90^e Année - N° 781 Publication Mensuelle Février 1996

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

Les équations différentielles dans le programme de physique
de la classe de terminale scientifique

par Jean WINTHER
professeur de sciences physiques
Lycée Raspail - 75014 Paris

INTRODUCTION : UN CONSTAT

L'étude d'un phénomène physique conduit souvent à une équation différentielle : *chute libre d'un corps dans un champ de pesanteur, projectile dans un champ de pesanteur, particules dans un champ magnétique ou un champ électrique, oscillateurs mécaniques ou électriques, etc.*

Le plus souvent nous ne savons pas la résoudre car il n'existe pas de solutions littérales ou les élèves n'ont pas les connaissances mathématiques suffisantes pour en faire la résolution.

A partir d'un état initial, un phénomène physique évolue de proche en proche. La nature «ignore» parfaitement la solution générale de l'équation différentielle le régissant. Ainsi pour un phénomène à croissance ou décroissance exponentielle, fréquent en physique, ne «connaît-elle» que l'état initial (x0, y0) et la simple relation de proportionnalité directe : $dy = k.y.dx$ entre la variation de x et la variation concomitante de y. Elle «ignore» parfaitement la solution : $y = C.\exp(kx)$, génial raccourci, inventé par les mathématiciens, artifice de calcul permettant d'éviter une suite de calculs longs, pénibles, fastidieux et incertains[1].

L'ordinateur travaille également à partir d'une valeur initiale d'une variable, de proche en proche et ne connaît la valeur actuelle de cette variable qu'en ayant d'abord calculé successivement toutes les valeurs antérieures. Il «ignore» les suites de calculs longs, pénibles, fastidieux et incertains aussi l'ordinateur apparaît-il comme étant pour le physicien, l'outil de laboratoire idéal, travaillant de manière «naturelle», servi et non pas asservi par la si merveilleuse mathématique. Les lois de la nature sont souvent simples. Nos méthodes analytiques conduisent rapidement à des résultats extraordinairement compliqués (quand elles y conduisent).

Pour intégrer il n'est pas nécessaire de connaître les fonctions dérivées. L'élève possède la notion de vitesse dx/dt d'un mobile d'abscisse x à la date t bien avant celle de la dérivée qui la sublime.

Le calcul numérique offre des possibilités dans tous les domaines des sciences physiques où il est possible d'analyser les phénomènes en termes de petites variations et où chaque état dépend du précédent et peut être calculé à l'aide d'une relation simple.

1. LA MÉTHODE CLASSIQUE

Compte tenu du constat précédent : «les élèves n'ont pas les connaissances mathématiques suffisantes pour en faire la résolution des équations différentielles ou celles-ci n'ont pas de solutions littérales», les phénomènes proposés à l'étude sont des phénomènes simplifiés, on prend des solides ponctuels, on néglige les frottements, on étudie de petites oscillations, etc. La physique mise en jeu est coupée de la réalité. Aux yeux des élèves il existe deux physiques celle qu'il pratique en cours et en travaux pratiques et l'autre, celle

1. D'après C. DUTOUR professeur honoraire - Lycée d'État - 36100 MURET.

avec un grand P capable d'envoyer des sondes aux confins de l'univers ou de briser les atomes.

Cette impossibilité de résoudre les équations différentielles conduit à choisir la méthode suivante :

– la confrontation théorie-expérience.

C'est la méthode que l'on rencontre le plus fréquemment dans l'enseignement secondaire. Le phénomène est introduit de manière qualitative par des expériences de cours puis son aspect quantitatif est développé en travaux pratiques.

On établit l'équation différentielle si elle existe et on fournit les solutions mathématiques. Si la résolution mathématique n'est pas possible, l'étude ne peut être menée.

2. UNE NOUVELLE MÉTHODE

Les programmes de la terminale scientifique proposent de nouvelles activités expérimentales et en particulier ils proposent :

– l'élaboration d'un modèle.

Nous pouvons mettre à la disposition des élèves, grâce aux calculettes, micro-poches et micro-ordinateurs, des possibilités de calculs et de traitements des données d'une puissance chaque jour plus importante : le nombre élevé des données recueillies, leur traitement mathématique rapide, leur visualisation graphique sont autant de facilités offertes à l'élève.

Il leur est possible maintenant de traiter les données obtenues à partir des observations, des expériences et des mesurages afin d'élaborer les modèles de compréhension des phénomènes et de les confronter aux expériences, ceci dans le temps imparti à une séance de travaux pratiques.

C'est pourquoi nous proposons la méthodologie suivante :

– les données sur les phénomènes étudiés seront recueillies manuellement ou par acquisition automatique à l'aide de capteurs et d'un micro-ordinateur (ou d'une calculette) muni d'une interface ;

– établissement des équations différentielles ;

– résolution des équations différentielles à l'aide des instruments informatiques.
Il existe de nombreux logiciels qui permettent la résolution des équations différentielles. Celle-ci se fait sans aucun problème avec la plupart des calculettes graphiques programmables existant sur le marché. Mais elle nécessite la mise en œuvre de méthodes numériques et l'écriture de petits programmes (voir Annexe). Certains modèles de calculette disposent de résolveurs intégrés d'équations différentielles ;

– confrontation des solutions obtenues aux données expérimentales (et éventuellement aux solutions mathématiques) ;

– validation des modèles et détermination de leur domaine de validité.

Sur deux exemples intéressants et importants, les oscillateurs mécaniques, nous allons confronter deux approches, une étude classique et une étude développant des activités de modélisation.

3. EXEMPLE 1 : ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU PENDULE VERTICAL

3.1. Rappels théoriques

Soit un solide suspendu à un ressort (de masse négligeable et à spires non jointives), on néglige les frottements.

Sous l'action du solide, de masse m, le ressort, de longueur à vide l_0 s'allonge de Δl_0 et prend une longueur l_1.

Il est soumis à deux forces :

– son poids $\overrightarrow{mg}$,

– l'action du ressort $\overrightarrow{T}$ telle que $T = k\,(l_1 - l_0) = k\,\Delta l_0$.

A l'équilibre : $\overrightarrow{mg} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$

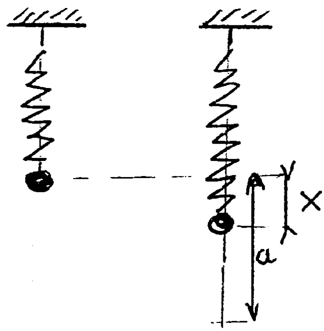
Si on allonge le ressort d'une longueur a et qu'on le lâche sans vitesse initiale il est animé d'un mouvement oscillatoire régi par l'équation différentielle :

$$m\,\ddot{X} = -\,k\,X$$

Mathématiquement on montre que les solutions de cette équation sont de la forme : $X = A \sin(\omega t + \varphi)$:

avec : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

et : $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$



3.2. **Un exemple de travaux pratiques classiques**[2]

Le solide S de masse m est accroché à un ressort vertical, sans masse, de raideur k. L'allongement au repos (ou statique) est Δl_0.

1°) Écrire la condition d'équilibre de S et calculer la raideur k du ressort.

Isochronisme des petites oscillations :

Le centre d'inertie G de S est amené de G_0 à G_m, puis abandonné sans vitesse initiale. Mesurer la durée de dix oscillations complètes (soit dix périodes), et calculer la période propre T_0 en tenant compte des indications du tableau 1.

G_0G_m (cm)	T_0 (s)
2	
3	
4	
2 avec $V_0 \neq 0$	

Tableau 1

2. D'après des travaux pratiques réalisés au Lycée Maurice Ravel - PARIS XIV[e].

Conclusion :

2°) Relation entre la période T_0 et m_a masse m du solide :

Mesurer la période pour trois valeurs de m et compléter le tableau 2.

m	T_0	T_0^2	T_0^2/m

Tableau 2

Conclusion :

3°) Relation entre la période T_0 et la constante de raideur :

Accrocher la même masse m successivement à deux ressorts différents de constantes de raideur k et k', puis aux deux ressorts accrochés bout à bout. Compléter le tableau 3.

k	T_0	$T_0^2 * k$
$k = mg/\Delta l_0$		
$k' = mg/\Delta l_0$		
k'' =		

4°) En appliquant le théorème du centre d'inertie au solide S, écrire l'équation différentielle du mouvement.

3.3. Une nouvelle approche

Recueil des données

– Les données sur les phénomènes étudiés seront recueillies manuellement ou par acquisition automatique.
On peut imaginer de nombreux dispositifs pour recueillir les différentes positions du solide en fonction du temps.

– Un mobile autoporteur accroché à un ressort et placé sur une table verticale.
On peut rendre la manipulation automatique en utilisant une table à digitaliser. Les données sont stockées dans le micro-ordinateur.

– Un mobile métallique accroché à un ressort plongé dans un éprouvette remplie d'une solution de sulfate de cuivre, un micro-ordinateur mesure à des intervalles réguliers la différence de potentiel entre le solide et un capteur placé au fond de l'éprouvette.

– Un mobile accroché à un ressort et placé dans le faisceau d'un émetteur récepteur d'ultrasons permettant d'obtenir à tout moment la position du solide par rapport à l'émetteur (système CBL TEXAS).

Établissement des équations différentielles

m $\ddot{X}$ = – k X.

Résolution des équations différentielles

Elle se fait avec un logiciel approprié ou une calculette.
Cette résolution se visualise le plus souvent par la courbe X = f(t).

Confrontation des solutions obtenues aux données expérimentales

On peut superposer la courbe solution de l'équation différentielle à la courbe des valeurs expérimentales.
On peut mesurer sur la courbe solution la période et la comparer à la période du pendule linéaire.

Confrontation des solutions obtenues à la solution mathématique

On peut superposer la courbe solution de l'équation différentielle à la courbe des valeurs calculées à partir de l'équation X = a cos (ωt + φ).
On peut mesurer sur la courbe solution la période et la comparer à la période calculée $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Validation des modèles et détermination de leur domaine de validité

Sur certains dispositifs précédents il est possible d'introduire des frottements et d'obtenir des courbes expérimentales différentes. Il est intéressant de prendre en compte les nouveaux paramètres et de montrer ainsi que l'équation différentielle m $\ddot{X}$ = – k X doit être modifiée pour modéliser les nouvelles situations.

3.4. Exemple de résolution avec un résolveur d'équation différentielle (calculette graphique TI85 TEXAS)

$$m\ddot{X} + kX = 0$$

La méthode numérique utilisée par la TI85 transforme une équation différentielle d'ordre n en un système de n équations différentielles. Pour la TI85 les variables seront t et Q1.

$$m\ Q1'' + k\ Q1 = 0$$

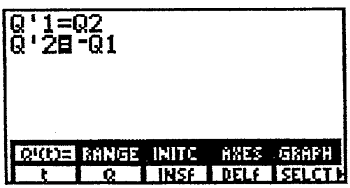
$$Q1'' = \frac{-k\ Q1}{m}$$

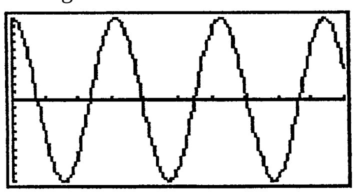
Pour l'équation différentielle du second ordre étudiée le changement de variable donnera :

$$Q'1 = Q2 \text{ (désactivé)}$$

$$Q'2 = \frac{-k\ Q1}{m}$$

Si par exemple $k = 1\ Nm^{-1}$ et $m = 1$ kg





4. EXEMPLE 2 : LE PENDULE ÉLASTIQUE HORIZONTAL

4.1. Rappels théoriques

– Soit un solide S qui peut osciller en se déplaçant sur un axe horizontal.

– Masse du solide (S) en translation dont le centre d'inertie G est sur l'axe : m.

– Raideur du ressort de masse négligeable par rapport à m : k.

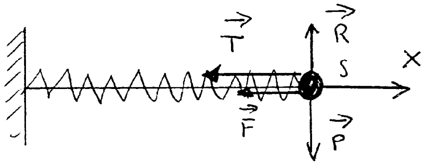
– Origine des abscisses : position de G au repos.

– Origine des dates : instant où le système, déplacé de sa position d'équilibre, est abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

– Vitesse de G à l'instant t : $\vec{v}$.

– Accélération de G à cet instant : $\vec{a}$.

– Poids de la masse m : $\vec{P} = m\vec{g}$.
– Action de l'axe : $\vec{R}$.
– Tension du ressort : $\vec{T} = -k\vec{X}$.
– Force de frottement : $\vec{F} = -h\vec{v}$.



La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Si l'on projette sur l'axe du ressort :

$$-kX - hv = ma$$

L'équation peut s'écrire :

$$m\ddot{X} + h\dot{X} + kX = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.

La solution mathématique fournit les solutions suivantes :

- *Premier cas (amortissement faible)*

Mouvement pseudo-périodique :

$$X = A\,\mathrm{Exp}(-\alpha t) * \cos(t\omega + \varphi) \qquad (\alpha > 0)$$

$$\omega^2 = \frac{4\,mk - h^2}{4\,m^2}$$

$$\alpha = \frac{h}{2\,m}$$

A et φ sont déterminées par les conditions initiales.

- *Deuxième cas (amortissement fort)*

Mouvement apériodique :

$$X = A\,\mathrm{Exp}(-\alpha t) + \mathrm{Exp}(-\beta t) \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

α et β sont les racines de l'équation $mu^2 - hu + k = 0$.
A et B sont déterminées par les conditions initiales.

- Troisième cas (amortissement critique)

$$X = (A + Bt) * \mathrm{Exp}(-\alpha t) \qquad (\alpha > 0)$$

$$\alpha = -\frac{h}{2\,m}$$

A et B sont déterminées par les conditions initiales.

- *Cas particulier (oscillateur non amorti)*

Oscillateur harmonique :

$$m\ddot{X} + kX = 0$$

Solution : $X = A * \cos(\omega t + \varphi)$

avec : $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

Pour $t = 0$: $X = X0 > 0$ et $v = v0 = 0$

$$X = X0 * \cos \omega t$$

4.2. Un exemple de travaux pratiques classiques[3]

On dispose sur une table d'un mobile autoporteur accroché aux bords de la table par deux ressorts.

La masse du mobile vaut $m = 230$ g ; le ressort équivalent aux deux ressorts R_1 et R_2 a pour constante de raideur $k = 3{,}1\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

1°) Montrer que le ressort équivalent aux deux ressorts R_1 et R_2 a pour constante de raideur $k = k_1 + k_2$.

2°) A l'aide de l'enregistrement, calculer pour chaque position de G : v, x^2 et v^2.

3. D'après des travaux pratiques réalisés au Lycée Maurice Ravel - PARIS XIVe.

Présenter les résultats sous forme d'un tableau (voir tableau 4).

x ( )	v ( )	x^2	v^2

Tableau 4

3°) Construire le graphe v = f(x).

– Quelle est la courbe obtenue ?

– Quelle est son équation ? (1).

– En déduire l'équation différentielle du mobile autoporteur et comparer à celle obtenue à partir du théorème du centre d'inertie.

4°) En appliquant le théorème du centre d'inertie, déduire de (1) l'expression du travail de la tension du ressort et donner une expression de l'énergie potentielle élastique de l'oscillateur.

4.3. Une nouvelle approche

Recueil des données

– Les données sur les phénomènes étudiés seront recueillies manuellement ou par acquisition automatique.
On peut imaginer de nombreux dispositifs pour recueillir les différentes positions du solide en fonction du temps.

– Un mobile autoporteur accroché à deux ressorts et placé sur une table horizontale.
On peut rendre la manipulation automatique en utilisant une table à digitaliser. Les données sont stockées dans le micro-ordinateur.

– Un mobile accroché à un ressort coulissant sur un axe horizontal et placé dans le faisceau d'un émetteur récepteur d'ultrasons permettant d'obtenir à tout moment la position du solide par rapport à l'émetteur (système CBL TEXAS).

Établissement des équations différentielles

$m\ddot{X} + h\dot{X} + kX = 0$ avec frottement,

$\mathrm{m}\ddot{X} + \mathrm{kX} = 0$ sans frottement.

Résolution des équations différentielles

Elle se fait avec un logiciel approprié ou une calculette.
Cette résolution se visualise le plus souvent par la courbe $X = f(t)$.

Confrontation des solutions obtenues aux données expérimentales

On peut superposer la courbe solution de l'équation différentielle à la courbe des valeurs expérimentales.
On peut mesurer sur la courbe solution la période et la comparer à la période du pendule linéaire (régime pseudo-périodique et oscillateur harmonique).

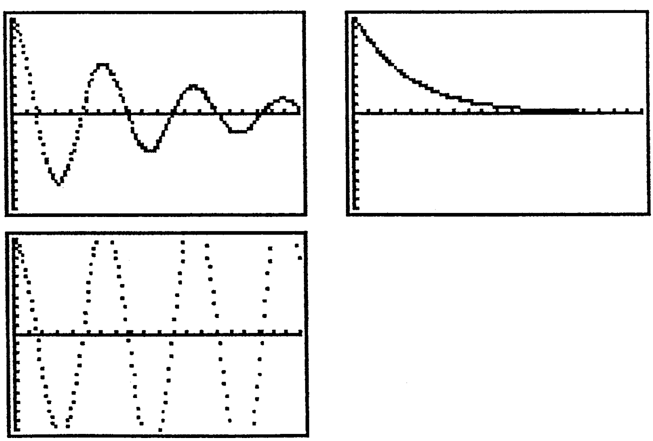
Confrontation des solutions obtenues à la solution mathématique

On peut superposer la courbe solution de l'équation différentielle à la courbe des valeurs calculées à partir des différentes équations.
On peut mesurer sur la courbe solution la période et la comparer à la période calculée $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (régime pseudo-périodique et oscillateur harmonique).

Validation des modèles et détermination de leur domaine de validité

On précise bien le domaine de validité de chacun des modèles : régime pseudo-périodique, amortissement critique, amortissement fort, oscillateur harmonique.

4.4. **Exemple de résolution par programmation (calculette graphique programmable TI82 Texas)**



Annexe

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équations différentielles du premier ordre

$y' = f(x, y)$ conditions initiales $\{x_0, y_0\}$

Méthode d'Euler.

On transforme une équation différentielle en une équation récurrente :

$$y' = f(x, y) \Rightarrow x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x\, f(x_n, y_n)$$

Ceci revient à assimiler la courbe à une droite entre x_n et x_{n+1}.

Il existe des méthodes de résolution plus performantes (exemple méthode de Runge Kutta) mais elles sont plus difficiles à mettre en œuvre avec des élèves.

Pour résoudre l'équation différentielle il suffit de réaliser un programme à partir de l'algorithme précédent. Certaines calculettes disposent de fonctions de résolution d'équations différentielles (basées d'ailleurs sur une résolution numérique des équations)

Équations différentielles du second ordre

Soit à déterminer y(x) vérifiant l'équation différentielle :

$$y'' = g(x, y, y')$$

à partir des conditions initiales :

$$\{x_0, y_0\} \quad \text{et} \quad \{x'_0, y'_0\}$$

Principe

On pose : $u_1 = y$ et $u_2 = y' = u'_1$

alors : $u'_2 = y'' = g(x, y, y')$

On transforme ainsi une équation différentielle du second ordre en un système différentiel du premier ordre.

$$u'_1 = u_2$$

$$u'_2 = g(x, u_1, u_2)$$

on sait résoudre u'_2 par la méthode d'Euler.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME AVEC UNE CALCULETTE GRAPHIQUE ET PROGRAMMABLE

L'analyse du problème conduit à intégrer numériquement une équation différentielle du second ordre. Il est nécessaire d'initier les élèves à intégrer une intégrale par une méthode numérique.

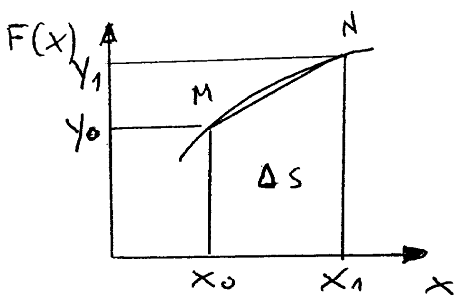
La méthode des trapèzes est une des plus simples et est à la portée des élèves de terminale. La seule connaissance d'analyse à posséder (qui au programme du cours de mathématiques) est :

$$\Delta S = \int_{x0}^{x1} f(x)\, dx$$

ΔS étant l'aire algébrique de la surface contenue entre la courbe et les points d'abscisses x0 et x1.

Si dx est suffisamment petit on peut confondre dS avec l'aire du trapèze obtenu en remplaçant l'arc MN par le segment MN. On a alors :

$$\Delta S = \int_{x0}^{x1} f(x)\, dx = \frac{Y0 + Y1}{2}\, \Delta X$$



L'algorithme de l'intégration est le suivant :
(cas d'une fonction exponentielle)

$$X0 \leftarrow 0$$

$$S \leftarrow 0$$

$$X1 \leftarrow X0 + DX$$

$$Y0 \leftarrow \exp X0$$

$$Y1 \leftarrow \exp X1$$

$$\Delta S \leftarrow \frac{Y0 + Y1}{2} \Delta X$$

$$S \leftarrow S + \Delta S$$

$$X0 \leftarrow X1$$

La méthode de résolution d'une intégrale étant acquise il est possible de l'utiliser pour résoudre l'équation différentielle du second ordre. L'équation :

$$m\ddot{X} + h\ddot{X} + kX = 0$$

peut s'écrire en posant : $\ddot{X} = dv/dt$

$$m\ dv/dt + hv + k \int_0^t v \cdot dt = 0$$

qu'il est possible d'intégrer numériquement.

A l'instant $t = t0$ $v = v0$ et $X = X0$

Ces valeurs vérifient l'équation du mouvement :

$$m\ dv0/dt + hv0 + kX0 = 0$$

Si Δt est très petit on peut écrire :

$$m\ \Delta v0/\Delta a\ t + hv0 + kx0 = 0$$

$$m\ \Delta v0/\Delta t = -(hv0 + kx0)$$

$$\Delta v0 = -\Delta t/m\ (hv0 + kx0)$$

Avec un pas d'intégration adéquat :
– ni trop grand (précision insuffisante),

– ni trop petit (calcul trop long).

On peut écrire :

à l'instant t1 : $t1 = t0 + \Delta r \quad v = v1 \quad X = X1$

$$v1 = v0 + \Delta v0$$

$$v1 = v0 - \Delta t / m\,(hv0 + kX0)$$

$$X1 = X0 + \Delta X0$$

comme : $$X1 - X0 = \int_0^t v \,.\, dt$$

La méthode des trapèzes donne :

$$\Delta v0 = (v0 + v1)\,\Delta t / 2$$

$$X1 = X0 + (v0 + v1)\,\Delta t / 2$$

Il est possible d'écrire l'algorithme suivant :

Lire m, h, k, t0, v0, Δt, durée de la résolution Afficher t0, X0 $v1 \leftarrow v0 - \Delta t / m\,(hv0 + kX0)$ $X1 \leftarrow X0 + (v0 + v1)\,\Delta t / 2$ $t1 \leftarrow t0 + \Delta t$ $t0 \leftarrow t1$; $v0 \leftarrow v1$; $x0 \leftarrow X1$