

Équations différentielles et sciences physiques

terminales S, classes préparatoires

par Claude RABALLAND
Lycée M. Montaigne - 33000 Bordeaux

L'utilisation d'outils informatiques (calcul formel, logiciels de résolution, calculatrices, ...) dans les nouveaux programmes des lycées et des classes préparatoires permet d'envisager l'étude de phénomènes physiques qui, jusqu'à présent, ne pouvaient être abordés.

En tant que simple initiation, nous citerons quelques exemples d'études menées sur des phénomènes physiques décrits par des équations différentielles relativement courantes.

1. EXEMPLE 1 : LE MOUVEMENT PENDULAIRE

De façon générale, le mouvement pendulaire est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$d^2\theta/dt^2 + \omega^2 \cdot \sin(\theta) = 0$$

ω est la pulsation propre.

L'exemple le plus typique est le pendule pesant mais il en existe beaucoup d'autres...

Dans la pratique, il y a toujours des frottements et on peut proposer, par exemple, un frottement fluide, ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$d^2\theta/dt^2 + \alpha \cdot d\theta/dt + \omega^2 \cdot \sin(\theta) = 0$$

α est le coefficient de frottement.

On peut alors envisager une étude où l'on fait varier :

- les conditions initiales de lancement,
- le coefficient de frottement.

Un logiciel de résolution d'équations différentielles permet de visualiser très rapidement les différents comportements observés. Ceci peut faire, par exemple, l'objet d'une séance de travaux dirigés avec les élèves.

Les enregistrements obtenus étant plus parlants qu'un long discours, nous nous contenterons de commenter les courbes tracées.

1.1. Mouvement pendulaire non amorti : influence des conditions initiales

1.1.1. Figure 1 : Cinq conditions initiales sont proposées

$\theta_0 = 0$ et

$\theta'_0 = 0.543, 2.72, 5.43, 8.15$ et 10.8 rad/s ;

la pulsation ω vaut 5.43 rad/s.

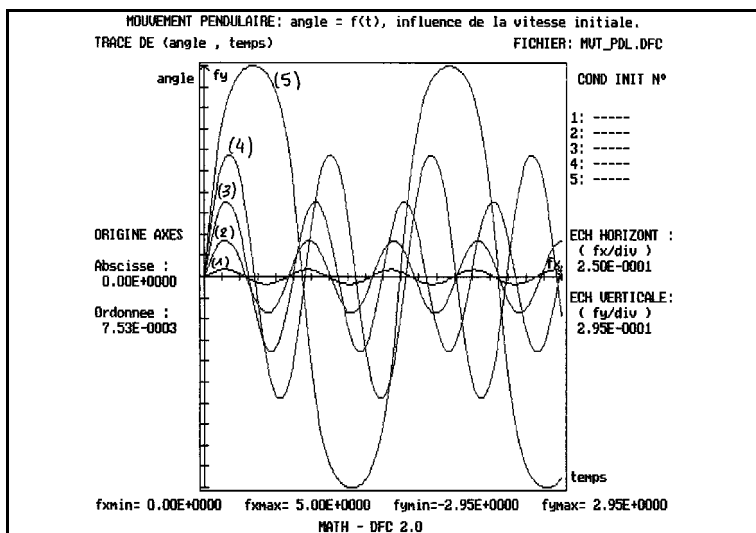


Figure 1 : Conditions initiales : (1) : $\theta'_0 = 0.543$ rad/s - (2) : $\theta'_0 = 2.72$ rad/s - (3) : $\theta'_0 = 5.43$ rad/s - (4) : $\theta'_0 = 8.15$ rad/s - (5) : $\theta'_0 = 10.8$ rad/s.

On remarquera que les oscillations d'amplitude quelconque ne sont pas isochrones et on «devine» que le caractère sinusoïdal des oscillations disparaît quand l'amplitude de celles-ci augmente.

Pour mieux voir ceci, il suffit de représenter la vitesse angulaire $\theta' = d\theta/dt$ en fonction du temps : figure 2.

1.1.2. Figure 2 : Vitesse Angulaire

Pour les mêmes conditions initiales que précédemment, on représente $\theta'(t)$.

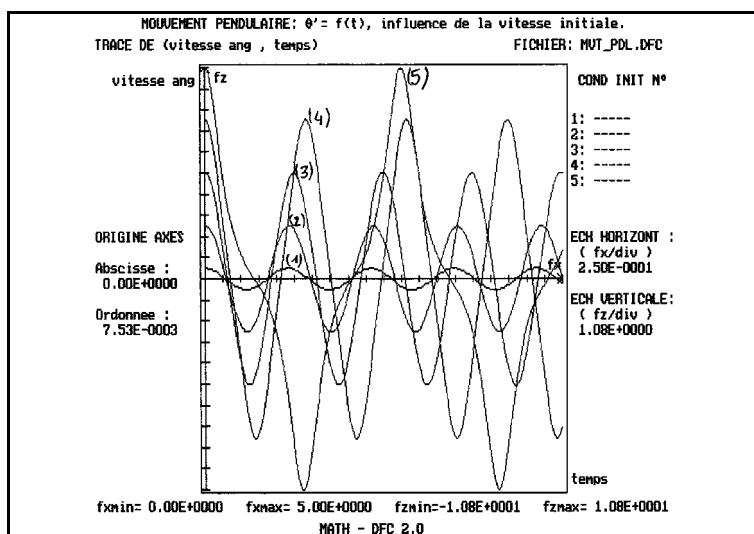


Figure 2 : Conditions initiales : (1) : $\theta'_0 = 0.543$ rad/s - (2) : $\theta'_0 = 2.72$ rad/s - (3) : $\theta'_0 = 5.43$ rad/s - (4) : $\theta'_0 = 8.15$ rad/s - (5) : $\theta'_0 = 10.8$ rad/s.

Il est manifeste que pour $\theta'_0 = 10.8$ rad/s, le mouvement n'est plus sinusoïdal. Ceci sera encore plus évident pour la représentation dans l'espace des phases ci-après.

1.1.3. Figure 3 : Portrait de phase

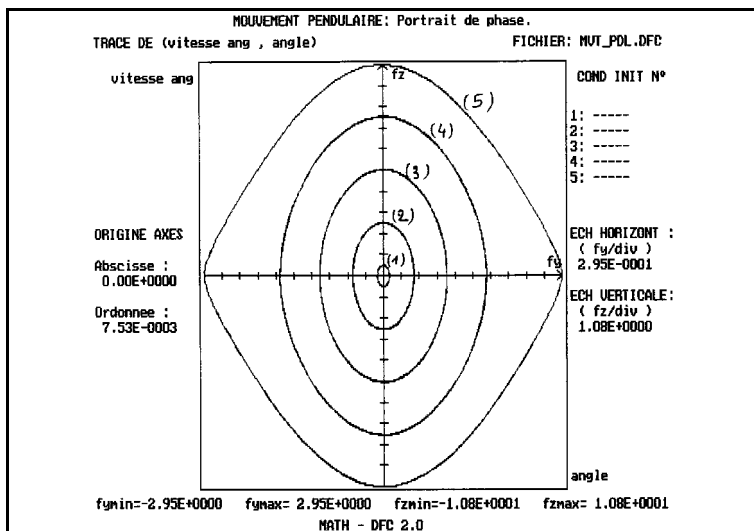


Figure 3 : Conditions initiales : (1) : $\theta'_0 = 0.543 \text{ rad/s}$ - (2) : $\theta'_0 = 2.72 \text{ rad/s}$ - (3) : $\theta'_0 = 5.43 \text{ rad/s}$ - (4) : $\theta'_0 = 8.15 \text{ rad/s}$ - (5) : $\theta'_0 = 10.8 \text{ rad/s}$.

On constate que le graphe $\theta' = f(\theta)$ s'écarte d'autant plus d'une ellipse (caractéristique du mouvement harmonique) que l'amplitude des oscillations est grande.

Ces trois exemples sont déjà intéressants mais on peut aller plus loin lors d'une séance de TD.

Le logiciel utilisé doit être suffisamment convivial pour permettre un changement très rapide des équations, paramètres, conditions initiales, sorties de courbes, etc. et dégager l'élève de toute contrainte pénible non liée à l'aspect «interprétation physique» du problème.

Dans la suite, nous allons donc introduire un coefficient de frottement et essayer de chercher des situations où le système peut effectuer plusieurs tours avant de s'arrêter complètement.

1.2. Mouvement pendulaire amorti : influence des conditions initiales et de l'amortissement

1.2.1. Figure 4 : Mouvement pendulaire amorti pseudo-périodique

On introduit un coefficient de frottement $\alpha = 3$ pour une pulsation $\omega = 5.43$.

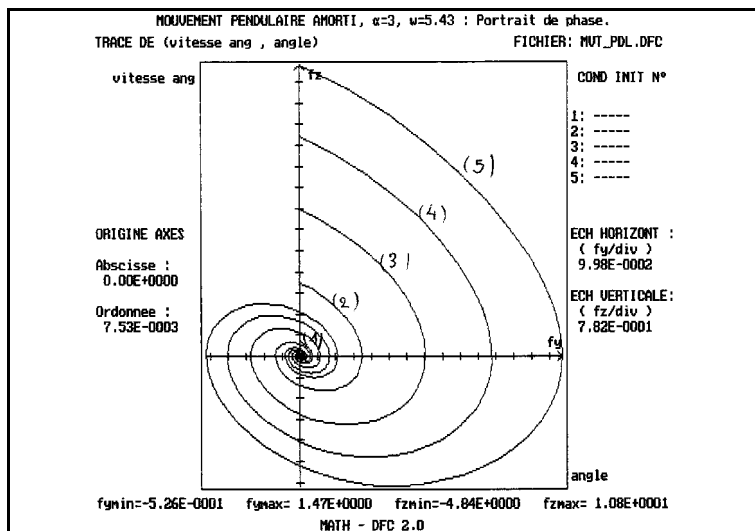


Figure 4 : Conditions initiales : (1) : $\theta'_0 = 0.543$ rad/s - (2) : $\theta'_0 = 2.72$ rad/s - (3) : $\theta'_0 = 5.43$ rad/s - (4) : $\theta'_0 = 8.15$ rad/s - (5) : $\theta'_0 = 10.8$ rad/s.

On représente directement le portrait de phase, plus significatif. On constate, pour les mêmes conditions initiales qu'au § 1.1.1., que le système s'immobilise au bout de quatre à cinq oscillations. On pourra remarquer que l'amplitude des oscillations allant rapidement en s'amortissant, on retrouve très vite les propriétés de l'oscillateur harmonique.

1.2.2. Figure 5 : Mouvement pendulaire amorti apériodique

On introduit maintenant un coefficient de frottement $\alpha = 10$ pour une pulsation $\omega = 5.43$.

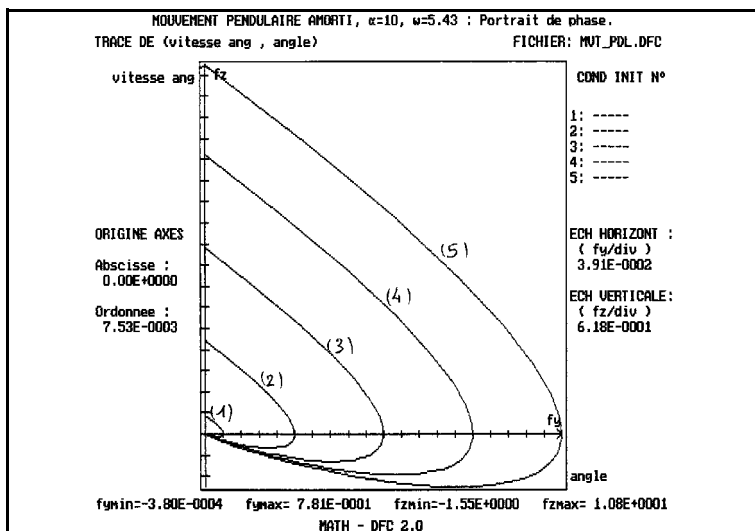


Figure 5 : Conditions initiales : (1) : $\theta'_0 = 0.543$ rad/s - (2) : $\theta'_0 = 2.72$ rad/s - (3) : $\theta'_0 = 5.43$ rad/s - (4) : $\theta'_0 = 8.15$ rad/s - (5) : $\theta'_0 = 10.8$ rad/s.

Le portrait de phase montre que le système s'immobilise sans effectuer une oscillation complète.

En séance de TD, on peut évidemment penser que les élèves pourront tester toute une « batterie » de valeurs pour α , pour les conditions initiales, etc.

1.2.3. Figure 6 : Mouvement révolutif

On choisit des conditions initiales permettant d'observer un mouvement révolutif dans la première phase du mouvement qui reste, ne l'oublions pas, amorti :

$$\theta_0 = 0$$

et $\theta'_0 = 10.9, 11.4, 16.3$ et 27.1 rad/s

la pulsation ω vaut : 5.43 rad/s

l'amortissement est : $\alpha = 1$

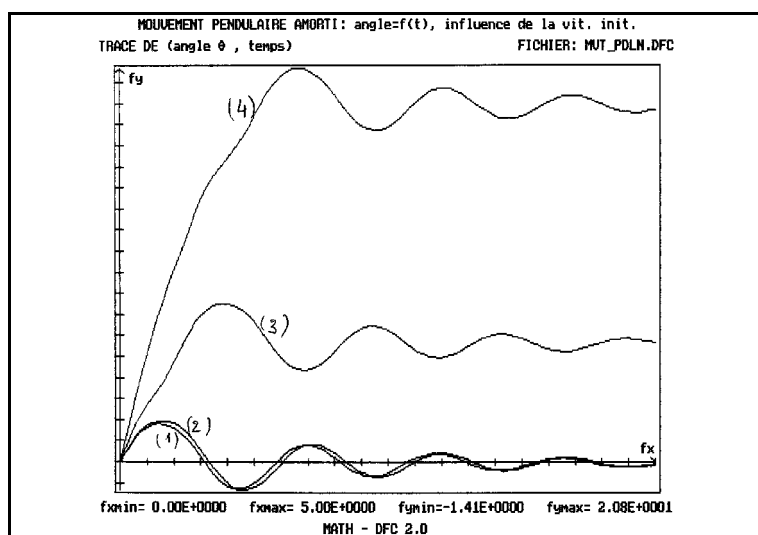


Figure 6 : Conditions initiales : (1) : $\theta'_0 = 10.9$ rad/s - (2) : $\theta'_0 = 11.4$ rad/s - (3) : $\theta'_0 = 16.3$ rad/s - (4) : $\theta'_0 = 27.1$ rad/s.

On constate que pour $\theta'_0 = 16.3$ rad/s, le système effectue un tour complet avant de s'immobiliser ; il effectue trois tours complets pour $\theta'_0 = 27.1$ rad/s.

1.2.4. Figure 7 : Mouvement révolatif, vitesse angulaire

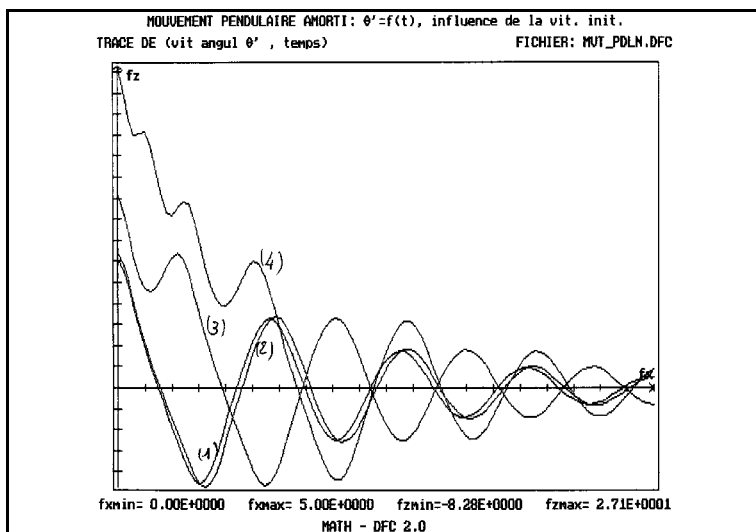


Figure 7 : Conditions initiales : (1) : $\theta'_0 = 10.9$ rad/s - (2) : $\theta'_0 = 11.4$ rad/s - (3) : $\theta'_0 = 16.3$ rad/s - (4) : $\theta'_0 = 27.1$ rad/s.

Le nombre de tours effectués est le nombre de maximums ou de minimums pour θ' avant qu'elle ne passe par 0...

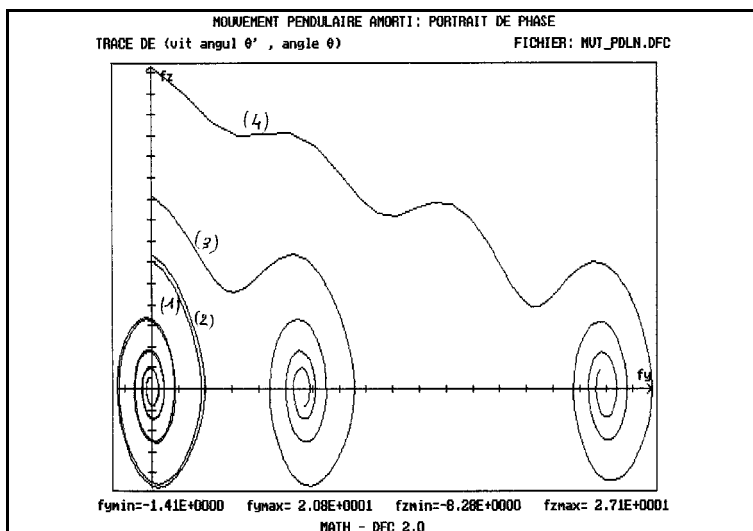
1.2.5. **Figure 8 : Mouvement révolutif, portrait de phase**

Figure 8 : Conditions initiales : (1) : $\theta'_0 = 10.9$ rad/s - (2) : $\theta'_0 = 11.4$ rad/s - (3) : $\theta'_0 = 16.3$ rad/s - (4) : $\theta'_0 = 27.1$ rad/s.

Le système ne s'immobilise pas pour les mêmes valeurs de θ .

2. **RÉSONANCE PARAMÉTRIQUE**

Nous raisonnerons sur le petit exercice suivant :

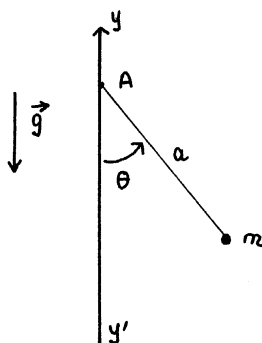


Figure 9

Un pendule simple est constitué par un fil de longueur a auquel est accroché une masse m , dans le champ de pesanteur.

Un opérateur «s'amuse» à faire varier la position de A sur l'axe vertical $y'y$ selon la loi :

$$y_A = y_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

On a pris : $y_0 = 0.05$ m, $\omega = 2 \cdot \omega_0$ ($\omega_0 = \sqrt{g/a}$),
 $a = 1$ m, $\theta_0 = 0.5$ rad, $\varphi = 0,6$ rad.

Nous laissons au lecteur, le soin d'établir, à titre d'exercice, l'équation différentielle en θ du mouvement. *Si vous ne trouvez pas, vous pouvez toujours écrire à l'auteur...*

2.1. **Figure 10** : On a représenté les graphes de l'élongation angulaire en fonction du temps pour les deux cas où A est mobile ou fixe.

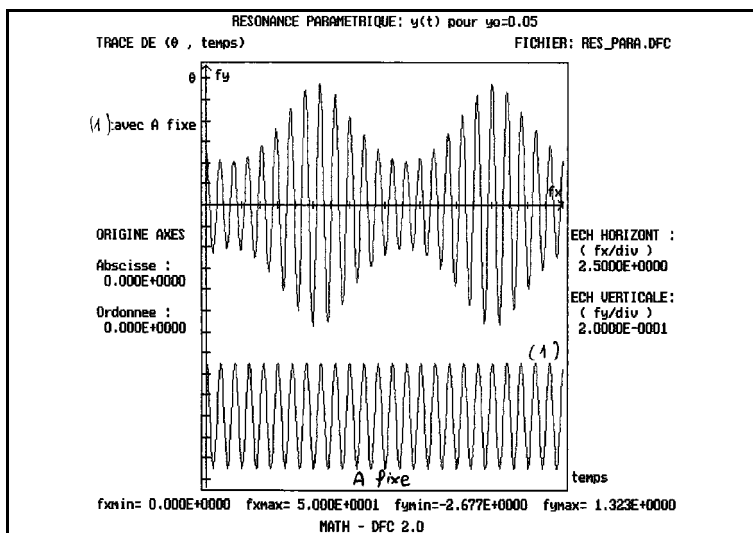


Figure 10

On constate que l'amplitude passe par des maximums (et des minimums) de façon périodique.

Bien entendu, il est naturel de se demander ce qui va se passer si l'on tire plus ou moins fort l'extrémité A (on fait varier y_0).

2.2. Figure 11 : On a pris $y_0 = 0.01$ m au lieu de 0.05 m

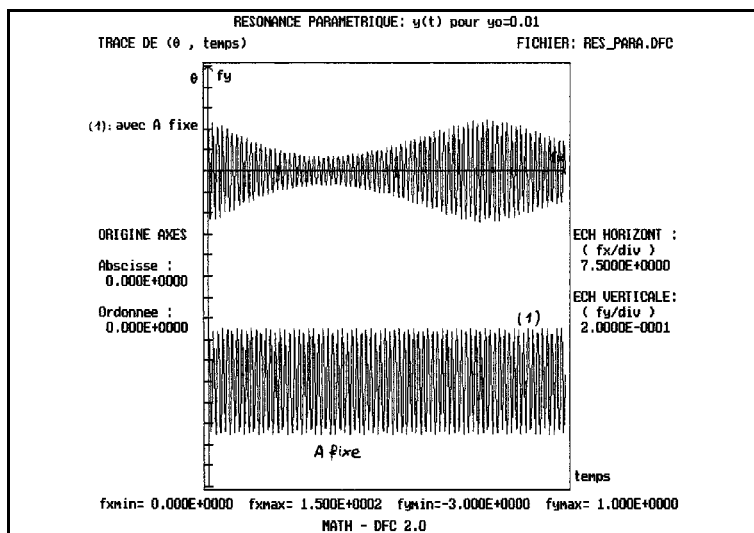


Figure 11

On constate que le phénomène de résonance paramétrique est moins marqué mais aussi que la période des résonances change bien que l'on ne change pas la valeur de période de l'excitation (valeur de ω).

2.3. Figure 12 : Portrait de phase

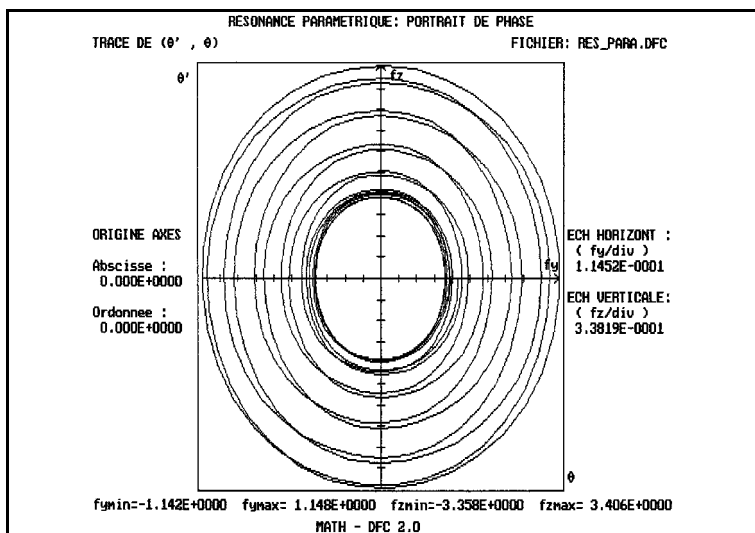


Figure 12

La représentation dans l'espace des phases montre que la forme de l'attracteur s'inscrit entre deux courbes fermées limites.

Pour aller plus loin : on peut demander à l'élève d'imaginer d'autres excitations (en créneaux, en triangle, un échelon, etc.). Si vous faites l'expérience avec vos élèves, vous serez surpris de l'intérêt qu'ils manifestent à la séance de TD, au point de ne plus pouvoir les «arracher» de devant leur écran...

Bien entendu, le logiciel offre la possibilité d'entrer des fonctions définies par morceaux, de superposer des courbes correspondant à plusieurs paramètres, à plusieurs conditions initiales, etc.

3. OSCILLATEUR DE VAN DER POHL

L'oscillateur de Van der Pohl (physicien néerlandais, 1889-1959) est défini par l'équation différentielle non-linéaire :

$$d^2y/dt^2 + \beta \cdot (y^2/a^2 - 1) \cdot dy/dt + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

Partant d'un état initial ($y_0 = 0$, $y'_0 \neq 0$), le système évolue vers un état final stable où l'on obtient des oscillations de relaxation d'amplitude donnée.

La valeur de β conditionne le temps mis pour atteindre cet état stable.

On a choisi : $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ et $a = 1$.

D'autre part :

- si β est petit, les oscillations sont quasi-sinusoïdales,
- si β augmente, les oscillations cessent d'être sinusoïdales.

Ce comportement est visualisé sur les figures ci-après.

3.1. Figure 13 : Oscillations pour $\beta = 20$ puis 100

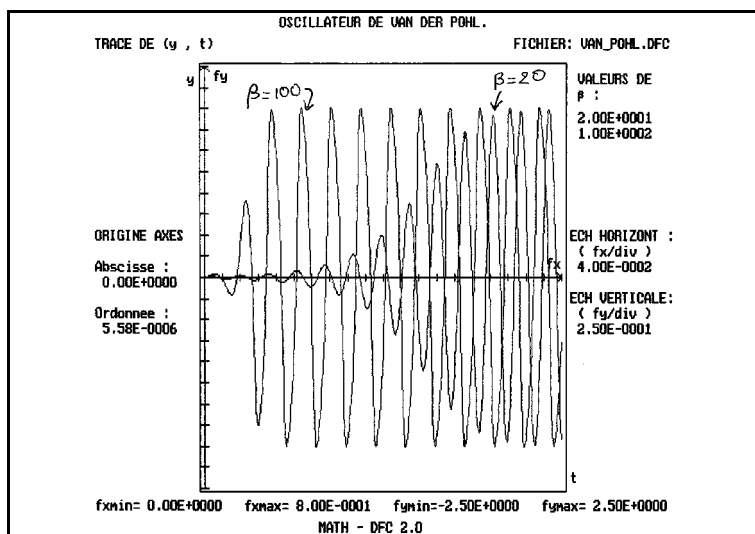


Figure 13

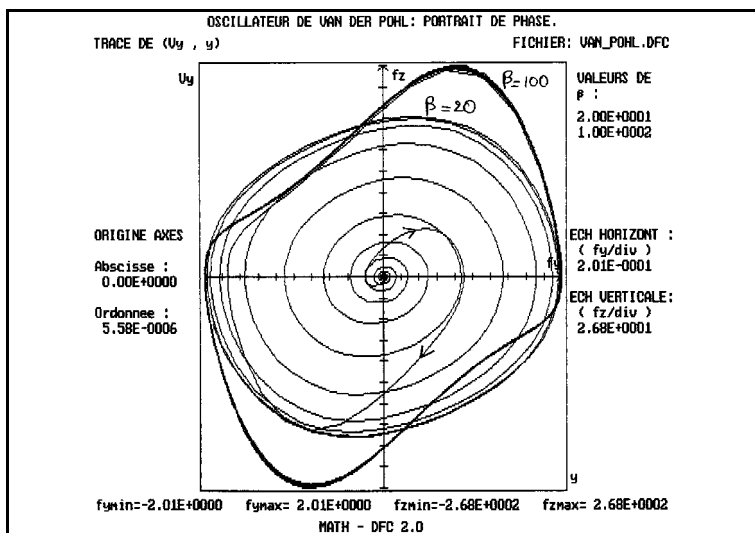
3.2. Figure 14 : Portrait de phase pour $\beta = 20$ puis 100

Figure 14

La forme de l'attracteur montre bien que pour $\beta = 100$, les oscillations ne sont pas sinusoïdales.

Cet oscillateur, au programme de terminale S, est un exemple de système oscillant entretenu.
On peut en trouver bien d'autres...

Enfin, nous terminerons avec un exemple plus complexe (*niveau classes préparatoires, réalisation d'un TIPE*) puisqu'il met en œuvre la résolution d'un système de deux équations différentielles du second ordre en utilisant des résultats de dynamique des fluides, de thermodynamique et de mécanique...

Il s'agit d'étudier, dans des conditions proches de la réalité, le mouvement d'une fusée ou d'un missile propulsés avec frottements dans l'atmosphère en équilibre hydrostatique, le mouvement comportant d'abord une phase propulsée puis une phase balistique. Bien entendu, le tir est en général oblique et l'on cherche à atteindre un objectif donné aux meilleures conditions.

4. TIR D'UN MISSILE PROPULSÉ

Nous commencerons d'abord par étudier un tir vertical de façon à voir comment on peut prendre en compte tous les paramètres du mouvement.

Puis nous étudierons le tir oblique.

Cette étude a déjà été testée pendant plusieurs années en séance de TD de deux heures avec des élèves de mathématiques spéciales. A l'issue de la séance, de nombreux élèves se sont posés des questions sur les caractéristiques d'un tir réel d'une fusée de type fusée-sonde ou encore, pour ceux qui ont osé (!), sur les performances d'un missile militaire.

4.1. Mouvement vertical

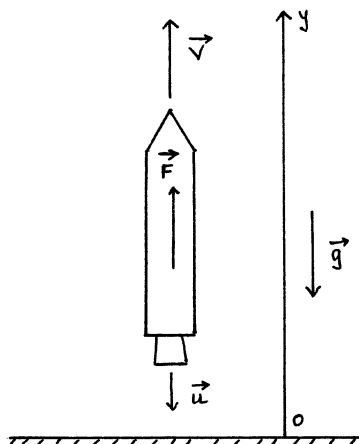


Figure 15

Une fusée est lancée verticalement en un point d'ordonnée $Y_0 = 0$ avec une vitesse initiale nulle. Son mouvement s'effectue dans les basses couches de l'atmosphère (altitude $y < 30$ km) pour laquelle on admet que la température varie selon la loi $T(y) = T_0 - a \cdot y$ avec $a = 3E - 3 \text{ K.m}^{-1}$.

On appelle M_0 la masse de la structure, M_p la masse de propergols au départ.

Les gaz de combustion sont éjectés avec une vitesse relative u par rapport à la fusée. Le débit massique Dm est supposé constant. La force de poussée est $F = - Dm \cdot u$, vers le haut.

Dans tout l'exercice, on admettra que le champ de pesanteur est uniforme et a la valeur g calculée au sol.

D'autre part, la fusée est soumise au cours de son mouvement à une force de frottement fluide de la forme $F_o = - k \cdot |V| \cdot V$ si V est sa vitesse.

Les données proposées sont :

- $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$,
- $Dm = 1.5 \text{ kg/s}$,
- $M_o = 20 \text{ kg}$,
- $M_p = 80 \text{ kg}$,
- $u = 1000 \text{ m/s}$,
- masse volumique de l'air au sol : $\mu_o = 1.293 \text{ kg.m}^{-3}$,
- masse molaire de l'air : $M = 19 \times 10^{-3} \text{ kg/mole}$,
- température au sol : $T_o = 300 \text{ K}$,
- constante des gaz parfaits : $R = 8.314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; l'air est un gaz parfait,
- le coefficient de frottement (traînée) est donné par $k = 1/2 \cdot \mu \cdot S \cdot C$, où S est le maître-couple et C le coefficient de traînée de l'air ("Cx"). On donne $1/2 \cdot \mu_o \cdot S \cdot C = 0.01$.

Les questions posées aux élèves sont :

- Établir la loi de variation de la masse volumique $\mu(y)$ de l'air en utilisant la relation fondamentale de la statique des fluides. En déduire le coefficient de frottement $k(y)$ à l'altitude y .
- En appliquant à la fusée la relation fondamentale de la dynamique des systèmes ouverts lors de la phase propulsée ($0 < t < t_o$), établir l'équation différentielle du mouvement sous la forme $d^2y/dt^2 = f(t, V)$.

– Phase balistique : déterminer la durée t_0 de la phase propulsée. Pour $t > t_0$, la fusée devient un système fermé (masse M_0) soumis aux forces de frottement définies précédemment.

Elle atteint son altitude maximum $y_{\max}$ au temps $t_{\max}$ puis retombe. Elle atteint sa vitesse maximale $V_{\max}$ en fin de phase propulsée pour $t = t_0$.

Il est intéressant de pouvoir déterminer pour des caractéristiques données telles que M_0 , M_p , D_m , u , ... l'altitude maximale atteinte, la durée totale du mouvement, la vitesse maximale, etc.

Nous laissons au lecteur le soin de répondre aux questions précédentes... Nous donnerons simplement quelques enregistrements parmi les plus typiques.

4.1.1. Influence du débit massique sur l'altitude maximale atteinte : On peut se poser la question : «Vaut-il mieux avoir un fort débit D_m et une courte durée de fonctionnement du moteur ou un faible débit et une plus longue durée de fonctionnement pour atteindre l'altitude maximum la plus grande possible ?».

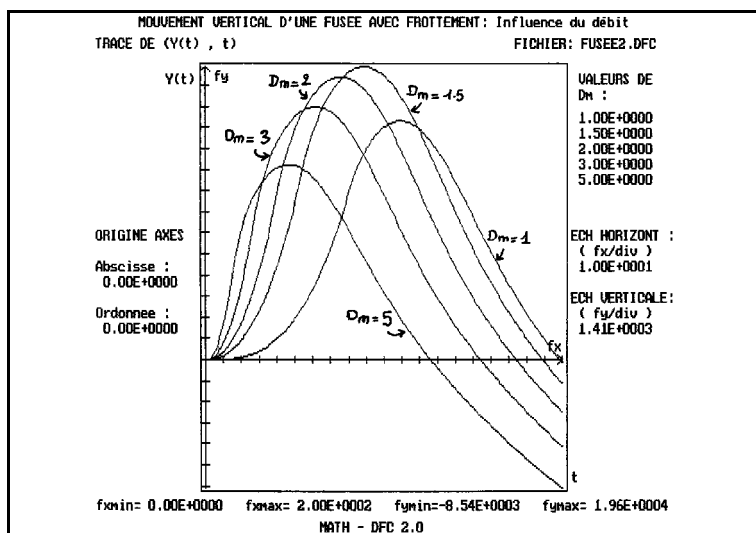


Figure 16

On voit, sur la figure 16, qu'il existe une solution semblant être aux alentours de $Dm = 1.5 \text{ kg/s}$ pour le débit optimum cherché. En fait, une analyse plus fine montre que la solution n'est pas unique.

4.1.2. La figure 17 montre, pour les mêmes valeurs du débit Dm que précédemment, les vitesses maximales atteintes. On remarquera également que l'instant où la fusée atteint son altitude maximum correspond à une vitesse nulle. L'influence du frottement indique, d'autre part, que dans la phase balistique, la fusée peut évoluer vers une vitesse limite, dans la mesure où elle ne touche pas le sol avant...

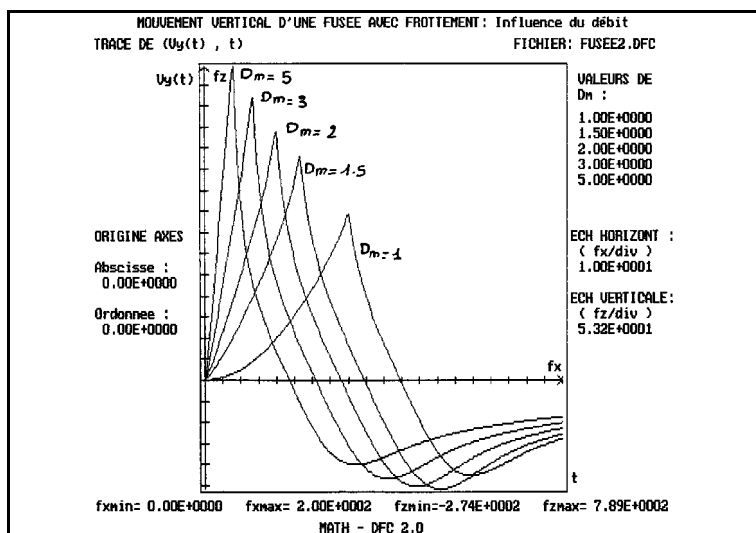


Figure 17

4.1.3. La figure 18 représente l'espace des phases associé aux mouvements précédents. On voit bien l'existence de la vitesse limite dans la phase balistique.

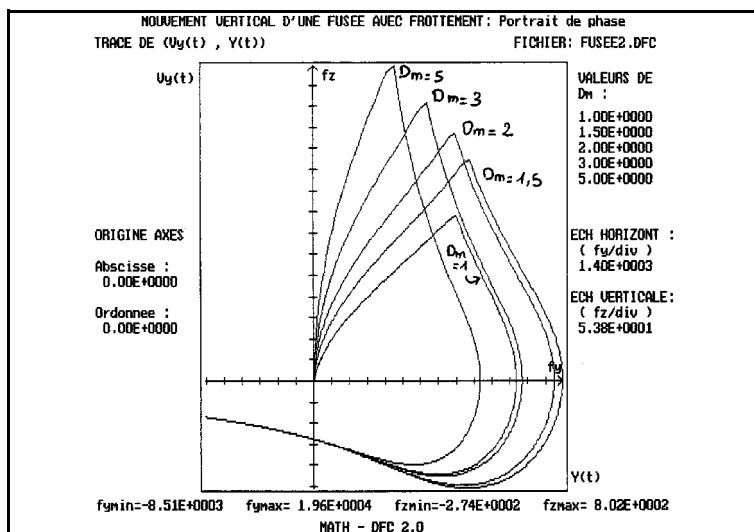


Figure 18

4.2. Tir oblique

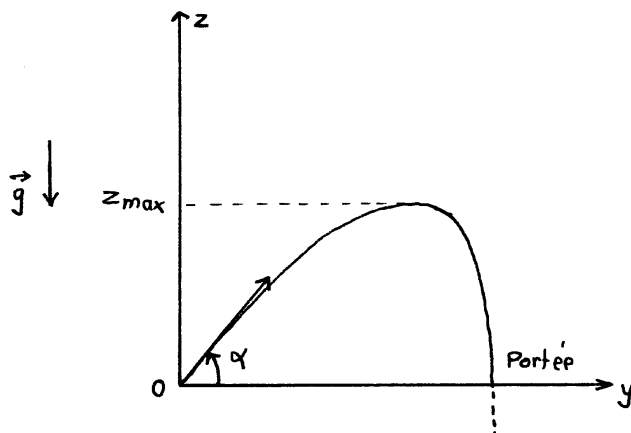


Figure 19

Toujours avec les mêmes paramètres que précédemment, on envisage maintenant le tir oblique d'un missile auto-propulsé à partir d'une rampe de lancement inclinée de l'angle α . Le missile démarre avec une vitesse nulle sur la rampe.

Les élèves doivent trouver les équations paramétriques de la trajectoire sous la forme d'un système de deux équations :

$$d^2y/dt^2 = f_1(t, z, V_y, V_z)$$

$$d^2z/dt^2 = f_2(t, z, V_y, V_z)$$

On choisira, par exemple, $\alpha = 45^\circ$.

On peut chercher à optimiser les conditions de lancement pour obtenir une portée la plus grande possible ou une altitude la plus grande possible ou bien encore pour atteindre un point de coordonnées (y, z) données, ce qui est le but principal d'un missile...

Le logiciel utilisé demande un temps de calcul inférieur à la seconde pour chaque trajectoire (DX2, 33 MHz, on peut faire mieux avec un pentium 75 MHz où le calcul est quasi-instantané !).

4.2.1. Trajectoires pour différents débits massiques

On constatera, là-aussi, que si l'on cherche à atteindre une altitude maximum la plus élevée possible, il faut choisir un débit donné : aux environs de $D_m = 15 \text{ kg/s}$.

On voit également que pour un débit donné, certains points (y, z) ne peuvent être atteints.

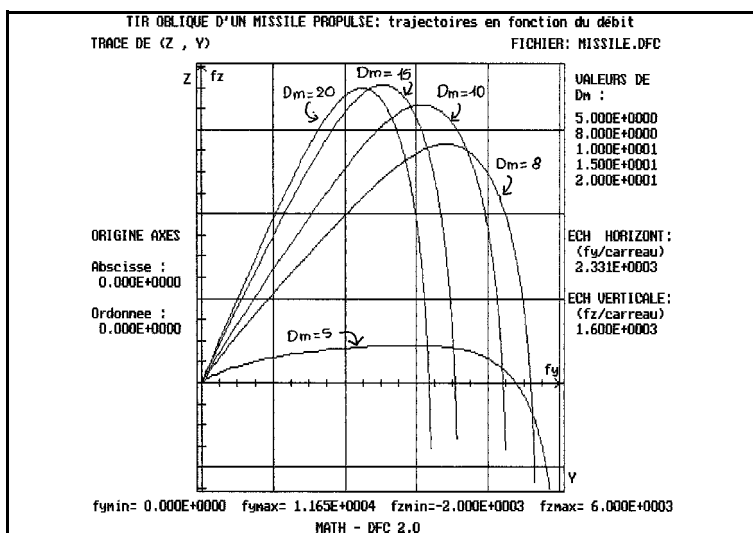


Figure 20

Bien entendu, on peut également étudier l'influence de beaucoup d'autres paramètres comme l'angle de tir, la vitesse d'éjection, le coefficient de frottement (valeurs du C_x , de S , etc.), la masse de propergols, la masse de la structure, la loi $T(y)$, ...

Le logiciel permet tout ceci en quelques secondes seulement...

Nous terminerons en donnant une représentation un peu «exotique» du mouvement dans l'espace des vitesses (V_y , V_z).

Ce diagramme nous donne très rapidement les positions des points où le module de la vitesse par un maximum : on peut ainsi déterminer, par exemple, si le missile peut devenir supersonique, ce qui changerait alors les données du problème...

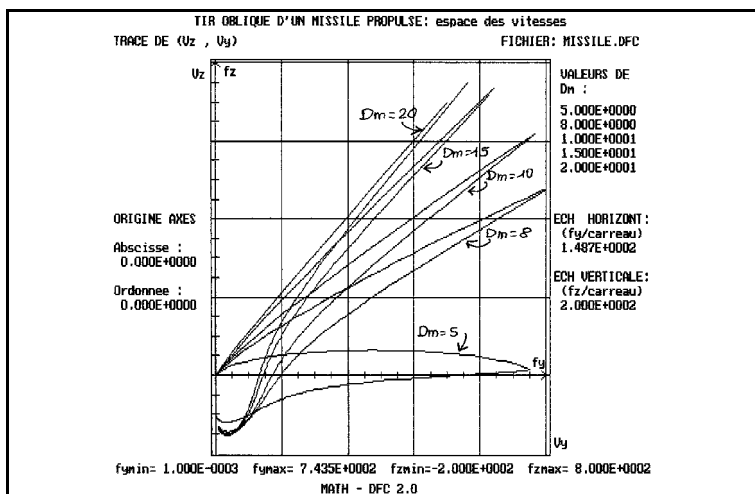


Figure 21

CONCLUSION

Nous n'avons pas développé dans cet article l'aspect expérimental (c'est une séance de travaux dirigés...).

Il est bien évident que l'on peut confronter ces résultats théoriques avec les résultats d'une expérience. Le logiciel utilisé offre, en effet, un ensemble de menus complets de traitement de données, d'acquisition de mesures, etc., permettant de faire toutes les modélisations souhaitées.

Il possède également un éditeur de texte intégré permettant de rédiger (en couleur) le texte complet de l'étude à réaliser et qui peut être appelé à tout moment.

Disons que, sur le plan pédagogique, une séance de TD peut précéder la séance de TP où l'on cherchera à mettre en œuvre expérimentalement les résultats obtenus.

ANNEXE

Logiciel utilisé : «*Équations différentielles*», nouvelle version 2.0., MICROLAMBDA - Z.I. Auguste - 33610 CESTAS.