

Portrait de phase d'une fonction exponentielle, mesure d'une constante de temps

par Alain DROUGLAZET
Lycée Valin - 17000 La Rochelle

1. OBJET

Étude de la représentation dans l'espace des phases d'une fonction évoluant de façon exponentielle et application à la détermination de la constante de temps qui la caractérise. Utilisation possible en terminale pour le condensateur (charge et décharge) ou la bobine (établissement du courant).

2. ÉTUDE THÉORIQUE

L'espace des phases est une représentation graphique dans laquelle la fonction est en abscisse et sa dérivée par rapport au temps en ordonnée. L'utilité de cet espace est essentiellement de décrire les phénomènes périodiques (ou pseudo) et les exposés ne manquent pas à ce sujet, notamment dans les nouveaux manuels de terminale.

Ici on s'intéresse aux fonctions du type $y = A + B \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ avec comme objectif la détermination de la constante de temps $\tau = 1/\lambda$.

Dans ce cas, la dérivée s'écrit :

$$y' = -\lambda \cdot B \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

c'est-à-dire

$$y' = -\lambda \cdot (y - A)$$

On déduit donc le résultat suivant : **la représentation de cette fonction est une droite dont le coefficient directeur est l'inverse de la constante de temps (au signe près).**

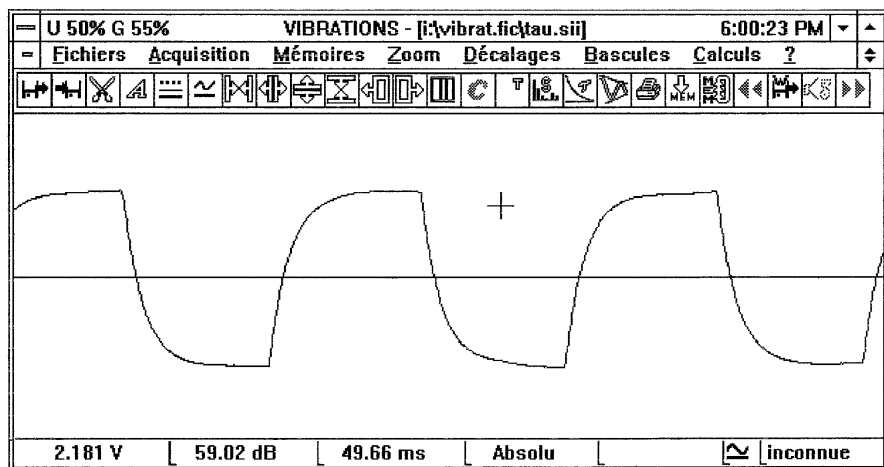
Remarque : La réciproque est vraie puisque la solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ est précisément une fonction exponentielle du type $A + Be^{-at}$.

La présence d'un **pointeur** dans les logiciels d'acquisition et de traitement de fonctions permet très simplement les mesures et donc très facilement de faire le calcul de ce coefficient.

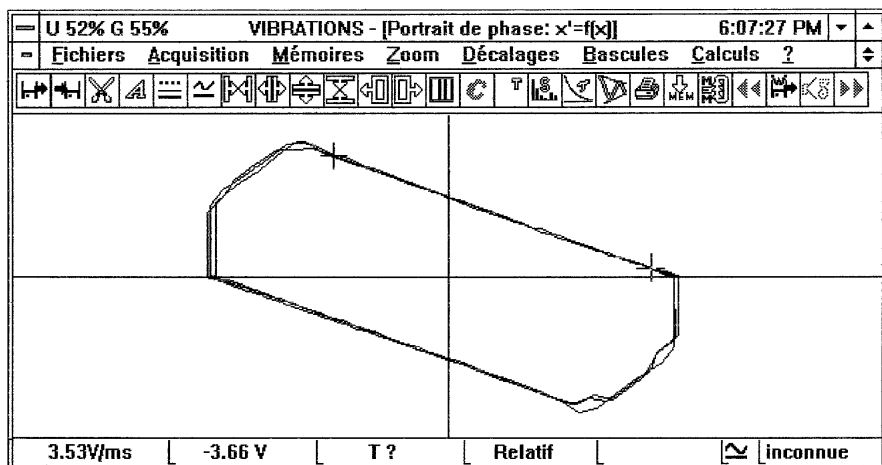
3. EXEMPLE : CHARGE ET DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR.

Le circuit permettant l'étude est très classique : un condensateur, une résistance et un générateur de créniaux en série comme pour effectuer la mesure à l'oscillo.

L'acquisition fournit le signal qui représente des charges et décharges successives du condensateur à travers la résistance.



Puis, en «appelant» le *portrait de phase* : (voir la remarque finale pour l'expression *appeler*).



Comme on peut le remarquer sur cette figure les deux portions de courbe correspondant à la charge et la décharge du condensateur sont deux segments parallèles ce qui prouve la nature exponentielle du phénomène (tronçons de droites) et le fait que la constante de temps est la même lors de ces deux événements (ces droites sont parallèles et ont donc le même coefficient directeur).

On peut aussi voir sur la bande inférieure que le pointeur est *relatif*, c'est-à-dire que l'on mesure directement les intervalles entre les deux croix (une est l'origine choisie, l'autre est le pointeur lui-même) :

$$\Delta y = -3.66 \text{ V} , \quad \Delta y' = 3.53 \text{ V/ms}$$

On a donc $\tau = \frac{3.66}{3.53} = 1.04$, résultat en millisecondes puisqu'on a divisé des V par des V/ms. Ce résultat est tout à fait conforme à l'expérience aux incertitudes habituelles près :

$$R = 1000 \, \Omega \quad \text{et} \quad C = 1 \, \mu\text{F} , \quad \tau = R \cdot C = 10^{-3} \text{ s.}$$

4. CONCLUSION

Il me semble que l'introduction de cet espace des phases pour mieux suivre les évolutions énergétiques des oscillateurs (amortissements) ainsi que les *déformations* de sinusoides (étude du modèle Van der Pol par exemple) permet de proposer aussi cette méthode simple à comprendre et à exécuter pour l'étude du condensateur et de la bobine : *évidence expérimentale* de la nature exponentielle des phénomènes, *simplicité* et *précision* de la mesure de τ .

Remarque : Le logiciel utilisé ici est la dernière version de *Vibrations* (édité par les Éditions Chrysis de Poitiers), le tracé dans l'espace des phases y est automatique (il suffit d'ouvrir la *fenêtre* portant ce nom) mais il est aussi très simple de représenter cet espace des phases avec un logiciel généraliste comme *Régressi* ou *Labo* : il faut alors faire calculer au programme la fonction dérivée du signal puis lui faire tracer y' fonction de y en utilisant l'option de définition des axes et des fonctions tracées au menu.