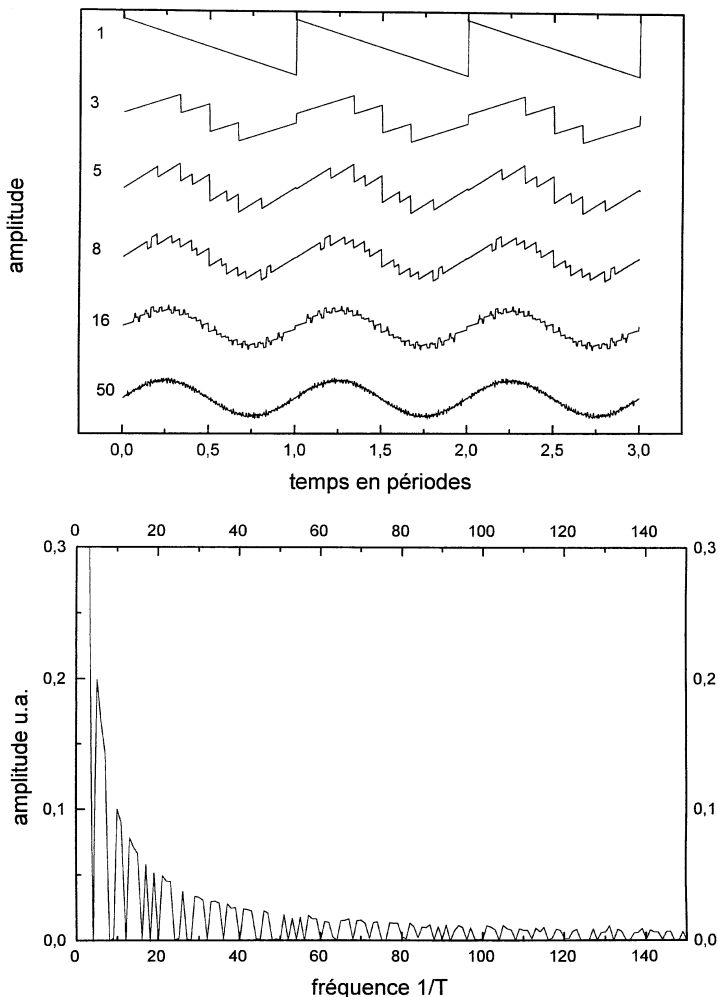


Figure 3 : En haut : construction progressive d'une sinusoïde sur une base harmonique de dents de scie. Les numéros à gauche indiquent le nombre d'«harmoniques» en dent de scie pris en compte. En bas : «spectre» d'une sinusoïde décomposée sur une base de fonctions en dents de scie.

Le philosophe (*Étudie le graphique, perplexe*). - Et zig et zag... Le son pur serait-il en dents de scie ? Bizarre, bizarre.

Le serpent (*Marmonne au loin*). - Si ces sons sont des scies, je démissionne.

CONCLUSION

Il est clair pour tous qu'un son est *réellement* la superposition de sinusoides. Une expérience probante consiste à connecter deux générateurs de basse fréquence délivrant un signal en créneau à deux haut-parleurs et à écouter les battements d'harmoniques. On observe un net battement lorsque la fréquence d'un générateur est voisine d'un multiple *impair* de celle de l'autre. Inversement on n'observe rien du tout lorsque les fréquences sont voisines d'un multiple *pair*. Tout ceci est bien cohérent avec le calcul originel et génial de Joseph Fourier. Mais cette représentation n'est pas la seule. Rien ne nous empêche de superposer des fonctions de base non circulaires pour obtenir le même résultat. Ainsi un son est *aussi* la superposition de dents de scie, bien que celles-ci ne forment pas une base orthogonale (voir en annexe).

Quel intérêt cela présente-t-il ? La description linéaire des phénomènes physiques est non seulement utile et mathématiquement aisée, mais correspond le plus souvent à la réalité. L'origine comme la détection physique d'un son sont liées à la déformation de milieux élastiques. Tant que ces déformations restent petites, la description linéaire est une réalité. La base *physique* de décomposition est harmonique. L'enseignement donné à l'Université est parfaitement justifié et utile.

Mais il se trouve que le détecteur biologique complexe représenté par notre oreille possède une sensibilité telle qu'il est difficile de se représenter pour cet organe la signification d'une «petite» déformation et une description linéaire de l'oreille me paraît illusoire. Pour satisfaire aux caprices de cet organe, l'homme a dû construire des instruments adaptés à ce mode de détection. Ainsi ni notre oreille, ni les instruments de musique ne peuvent être aptes à apprécier ou fabriquer des sons sinusoidaux. On sait en effet depuis longtemps que l'assimilation de la cochlée à un analyseur spectral sinusoidal est totalement erronée. Von Helmholtz ne s'y trompait pas lorsqu'il construisit un résonateur linéaire destiné à modéliser les oscillations de la membrane basilaire [16]. En particulier, la décomposition en série de sinusoides est inadaptée

lorsque le coefficient de Fourier correspondant au fondamental est absent. Le fait que l'on «entende» quand même la tonie du fondamental s'explique généralement par la propriété de l'oreille de «synthétiser» un «terzo suono» [17]. En réalité ce phénomène est lié au mode de décomposition harmonique du son, et une analyse non harmonique peut le faire disparaître.

Comme dans les autres domaines relatifs à la biologie, en physiologie de l'audition il ne peut exister aucune règle absolue au sens physique du terme. Et c'est pour les humbles physiciens que nous sommes, une bonne leçon de modestie. Dans certains cas, la spectroscopie de Fourier peut constituer une assistance technique utile [1, 11, 18], mais contrairement à ce que la révolution électroacoustique actuelle suggère, il ne nous paraît pas indispensable de disposer d'une chaîne haute fidélité munie d'un analyseur spectral de Fourier en temps réel avec un filtrage de Wiener pour écouter avec plaisir un enregistrement de qualité.

L'auteur tient à remercier les personnes suivantes : M. Pierre, A. Waintal, D. Hofstadter, Y. Berger, R. Kipling, J. de la Fontaine, Molière, Corneille, Racine et Homère, pour leurs contributions décisives et particulièrement les enseignants du service de travaux pratiques de DEUG A deuxième année de l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

FOURIER À TORT ET À TRAVERS

Annexe 1 : le spectre de Fourier

Commentaire sur la figure 1

Pour certains caractères cursifs, on peut imaginer une ligne d'écriture qui garde son intelligibilité lorsqu'on la représente de manière approchée sous une forme fonctionnelle. On peut ainsi illustrer de manière suggestive divers effets dont le filtrage spectral (figure 4). Dans le cas présent, on utilise un algorithme courant de FFT/IFT sur 16 384 points.

– a) Effet du déphasage. Sans modifier le spectre d'amplitude, toutes les phases des composantes sont ramenées à zéro. Le signal est bien entendu devenu méconnaissable. Cependant, pour un signal acoustique complexe, l'expérience montre que l'oreille est presque insensible à des changements de phase incohérents entre les différentes composantes

spectrales. C'est dans cet esprit qu'il faut comprendre la «loi acoustique» de G.S.Ohm. A ma connaissance il n'existe pas encore d'explication de ce phénomène.

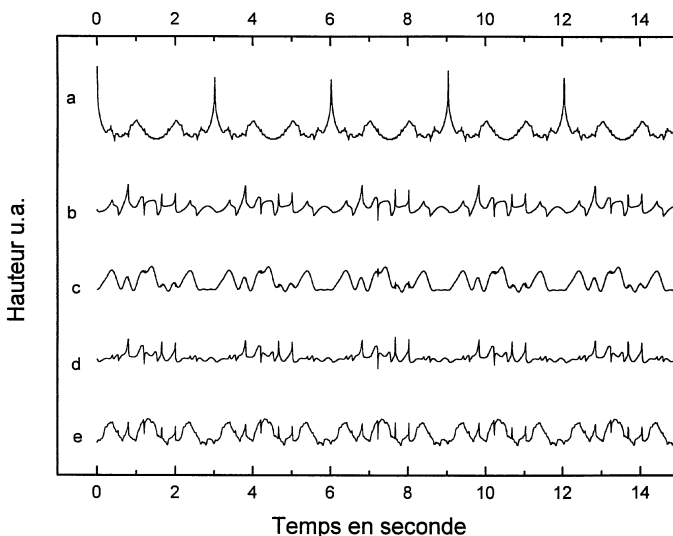


Figure 4 : Filtrages divers sur le signal périodique de la figure 1. Le signal est resynthétisé par une transformée de Fourier inverse rapide, après substitution (filtrage) de certaines composantes spectrales (voir texte).

Pour les courbes suivantes, les déphasages restent intouchés.

- b) La composante spectrale de 1 Hz est fixée à zéro.
- c) Toutes les composantes spectrales de fréquence supérieure à 5 Hz sont fixées à zéro.
- d) Les composantes spectrales de 1, 2 et 3 Hz sont nulles.
- e) Les composantes spectrales de 3 à 15 Hz sont toutes nulles.

Annexe 2 : sons purs et impurs

Commentaire sur la figure 2

En réalité, nous avons choisi en haut un son multiphonique émis par une flûte traversière. Pour un auditeur averti, un tel son possède une esthétique fort appréciée en musique contemporaine et... d'aucuns seront tentés de qualifier de «pur» ce timbre particulier. En bas, faute de disposer d'un hippopotame apprivoisé sous la main, un son de basse

fréquence émis par un tuyau d'orgue nous semble convenir. Le lecteur peut être choqué de l'assimilation d'un tel signal à une sinusoïde. Mais à part le «géné bé-eff» des T.P. de physique traditionnellement relié à un «ache-pé» à la membrane poussiéreuse et au spider fatigué, nous n'avons pu trouver d'instrument de musique dont la distorsion soit suffisamment petite pour assourdir nos tympanes et torturer nos cochlées.

Annexe 3 : décomposition sur une base en dents de scie

Commentaire sur la figure 3

Pour réaliser cette décomposition, on a choisi une suite de dents de scies harmoniques décrites par les fonctions :

$$\text{Sci}(n\omega t) = 2 \left(\frac{n\omega t}{2\pi} - \text{Ent} \left(\frac{n\omega t}{2\pi} \right) \right) - 1$$

où n est un entier naturel strictement positif, $\text{Ent}(x)$ est la troncature entière d'un réel x .

Cette suite suffit (figure 3) pour représenter une sinusoïde :

$$\sin(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sci}(n\omega t)$$

Il reste à calculer les coefficients du développement. On se heurte bien évidemment au fait qu'un tel système de fonctions *n'est pas orthogonal*. Ainsi :

$$\text{Sci}(\omega t) = \frac{\omega t}{\pi} - 1, t \in [0, T[$$

$$\text{Sci}(2\omega t) = \frac{2\omega t}{\pi} - 1, t \in \left[0, \frac{T}{2} \right[$$

$$\text{Sci}(2\omega t) = \frac{\omega t}{\pi} - 1, t \in \left[\frac{T}{2}, T \right[$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \text{Sci}(\omega t) \text{Sci}(2\omega t) dt = \frac{2}{3} \dots$$

Pour tourner cette difficulté, une bonne approximation consiste à utiliser comme intermédiaire la composante sinusoïdale correspondant

à l'harmonique cherchée. Sachant que le premier coefficient (fondamental) du développement de Fourier de la fonction $\text{Sci}(\omega t)$ est :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \text{Sci}(\omega t) dt = -\frac{\pi}{2}$$

on calcule la «différence» :

$$\Delta_2 = \text{Sci}(\omega t) + \frac{\pi}{2} \sin(\omega t)$$

On calcule le premier coefficient de Fourier de cette fonction Δ_2 périodique de période $\frac{T}{2}$ que l'on multiplie par $-\frac{\pi}{2}$, on calcule à nouveau la différence Δ_3 et ainsi de suite...

On remarque que le «spectre de dents de scie» présente des «trous» correspondant à des composantes absentes dans la sinusoïde d'origine. Il est probable que dans une région médiane de l'aire d'audition, pour laquelle la loi de Weber-Fechner [19] reste valable pour le volume et la hauteur, les organes auditifs de sélection de la hauteur d'un son quelconque disposent d'une certaine base de fonctions (bien entendu non sinusoïdales) sur laquelle il serait intéressant de décomposer un son. Ceci pourrait peut-être rendre compte de certaines propriétés non-linéaires de l'oreille, car il n'est pas exclu qu'un jour la description de cet organe extraordinairement complexe puisse être réalisée sur une base scientifiquement reproductible...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Leipp, Acoustique et musique (Ed. Masson Paris 1971).
- [2] Lumière Émettrice Diode... Le précieux ridicule métalangage technique s'inspire de Albi Bop «Higelin fait son cirque», Sono magazine 191 (1995) 52.
- [3] D. Beaufils, Bulletin de l'Union des Physiciens 88 (1994) 371.
- [4] Sur l'influence des nombres sur la musique voir Archytas de Tarente de l'école pythagoricienne au IV^e siècle avant J.-C. cité par C.A. Ronan, Histoire mondiale des Sciences, (Ed. Seuil Paris 1988). Sur l'harmonie des sphères voir Johannes Kepler, Harmonices Mundi (1619). Cité par G. Abetti, La Science au XVI^e siècle, (Ed. Hermann Paris 1960).
- [5] Effectivement, si Saturne tient à peu près la tierce majeure $\frac{5}{4}$, Jupiter la tierce mineure $\frac{6}{5}$, Mars qui est censé représenter la quatrième $\frac{4}{3}$ chante véritablement faux. Si Mercure se démarque deux octaves au-dessus, mieux vaut oublier la charmante Vénus qui est vraiment dissonnante...
- [6] Très apprécié en France mais fort injustement ignoré de la communauté scientifique internationale, il est l'inventeur d'une roue dentée et d'un célèbre violon dont l'étude lui a valu l'honneur de rentrer à l'Académie Française. M. Blay, La recherche 112 (1980) 735.
- [7] Très connu à l'étranger, mais peu apprécié des étudiants français pour lesquels une génération d'enseignants a imaginé l'exercice classique abusivement nommé le «résonateur de Helmholtz». Noter un petit détail qui a son importance : lorsque Von Helmholtz a construit ses résonateurs, il s'est bien gardé de les munir d'un col ! A. Wood's, the physics of music (Chapman and Hal ed. London 1975). La formulation correcte de l'exercice peut être trouvée dans L. Landau et E. Lifchitz Mécanique des fluides (Ed. Mir Moscou 1971), voir exercice 2, paragraphe 68.
- [8] W.H. Westphal, Physik (Springer Verl. Berlin 1959).
- [9] Une excellente présentation de la question peut être trouvée dans R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, The Feynman lectures on physics (Addison-Wesley Pub. Reading 1975).

- [10] La loi *acoustique* d'Ohm postule que les phases relatives des différentes composantes sinusoïdales d'un son n'interviennent pas dans son timbre. Énoncée sous cette forme, cette loi est évidemment fausse. Elle est cependant reprise par Hermann Von Helmholtz cinquante ans plus tard. A mon avis, pour tout ce qui concerne la musique exécutée avec des instruments «classiques», elle est fort bien vérifiée... Mais pourquoi ? J.R. Pierce, *The Science of Musical Sound* (Ed. W.H. Freeman & Co. New York 1992), F. Grémy, *Biophysique* (Ed. Flammarion Paris 1994) G.S. Ohm, *Poggendorff's Annal.* 59 (1843) 513.
- [11] M. Rossi, *Électroacoustique* (Ed. Dunod Paris 1986).
- [12] La décomposition en série ne me paraît pas la contribution historique décisive des travaux de J. Fourier. Une analyse correcte de la portée historique de ces travaux figure dans I. Prigogine et I. Stengers *La nouvelle alliance* (Ed. Gallimard Paris 1980).
- [13] C. Cance, *Bulletin de l'Union des Physiciens* 88 (1994) 211.
- [14] Les cercles concentriques dont parle Séfou Jophriré n'ont rien de sinusoïdal. La forme de la surface dépend généralement de manière complexe des conditions d'excitation et des conditions aux limites. Dans le cas particulier d'une surface infinie d'un fluide parfait excitée sinusoïdalement en un centre O, l'amplitude des oscillations de la surface le long d'un rayon est représentée par une fonction de Bessel et décroît avec la racine carrée de la distance à O.
- [15] De l'américain *Sawing Slice Transform*. Cet algorithme particulièrement efficace est basé sur la décimation de *Cooled-Turkey* (de préférence sous forme de rôti). En fait la *decimation-in-time* est un algorithme majoritairement utilisé pour calculer la transformée de Fourier rapide (FFT = Fast Fourier Transform). Le réarrangement par inversion des bits (étape indispensable permettant de simplifier considérablement les itérations) intervient sur le signal de départ échantillonné dans le temps. Cette technique, inventée par J.W. Cooley et J.W. Tukey vers 1960 rendit utilisable l'analyse de Fourier rapide. Quant à l'algorithme SST, il n'existe (comme la décimation du rôti de dinde) que dans l'imagination un peu trop débordante de l'hippopotame. Au passage, on rappellera que les hippos ne sont pas seulement végétariens. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical recipes, the art of scientific computing* (Cambridge university Press, Cambridge 1988).
- [16] R.W. Pohl, *Einführung in die Physik* (Springer Verl. Berlin 1959).

- [17] Il est clair depuis longtemps que la découverte de ces sons n'est nullement due au musicien italien Giuseppe Tartini, qui apparemment, n'avait rien compris à la question. J.-P. Le Cardonnell, Bulletin de l'Union des Physiciens, 88 (1994) 1397. Plus de dix ans auparavant, le phénomène connu depuis longtemps par les facteurs d'orgue avait été analysé par des savants français et allemands. J.C. Poggendorff, Histoire de la physique, (Ed. Dunod Paris 1883), réédit. J. Gabay Paris 1993.
- [18] Une analyse élémentaire des isosones de Fletcher et Munson montre que pour un son sinusoïdal de 40 dB, notre oreille est environ cinquante fois plus sensible à un son de 3700 Hz qu'à un son de 200 Hz, qui correspond pourtant au fondamental d'une voix masculine. C'est pourquoi un spectre de Fourier non corrigé est généralement très éloigné de ce que l'on entend réellement.
- [19] Cette loi psychophysique importante découverte en 1856 par le philosophe allemand G.T. Fechner indique que dans un large domaine, une sensation est proportionnelle au logarithme de la grandeur physique qui lui donne naissance. Cette loi est la généralisation d'une loi photométrique établie en 1825 par le physicien W. Weber, célèbre pour ses travaux en électromagnétisme. Voir W.H. Westphal, Physik (Springer Verlag Berlin 1959).