

Mesures et modélisation en sciences physiques

T.I.P.E. en classes préparatoires

par Claude RABALLAND
Mathématiques Spéciales - Lycée Michelet Montaigne
118, cours Victor Hugo - 33000 Bordeaux

Le thème national retenu pour les T.I.P.E. en physique aux concours de 1997 et 1998 est : «**Mesurer une grandeur, pourquoi ? comment ?**».

Mesurer une grandeur physique ne saurait constituer une fin en soi. Le but du physicien est aussi de valider un modèle de comportement du système physique étudié.

L'étude qui va suivre pourrait servir de point de départ à nos élèves pour aborder le thème proposé dans les T.I.P.E. et engager une réflexion sur la question : «*Quel rapport peut exister entre une série de mesures et les lois physiques que l'on cherche à vérifier ?*».

Nous présenterons d'abord une méthode de recherche d'un modèle expérimental puis nous donnerons quelques exemples concrets.

1. RECHERCHE D'UN MODÈLE EXPÉRIMENTAL

Un modèle expérimental est décrit par une loi physique sensée représenter le phénomène étudié.

Dans l'exemple élémentaire d'un résistor de résistance R , le modèle est $U = R \cdot I$ (loi d'Ohm). Une série de mesures permet d'identifier le paramètre R pour le comparer à une valeur attendue (fournie par le constructeur ou par des tables de données, ou encore obtenue par une autre méthode : ohmmètre, par exemple).

Nous dirons que le modèle est valide si, dans le domaine d'étude considéré, la loi proposée est bien vérifiée et si les valeurs des paramètres identifiés sont conformes aux valeurs attendues.

Bien entendu, la précision des mesures intervient au niveau de la valeur numérique que l'on pourra attribuer à chaque paramètre : on dit, par exemple, que «R est déterminé à 10 % près»...

Le problème majeur est de savoir ce que l'on entend par «bonnes mesures» et comment on va pouvoir estimer les paramètres dont dépend la loi physique utilisée.

Voyons quelques notions sur le principe de la modélisation par «moindres carrés».

2. Modélisation par moindres carrés

Note : Ne pas confondre «méthode des moindres carrés» avec «régression linéaire» qui n'est qu'un exemple particulier où le modèle est linéaire par rapport aux paramètres, ce qui n'est pas toujours le cas...

Nous supposons que le modèle est complètement défini par la donnée d'une fonction de la forme : $y = f(x, p, n, \dots)$ où la fonction $f(x)$ représente la loi physique et p, n, \dots sont des paramètres à identifier, x étant la variable.

Exemples :

- $U = R \cdot I$ (cas précédent) : on cherche à identifier R,
- $G = G_0 / \sqrt{1 + f^2 / f_0^2}$: gain d'un filtre passe-bas d'ordre 1 : on cherche à identifier G_0 et f_0 .

Par ailleurs, nous pouvons également effectuer des mesures sur un système physique dont nous supposons le comportement correctement décrit par le modèle ci-dessus.

Pour un nombre N de mesures, nous obtenons N couples de résultats (x, y) où x est la mesure de l'entrée et y la mesure de la réponse du système.

2.1. Choix d'un critère d'optimisation

Nous retiendrons le critère quadratique J défini par :

$$J = \sum_{i=1}^{N \text{ mesures}} (y \text{ calculé} - y \text{ mesuré})^2$$

J est une fonction des paramètres p , n , ...

Nous admettons que nous avons trouvé le meilleur modèle possible, c'est-à-dire, pour une fonction y donnée, les meilleurs paramètres possibles, si J présente un minimum pour chacun des paramètres envisagés.

C'est une méthode dite «des moindres carrés».

Dans le cas d'un modèle à un paramètre p , on peut proposer une allure de courbe pour $J(p)$ de la forme :

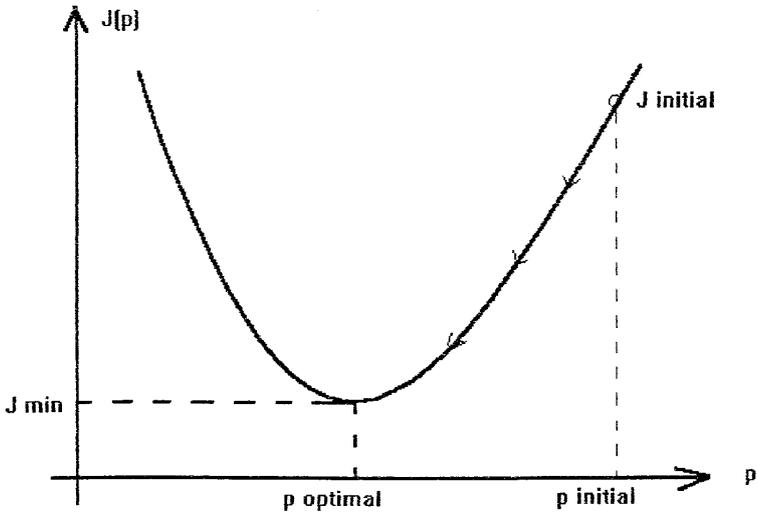


Figure 1

Dans le cas d'une **recherche itérative**, l'optimisation consiste à faire varier le paramètre p , à partir d'une valeur initiale selon un chemin qui, après un certain nombre d'itérations, parvient au point (**p optimal**, **J min**).

Il existe des algorithmes qui permettent de rechercher l'optimum (algorithme du gradient, algorithme de Gauss-Newton) : on essaie de suivre la ligne de «plus grande pente» de l'hyper-surface représentant $J(p, n, \dots)$.

Dans le cas où le modèle y est linéaire par rapport aux paramètres à déterminer, les équations de recherche du minimum de J sont linéaires et donc représentables par un système matriciel de rang égal au nombre de paramètres. La solution est alors explicite et peut être obtenue en résolvant ce système. Ceci conduit à un calcul en une seule étape, contrairement aux calculs itératifs envisagés précédemment : c'est le cas de la **régression linéaire** et de l'**ajustement polynomial**.

2.2. Unicité de l'optimisation

Lors des optimisations des paramètres, il n'est pas du tout sûr de trouver un jeu unique de paramètres. En effet, la courbe $J(p)$ peut présenter plusieurs minimums et l'évolution vers l'un ou l'autre de ces minimums dépendra principalement de l'initialisation et des valeurs des incréments.

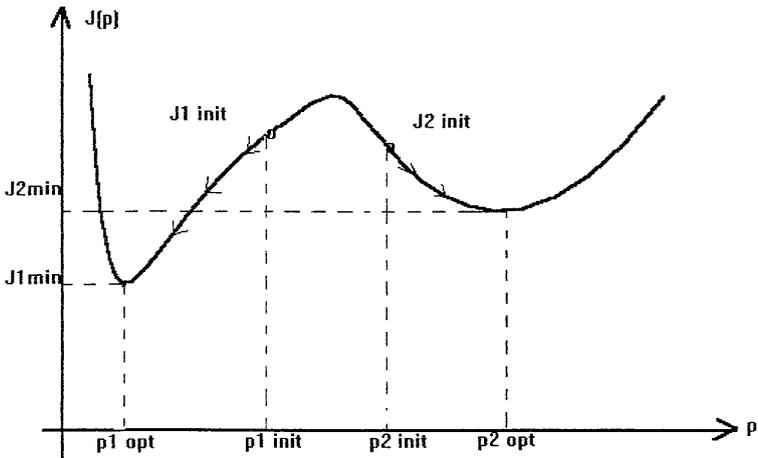


Figure 2

Sur la figure ci-dessus, on voit que l'on peut obtenir deux valeurs différentes de p selon le point de départ pour l'initialisation.

Ceci nous conduit à bien préciser que la modélisation ne saurait constituer une fin en soi : lorsqu'elle est terminée, il faudra toujours revenir aux conditions pratiques de l'expérience et critiquer les résultats obtenus. Il sera souvent utile de recommencer les mesures et les calculs dans d'autres conditions pour faire des recouvrements nécessaires.

Cette recherche d'optimisation se prête naturellement à l'utilisation de l'informatique qui pourra apporter ici un soutien considérable à l'expérimentateur.

Afin d'illustrer concrètement le principe de la recherche des paramètres optimaux, nous proposons un exemple en physique. Cet exemple est tiré d'une séance de travaux-pratiques réalisée avec des élèves de mathématiques spéciales.

On pourrait, bien-entendu, proposer bien d'autres exemples, notamment en chimie...

3. EXEMPLE EN PHYSIQUE

On cherche à réaliser l'enregistrement de la figure interférences / diffraction à l'aide d'un capteur CCD couplé à un oscilloscope numérique.

La loi physique à vérifier correspond à l'intensité I mesurée par le capteur CCD :

$$I/I_0 = \frac{1}{2} \left[\sin c \left(\pi \cdot (x - x_0)/i_D \right) \right]^2 \cdot \left(1 + \cos \left(2\pi \cdot (x - x_0)/i \right) \right)$$

Dans cette expression, x représente la position du point M de mesure, x_0 est la position de la frange centrale, i_D est l'interfrange lié à la diffraction ($i_D = \lambda D/a$) et i est l'interfrange lié à la figure de l'interférences ($i = \lambda D/e$).

Nous pouvons considérer que I/I_0 est parfaitement déterminée si l'on connaît les paramètres i_D , i et x_0 . On va donc chercher à les déterminer par une optimisation du modèle.

Le logiciel utilisé possède un éditeur de texte intégré permettant de rédiger une feuille de T.P. L'éditeur de texte est en accès permanent :

FIGURE DE DIFFRACTION/INTERFERENCES PAR DEUX FENTES D'YOUNG.
SCHEMA DU MONTAGE:

Diode laser (670 nm) → Polariseur → Fentes Young (F1, F2) → Capteur CCD → Oscillo numérique (0-15V) → Imprimante

OSCILLO: HAMEG
CAPTEUR CCD: ELECTROME CCD 12

MANIPULATION:
Régler la distance fentes/capteur à une distance D ($\approx 30\text{cm}$).
Largeur d'une fente: a Distance des fentes: e .
Régler l'orientation du polariseur pour observer sur l'oscillo la figure d'interférences sans saturation du capteur CCD. =>
Placer l'oscillo en commutation numérique. A l'aide du pointeur mobile mesurer $I(x)$ pour différents points.
Faire une sortie imprimante.

ETUDE THEORIQUE:
Si I_0 est l'intensité max, on a:
 $I/I_0 = (\text{sinc}(\pi x/iD))^2 * (1 + \cos(2\pi x/i)) / 2$
- x est la position du point de mesure, $\leftarrow -i \rightarrow$
- iD est l'interfrange de diffraction, $\leftarrow iD \rightarrow$
- i est l'interfrange d'interférences: $x_0 \rightarrow$ pointeur central

$iD = \sigma D / a / k$, k : vitesse de balayage du capteur CCD. σ : longueur d'onde
 $i = \sigma D / e / k$ Déterminer k au préalable: $\approx 3.5E-3$ m/ms. $\sigma = 670$ nm
Mesurer a et e au microscope muni d'un micromètre oculaire

MESURES:
Relever environ 20 points sur l'oscilloscope. Entrer (I/I_0 , x).
MODELISATION: Calcul de iD et i . Vérifier leurs expressions.

Figure 3 : Feuille de T.P. proposée - Contenu de l'éditeur de texte.

Commentaires sur la manipulation

Séance de deux heures à deux heures trente. A cette occasion, les élèves se familiarisent avec l'utilisation d'un pointeur mobile sur l'oscilloscope numérique XY.

Un relevé manuel d'une vingtaine de points sur l'écran de l'oscilloscope à l'aide du pointeur sera largement suffisant. Ce relevé peut aussi être fait sur un tirage imprimante (imprimante branchée sur la sortie série de l'oscilloscope).

Si l'on peut disposer pendant la séance d'une interface d'acquisition de données, le relevé pourra être automatisé. Inconvénient : les élèves ne font plus eux-mêmes les mesures ; c'est un problème pédagogique à prendre en compte...

La figure d'interférence obtenue est largement « parasitée » par des « bruits divers » : lumière ambiante, défaillances de certaines cellules

CCD, etc. Ainsi l'utilisation d'algorithmes de modélisation permet de travailler sur l'ensemble des points expérimentaux et de minimiser les erreurs de mesures. Le logiciel fournit les valeurs des interférences moyens mesurés ainsi que les écart-types correspondants ; les courbes modélisée et estimée théoriquement sont tracées en confrontation avec les points expérimentaux.

On pourra terminer la séance par des mesures directes (microscope et micromètre) des grandeurs du montage : largeur des fentes et distance des fentes pour calculer les interférences correspondants et comparer.

Nous donnons, ci-après (figures 4 et 5) deux enregistrements

1 - Une estimation rapide préalable des paramètres permet de calculer une courbe dite «théorique». Le menu de gestion et d'entrée des mesures permet de placer les points expérimentaux en confrontation avec cette courbe. On constate que l'ajustement des points expérimentaux avec la loi à vérifier est très approximatif...

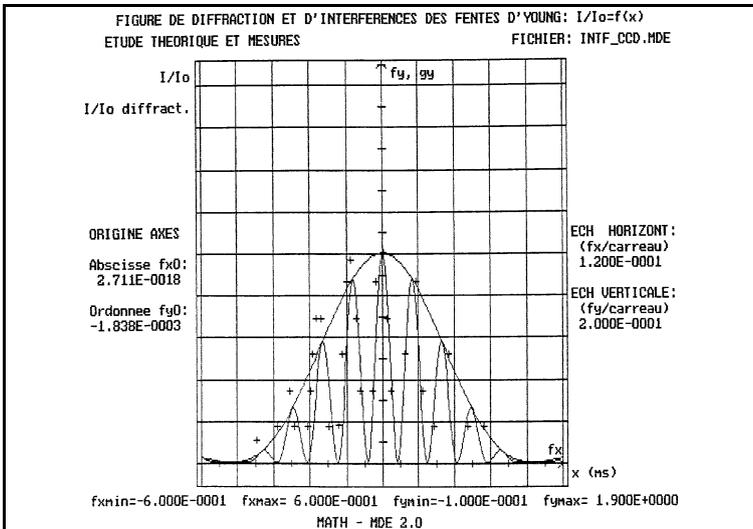


Figure 4

2 - On demande alors à l'ordinateur de rechercher les paramètres optimums : i_D , i et x_0 . Ce qu'il fait en moins d'une seconde... On obtient ainsi les paramètres ajustés avec les écart-types correspondants, indiquant ainsi la validité de l'ajustement. On pourra lire les résultats sur la courbe modélisée ci-dessous.

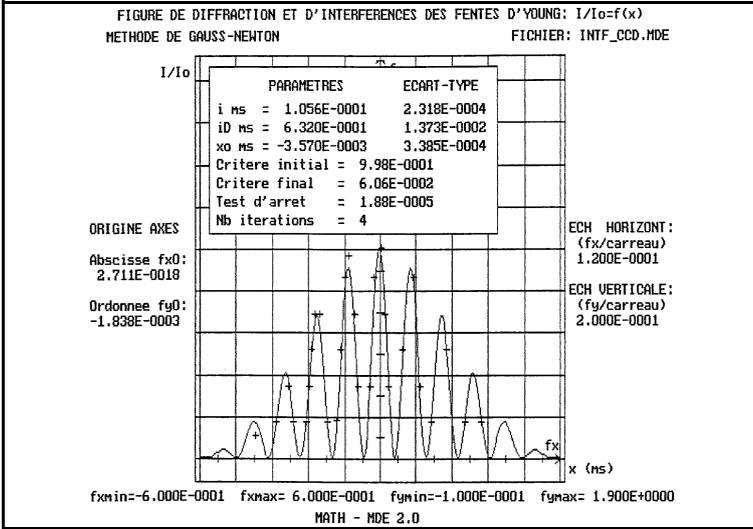


Figure 5

4. EXTENSIONS ET RECHERCHES PROPOSÉES DANS LE CADRE D'UN T.I.P.E.

A l'aide d'un exemple en travaux-pratiques du type précédent, nous pouvons faire comprendre à l'élève les principes généraux de la recherche d'un modèle expérimental à partir d'une série de mesures.

On pourra lui demander ensuite de chercher un exemple de loi physique à valider : cette phase sera essentiellement bibliographique. Il n'est pas exclu qu'il puisse puiser ses sources ailleurs que dans son établissement : bibliothèque universitaire, laboratoire universitaire, industrie, etc.

Bien entendu, la complexité de la loi à vérifier ne doit pas dépasser son domaine de compétence !

Dans une deuxième phase, nous pouvons lui demander de collecter des mesures relatives à cette loi. Il pourra essayer de mettre en œuvre un montage relativement simple dans le laboratoire de physique du lycée si les conditions s'y prêtent. Mais il peut aussi très bien recueillir ces données à l'extérieur ou dans la littérature.

Nous pouvons citer un exemple à ce propos, que nous avons déjà testé (voir article «équations différentielles et sciences physiques», dans ce numéro à la page 265)

Il s'agit d'identifier la trajectoire d'un missile auto-propulsé dans l'atmosphère : le calcul de la trajectoire nécessite de prendre en compte la mécanique des fluides, la thermodynamique, la dynamique des systèmes ouverts.

Un système d'équations différentielles permet alors de décrire le système physique étudié.

Cette étude peut être entreprise par un élève de mathématiques spéciales qui a les compétences nécessaires. En consultant la littérature, il pourra trouver les paramètres du tir : débit massique D_m des tuyères, masse de propergols, coefficient de frottement, gradient de température dans l'atmosphère, etc.

Une simulation informatique lui permet alors de faire tous les calculs préalables nécessaires.

En revanche, comme il n'est pas question de lancer un missile depuis le deuxième étage du laboratoire de physique (!), il lui faudra aller collecter des mesures ailleurs : ce sera pour lui, l'occasion de contacts forts intéressants avec les laboratoires environnants. Par exemple, à proximité de Bordeaux est implanté le CEL (Centre d'Essais des Landes) où s'effectuent justement les tests des lancements de missiles. Sans aller jusqu'à dévoiler des secrets militaires, le CEL peut fournir des données de trajectoires...

On peut également trouver ces mesures dans la littérature.

Enfin dans la phase finale, il ne lui reste plus qu'à optimiser son modèle et déterminer quelles étaient les caractéristiques exactes du tir réel étudié.

L'ensemble de ce travail peut prendre une bonne année, s'il est fait avec soin... La démarche, les méthodes employées et les différents résultats peuvent être consignés dans une monographie qui serait proposée au jury le jour du concours...

(Pour ceux qui seraient intéressés, l'étude précédente a déjà été faite : elle est décrite dans le contenu de l'éditeur de texte du fichier «MISSILE.DFC» de l'ensemble «Travaux dirigés de physique». Il est exécutable à l'aide du logiciel «Équations différentielles».)

En conclusion, je peux dire, à titre personnel, que j'ai déjà pratiqué cette démarche sur le terrain avec mes élèves depuis cinq ans (il n'y avait pas encore de T.I.P.E. ! ...) : la collecte de résultats dans des revues scientifiques ou par courrier à des entreprises (SEP, SNIAS, Thomson, Aérospatiale, ...) ou des laboratoires universitaires les a fort intéressés. Le passage en salle informatique pour élaborer les simulations et confronter mesures et modèle leur permet de donner une signification concrète aux parties du programme : quoi de plus motivant que de constater, par exemple, que l'application du principe fondamental de la dynamique des systèmes ouverts conduit bien à des résultats qui sont utilisés dans l'industrie...

BIBLIOGRAPHIE

J.-C. TRIGEASSOU : *«Recherche de modèles expérimentaux»*, Tec et Doc, 1988.

Logiciels : *«Modèles expérimentaux»* et *«Équations différentielles»*, version 2.0., Microlambda 1995.

Revues scientifiques : La Recherche, Pour la Science, Science et Vie, Image de la physique (CNRS), Sciences et avenir, Science et espace (CNES), etc.