

Corrigé du Concours Général

Session 1995

Physique-Chimie

par Hubert GIÉ
et les membres du Jury

I. Interférences à deux ondes

- I.1. a - Il s'agit de dispositifs très classiques. La cohérence implique que les signaux qui interfèrent soient *corrélés*. Une expérience d'interférences permet d'atteindre le *degré de corrélation* des signaux.
- b - 1 - Voir figure 1.

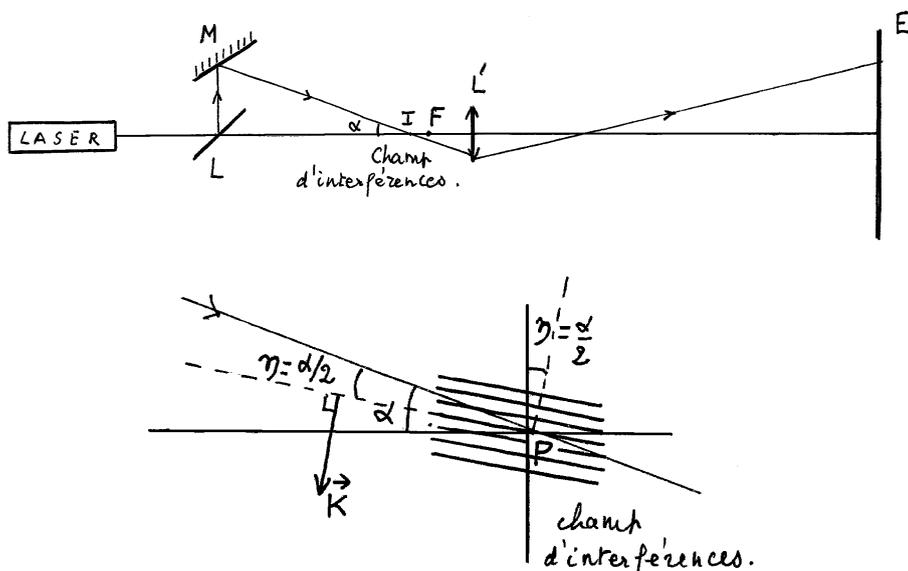


Figure 1

2 - Le laser assure la cohérence des deux ondes.

3 - L' joue le rôle d'une lentille de projection très agrandissante (courte distance focale). On place le plan focal objet de L' un peu en arrière du champ d'interférence de manière à observer une image réelle agrandie sur l'écran E.

4 - L'angle du plan du miroir M avec celui de la lame L est $\alpha/2$.

I.2. a - Interférences constructives pour $p = \text{entier}$.

Interférences destructives pour $p = \text{entier} + \frac{1}{2}$

$$\mathbf{b -} \quad \delta(M) - \delta(O) = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{r}$$

$$\text{d'où :} \quad \boxed{\Delta p = p(M) - p(O) = \frac{1}{2\pi} \vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (1)$$

$$\text{avec} \quad \vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$$

c - Les points M tels que $\vec{K} \cdot \vec{OM} = \text{Cte}$ se placent sur un plan perpendiculaire à \vec{K} (figure 2).

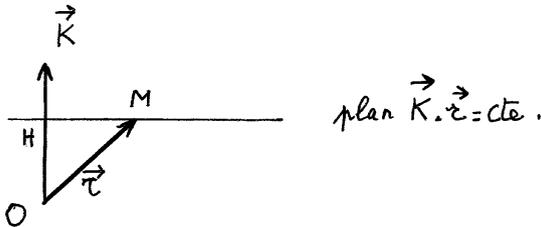


Figure 2

$$\mathbf{d -} \text{ On a :} \quad \Delta p = h \cdot ||\vec{K}|| / 2\pi$$

$$\text{et} \quad ||\vec{K}|| = 2k \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{d'où} \quad h = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

- I.3. a** - Le plan d'observation montre des franges d'interférence d'interfrange $i = h = \lambda/2 \sin \frac{\alpha}{2}$.

Pour α petit : $i \approx \lambda/\alpha$. Dans les dispositifs classiques (trous d'Young...) : $i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda}{\alpha}$ car $\alpha \approx \frac{a}{D}$.

b - De façon évidente : $i' = \frac{\lambda}{2 \cos \eta \sin \frac{\alpha}{2}} \left(= \frac{h}{\cos \eta} \right)$.

- c** - La structure du champ d'interférence est représentée sur la figure 1. Le plan d'observation des franges fait l'angle $\eta = \alpha/2$ avec \vec{K} .

Dans le champ d'interférence :

$$L = \frac{\lambda}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \left(\eta = \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

Application numérique : L'interfrange observé sur l'écran E est $i_E = \Gamma i$ si Γ désigne le grandissement de la lentille L' :

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{d}{D} = 5.10^{-2} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{D'}{f} = \frac{3000}{3} = 1000$$

$$\text{d'où :} \quad i_E = \frac{6.10^{-7}}{5.10^{-2}} \times 10^3 = 12 \text{ mm}$$

Il faut un grandissement suffisant pour observer les franges.

II. Délais de propagation - Effet Doppler

- II.1. a** - Un signal émis par S à l'instant $t = 0$ arrive sur le détecteur fixe A à l'instant $t_1 = \frac{D}{c}$. ($D = SA$).

Un signal émis par S à l'instant $t = T_0$ arrive sur A à l'instant $t_2 = T_0 + \frac{D - v_S T_0}{c} = t_1 + T_0(1 - \beta_S)$

d'où :

$$T_A = T_0(1 - \beta_S) \quad (2)$$

Le rapprochement ($\beta_S > 0$) diminue la période, l'éloignement ($\beta_S < 0$) l'augmente. Ce sont des effets naturels du délai de propagation, raccourci si S s'approche de A, allongé si S s'éloigne de A.

- b** - On se reporte à la figure 3 où $SS' = v_S T_0$. Si α est petit ($SA \gg v_S T_0$), on peut confondre AS' et $AS'' = AS' \cos \alpha$ à des termes en α^2 près. On est ainsi ramené à la question précédente en remplaçant v_S par $v_S \cos \theta$

d'où :

$$T_A = T_0(1 - \beta_S \cos \theta) \quad (3)$$

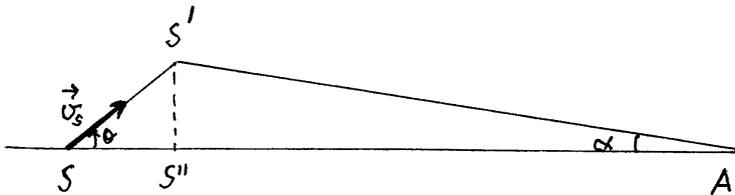


Figure 3

Cette relation est algébrique (avec dans tous les cas ici $\beta_S > 0$) :

- rapprochement si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$: $\beta_S \cos \theta > 0$

- éloignement si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$: $\beta_S \cos \theta < 0$

II.2. a -En raisonnant sur un intervalle de temps t , d'après (3) :

$$v_a = \frac{d}{t(1 - \beta_S \cos \theta)} \quad (\text{figure 4})$$

avec : $d = v_S t \sin \theta$ (projection sur le fond du ciel)

$$\text{d'où :} \quad v_a = \frac{v_S \sin \theta}{1 - \beta_S \cos \theta}$$

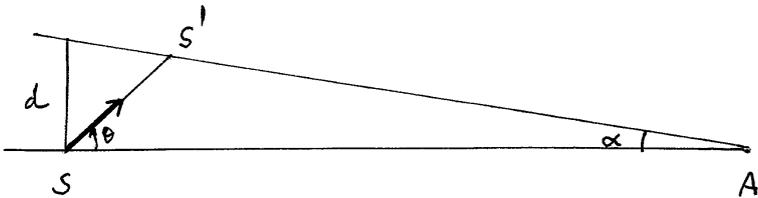


Figure 4

b -La condition $v_a > c$ s'écrit : $\frac{v_S \sin \theta}{1 - \beta_S \cos \theta} > c$

$$\text{soit :} \quad \beta_S (\sin \theta + \cos \theta) > 1$$

condition qui traduit l'effet *superluminique*.

c - Pour β_S fixé : $\sin \theta + \cos \theta > \frac{1}{\beta_S}$.

La fonction $\sin \theta + \cos \theta$ est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ et vaut $\sqrt{2}$. Il faut donc $\frac{1}{\beta_S} < \sqrt{2}$ pour pouvoir observer l'effet superluminique.

d - Pour β_S fixé, v_a est maximale pour $\cos \theta_{am} = \beta_S$ (soit $\sin \theta_{am} = \gamma_S^{-1}$) ; on a : $v_{am} = \gamma_S v_S$.

Pour pouvoir observer l'effet superluminique, il est nécessaire que $v_{am} > c$, soit $\gamma_S \beta_S > 1$ ou encore $\beta_S > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On retrouve le résultat **II.2.c**.

Application numérique :

$$v_{\text{am}} = 6,725 c ; \gamma_S = 6,725 ; \beta_S = 0,9899, \theta_{\text{am}} = 8^\circ 33'.$$

II.3. Effet Doppler

- a** - La condition $SA \gg \lambda_0 = c T_0$ implique $SA \gg v_S T_0$ comme en **II.1.b**. La relation (3) s'applique dans ces conditions, soit ici :

$$f_A = \frac{f_0}{1 - \beta_S \cos \theta} \quad (4)$$

La condition $SA \gg \lambda_0$ implique aussi que les ondes reçues peuvent être assimilées à des ondes planes, perpendiculaires à SA. De (4), on déduit :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_A - f_0}{f_0} = \frac{\beta_S \cos \theta}{1 - \beta_S \cos \theta} \quad (4')$$

On note que dans (4) ou (4') seule intervient la vitesse radiale $v_S \cos \theta$. Ces expressions traduisent l'effet Doppler : la fréquence de réception dépend de la vitesse de la source.

Si $\beta_S \ll 1$: $\frac{\Delta f}{f_0} \approx \beta_S \cos \theta$, expression d'usage courant en la matière.

- b** - La mesure du décalage de fréquence Δf permet de connaître la vitesse radiale. En astrophysique, les décalages spectraux, lorsqu'ils ne sont pas d'origine cosmologique, permettent de déterminer les vitesses des astres. L'effet Doppler est bien connu en acoustique.

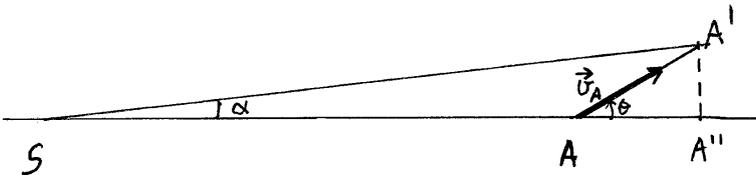


Figure 5

- II.4. a** - On se reportera à la figure 5. La condition $SA \gg \lambda_0$ implique qu'on peut confondre les distances SA' et SA'' .

$$\text{Ainsi : } \quad x = SA = x_0 + (v_A \cos \theta) t$$

L'arrivée des fronts d'onde émis à des instants séparés de T_0 est donnée par :

$$x = x'_0 + c (t - n T_0) \quad n \text{ entier}$$

d'où les instants d'arrivée :

$$t = \frac{n T_0}{1 - \beta_A \cos \theta} + \text{cte}$$

On en déduit la fréquence f_A mesurée par A :

$$\boxed{f_A = f_0 (1 - \beta_A \cos \theta)} \quad (5)$$

$$\text{Soit : } \quad \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_A - f_0}{f_A} = -\beta_A \cos \theta \quad (5')$$

Si $\beta_A \ll 1$: $\frac{\Delta f}{f_0} = -\beta_A \cos \theta$ est identique à la relation obtenue en **II.3.a** lorsque c'est la source qui se déplace (au signe près, le signe - ici venant d'une convention différente sur v_S et v_A).

- b** - La comparaison de (4) et (5) montre qu'il n'y a pas réciprocity (sauf pour $|\beta|$ petit) des deux situations : mouvement de S et mouvement de A. Cette dissymétrie peut apparaître a priori surprenante. Cela met en cause, en fait, les fondements mêmes de la cinématique classique. Nous reprendrons cette question en **IV**.

- II.5. a** - On combine les résultats précédents, M jouant le rôle de détecteur et de source :

$$f_M = f_0 (1 - \beta \cos \theta)$$

$$f_A = \frac{f_M}{1 + \beta \cos \theta}$$

car l'angle à considérer est ici $\pi - \theta$.

$$\text{soit :} \quad f_A = f_0 \frac{1 - \beta \cos \theta}{1 + \beta \cos \theta} \quad (6)$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{\Delta f}{f_0} = - \frac{2 \beta \cos \theta}{1 + \beta \cos \theta}$$

- b** - Si $\beta \ll 1$: $f_A \approx f_0 (1 - 2 \beta \cos \theta)$ et $\frac{\Delta f}{f_0} \approx -2 \beta \cos \theta$. Tout revient à considérer l'image S' de S dans le miroir : cette image se déplace à la vitesse $2 \vec{v}$.

Remarque : La relation (6) (et en particulier $f_A = f_0 \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$ pour $\theta = 0$) traduit ce qu'on appelle parfois le «double effet Doppler». Nous verrons en **IV** que ces relations qui ne supposent pas de changement de référentiel (A et S sont fixes dans un même référentiel) restent valables en cinématique relativiste. Il n'en est pas de même des formules Doppler (4) et (5).

$$\text{Posant } \vec{K} = \vec{k}_r - \vec{k}_i : \quad ||\vec{K}|| = \frac{2\pi}{\lambda_0} |\cos \theta| = \frac{2\pi f_0}{c} |\cos \theta|$$

$$\text{on en déduit (figure 6) : } \Delta f = -2 f_0 \beta \cos \theta = \frac{1}{2\pi} \vec{K} \cdot \vec{v}.$$

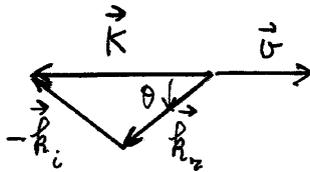


Figure 6

$$\text{Donc pour } \beta \ll 1 \quad \Delta f \approx \frac{1}{2\pi} \vec{K} \cdot \vec{v} \quad (7)$$

- c** - On superpose les signaux de la forme :

$$s_1 = a_1 \cos 2\pi f_0 t$$

$$s_2 = a_2 \cos [2\pi (f_0 + \Delta f) t + \varphi]$$

$$\begin{aligned} (s_1 + s_2)^2 &= a_1^2 \cos^2 2\pi f_0 t + a_2^2 \cos^2 2\pi (f_0 + \Delta f) t \\ &+ a_1 a_2 \left\{ \cos (2\pi \Delta f t + \varphi) + \cos \left[2\pi (2f_0 + \Delta f) t + \varphi \right] \right\} \end{aligned}$$

En moyenne sur la haute fréquence le signal détecté est :

$$s_d = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + a_1 a_2 \cos (2\pi \Delta f t + \varphi)$$

On reçoit ainsi un signal modulé par la fréquence Δf , le terme continu (constant) étant proportionnel à l'intensité stable. On accède ainsi au décalage fréquentiel Δf .

II.6. a - On reprend le raisonnement exposé en **II.5.a** :

$$f_M = f_0 (1 - \beta \cos \theta_i) \quad \text{et} \quad f_A = \frac{f_M}{1 - \beta \cos \theta_d}$$

$$\text{d'où} \quad f_A = f_0 \frac{1 - \beta \cos \theta_i}{1 - \beta \cos \theta_d}$$

où on a appliqué successivement (5) et (4).

$$\text{Pour } \beta \ll 1 : f_A \approx f_0 (1 - \beta \cos \theta_i - \beta \cos \theta_d)$$

$$\text{et} \quad \frac{\Delta f}{f_0} \approx \beta (\cos \theta_d - \cos \theta_i)$$

$$\text{avec} \quad \cos \theta_i = \frac{1}{v} \vec{u}_i \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \cos \theta_d = \frac{1}{v} \vec{u}_d \cdot \vec{v}$$

$$\text{et} \quad \vec{K} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_d \cdot \vec{u}_i)$$

$$\text{On en déduit} \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi} \vec{K} \cdot \vec{v} \quad (7')$$

expression identique à (7).

$$\text{Si } \eta \text{ désigne l'angle de } \vec{K} \text{ avec } \vec{v} : \Delta f = \frac{2v}{\lambda_0} \sin \frac{\delta}{2} \cos \eta .$$

- b** - La différence de marche δ correspondant à deux rayons arrivant suivant la direction \vec{u}_1 sur deux traits consécutifs du réseau, situés dans un plan perpendiculaire aux traits et diffractés (par réflexion) dans ce même plan suivant la direction \vec{u}_d est :

$$\delta = (\vec{u}_1 - \vec{u}_d) \cdot \vec{d}$$

d'où :
$$\frac{2\pi \delta}{\lambda} = -\vec{K} \cdot \vec{d} \quad \text{analogue à (1).}$$

La condition d'interférences constructives peut ainsi s'écrire :

$$\vec{K} \cdot \vec{d} = 2\pi m \quad (8)$$

où m est un entier positif ou négatif.

Les lentilles L_0 et L'_0 permettent de se placer dans des conditions d'observation telles que \vec{k}_i et \vec{k}_d sont des vecteurs ajustables. On se place, en fait, dans les conditions de la diffraction à l'infini. En comparant (7') et (8), on déduit :

$$\Delta f = \frac{mv}{d} \quad (9)$$

$\frac{1}{d} = n$ est le nombre de traits du réseau par unité de longueur. $\frac{v}{d}$ est ainsi le nombre de traits défilant en un point par unité de temps. Le défilement module le signal à la fréquence de défilement (que multiplie l'ordre du spectre).

- c** - Ici $v = R\omega$, $\theta_i = \frac{\pi}{2}$, $\theta_d = (\vec{k}_d, \vec{v}) = (\vec{k}_d, \vec{d})$.

$$\Delta f = \frac{mv}{d} = 2\pi m R n f_r \quad \text{où } n = \frac{1}{d}$$

soit :
$$\frac{\Delta f}{f_r} = mN$$

Remarque : On peut noter que $\frac{|\Delta f|}{f_r}$ est égal au pouvoir de résolution $\mathfrak{R} = |m| N$ du réseau.

La mesure de Δf permet d'atteindre ω d'où un procédé de mesure de la vitesse angulaire de rotation par des machines rapides.

Application numérique : $f_r = \frac{\Delta f}{mN} = \frac{5 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4} = \frac{5}{8} 10^2$ Hz correspondant à une vitesse de rotation de 3750 tours/minute.

En se plaçant devant le disque du côté de la transmission le disque tournant dans le sens trigonométrique :

- $m = +1$ et $\Delta f > 0$ si \vec{k}_d est vu en projection sur le disque dans le sens de la rotation ($\vec{K} \cdot \vec{v} > 0$). Il y a augmentation de fréquence. Cela est conforme à l'effet Doppler, la source (ici les traits du réseau) allant dans le même sens que la lumière diffractée («rapprochement»),
- à l'inverse $m = -1$ donne $\Delta f < 0$ («éloignement»).

II.7. Comme dans les questions précédentes, on considère une onde lumineuse arrivant sur une structure périodique (période spatiale Λ_S) se déplaçant avec une vitesse \vec{v}_s .

- a** - Si O et P sont deux points appartenant à deux plans successifs distants de Λ_S , la condition d'interférences constructives s'écrit comme précédemment :

$$\vec{K} \cdot \vec{OP} = 2\pi m \quad (m \text{ entier positif ou négatif})$$

avec $\vec{K} = \vec{k}_r - \vec{k}_i$ vecteur perpendiculaire à l'axe du cylindre.

- b** - On a de même : $\Delta f = \frac{1}{2\pi} \vec{K} \cdot \vec{v}_s$

Soit $\Delta f = \frac{m v_s}{d} = \frac{m v_s}{\Lambda_S}$ selon (9)

ou encore : $\Delta f = m f_s$

La modulation Δf est égale à la fréquence f_s de l'onde acoustique (au facteur m près). C'est l'effet Brillouin.

La réfraction ne modifie pas les temps de propagation (figure 7). Si n est l'indice du milieu, on a :

$$t = \frac{KJ}{c} = \frac{IH}{c/n}$$

soit $n IH = KJ$

en vertu de la loi de Descartes puisque :

$$IH = IJ \sin r \quad \text{et} \quad KJ = IJ \sin i$$

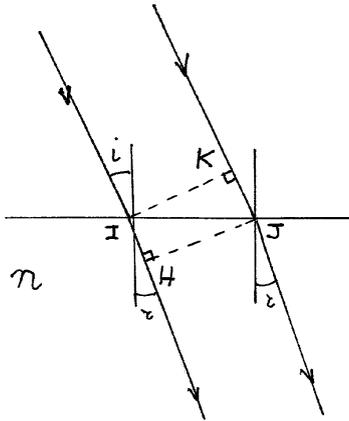


Figure 7

Application numérique : $\Lambda_S = 10^{-5}$ m, $v_s = 1500$ m.s⁻¹,
 $m = 1$.

$$f_s = \frac{v_s}{\Lambda_S} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{10^{-5}} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Hz} = \Delta f$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \Rightarrow \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{3} 10^{-6}$$

III. Vélodimétrie

III.1. a - On généralise ici le raisonnement fait en **II.6.a** :

$$f_A = f_0 \frac{1 - \beta \cos \theta_i}{1 - \beta \cos \theta_d}$$

b - Si $\beta \ll 1$: $f_A \approx f_0 (1 - \beta \cos \theta_i + \beta \cos \theta_d)$

$$\text{ou encore : } \Delta f = f_A - f_0 = \frac{1}{2\pi} \vec{K} \cdot \vec{v} \quad \text{avec } \vec{K} = \vec{k}_d - \vec{k}_i$$

$$\text{soit : } \Delta f = \frac{2v}{\lambda_0} \sin \frac{\delta}{2} \cos \eta \quad (\text{voir } \mathbf{II.6.a})$$

La vélocimétrie consiste à mesurer les vitesses v à partir de la mesure de Δf . Pour atteindre Δf on utilisera une méthode dont le principe est donné en **II.5.c** (détection hétérodyne). On pourra se reporter utilement à ce sujet au problème proposé cette année en série STL.

A l'origine, le procédé a été utilisé pour mesurer le mouvement brownien par l'observation du spectre de la lumière diffusée par des particules de l'ordre du μm .

On étudie ainsi également les turbulences provoquées par les corps se déplaçant à grande vitesse (TGV, ...).

c - Le détecteur n'étant pas «ponctuel», il reçoit la lumière diffusée sur une plage de valeurs de θ_d d'où une imprécision sur la valeur de Δf .

III.2. Méthode différentielle

$$\mathbf{a} - \text{On a : } \Delta f_1 = \frac{1}{2\pi} \vec{K}_1 \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \Delta f_2 = \frac{1}{2\pi} \vec{K}_2 \cdot \vec{v}$$

- b** - En utilisant la détection hétérodyne décrite en **II.5.c** on atteint la quantité $f_2 - f_1 = \Delta f = \frac{1}{2\pi} \vec{K} \cdot \vec{v}$ (avec $\vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1$) $= \frac{2v}{\lambda_0} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \eta$ (voir **II.6.a**).

L'intérêt de cette méthode réside en ce que \vec{K} , ici, ne dépend plus de \vec{k}_d , mais seulement des pinces incidentes de référence. On élimine ainsi l'imprécision liée à l'ouverture du détecteur (**III.1.c**) et on peut utiliser une ouverture assez large de manière à recueillir une énergie lumineuse suffisante.

- c** - Dans le champ d'interférence l'interfrange «vu» par la particule est d'après le résultat **I.3.b** :

$$i' = \frac{\lambda_0}{2 \cos \eta \sin \frac{\alpha}{2}}$$

La fréquence de défilement des franges pour la particule est ainsi :

$$f_d = \frac{v}{i'} = \frac{2v}{\lambda_0} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \eta = \Delta f$$

Comme pour le réseau, la lumière diffusée est modulée par la fréquence de rencontre des franges soit Δf . Le champ d'interférences se comporte à la manière d'une structure périodique spatiale.

- III.3** - Nous avons cité plus haut des applications des méthodes vélocimétriques. En météorologie, le rayonnement infrarouge est rétrodiffusé vers l'émetteur sur les nuages ce qui permet de mesurer leur vitesse.

La vélocimétrie ultrasonore est utilisée, par exemple, pour mesurer la vitesse de déplacement du sang, les hématies servant majoritairement de réflecteurs (voir à ce sujet l'article de R. MÉLIN, B.U.P. n° 761, page 325).

IV. Relativité de temps

- IV.1. a** - On calcule la fréquence f_M d'arrivée des flashes sur le miroir en appliquant conjointement (3) et (5) :

$$f_M = f_S \frac{1 - \beta_M}{1 - \beta_S}$$

Pour le retour des flashes, de même :

$$f_A = f_M \frac{1 + \beta_S}{1 + \beta_M}$$

le miroir jouant le rôle de source et en prenant attention aux conventions de signes sur β_M et β_S .

$$\begin{aligned} \text{Au total : } f_A &= f_S \frac{1 - \beta_M}{1 - \beta_S} \cdot \frac{1 + \beta_S}{1 + \beta_M} & (10) \\ &= f_S \frac{1 - \beta_M + \beta_S - \beta_M \beta_S}{1 - \beta_S + \beta_M - \beta_M \beta_S} \end{aligned}$$

- b** - On raisonne maintenant dans le référentiel de la source.

D'après (3) et (5) : $f = f_0 \frac{1 - \beta_{MS}}{1 + \beta'_{MS}}$ avec, en vertu de la loi de composition des vitesses de Galilée :

$$\beta_{MS} = \frac{v_M - v_S}{c - v_S} = \frac{\beta_M - \beta_S}{1 - \beta_S} \quad \text{et} \quad \beta'_{MS} = \frac{v_M - v_S}{c + v_S} = \frac{\beta_M - \beta_S}{1 + \beta_S}$$

la célérité de la lumière dans (S) étant $c - v_S$ à l'aller et $c + v_S$ au retour... On retrouve bien (10) ainsi.

- c** - On constate sur (10) que le résultat ne dépend pas du seul mouvement relatif de S et M (c'est-à-dire de $\beta_M - \beta_S$). C'est ce que nous avons déjà indiqué en comparant (3) et (5). La dissymétrie ainsi constatée est due au rôle particulier joué par (R) où la célérité de la lumière dans ce référentiel, qui joue le rôle d'un milieu particulier, est c . Ce milieu particulier était «l'éther» de la physique prérelativiste. L'idée d'Einstein est précisément de rétablir la symétrie lorsque le milieu de propagation est le vide.

- IV.2. a** - On a : $T_M = \alpha T_S$ et $T_A = \alpha T_M$ du fait de l'argument de symétrie.

On en déduit :
$$T_A = \alpha^2 T_S$$

avec d'autre part : $T_A = \frac{1 + \beta_M}{1 - \beta_M} T_S$ (d'après (10) av $\beta_S = 0$ (S fixe)), d'où :

$$\alpha = \left(\frac{1 + \beta_M}{1 - \beta_M} \right)^{1/2} \quad (11)$$

- b** - L'argument de réciprocité impose que $|\beta|$ ait même valeur quel que soit le sens de parcours de la lumière que l'on raisonne (comme ici) dans le référentiel lié à S ou dans celui lié à M. Cela implique que c garde une même valeur dans ces deux référentiels.

- c** - D'après (5), dans (R) : $T_M^{(R)} = \frac{T_S}{1 - \beta_M}$ (où T_S est aussi mesurée dans (R)).

Soit : $T_M^{(R)} = \left(\frac{1 - \beta_M}{1 + \beta_M} \right)^{1/2} T_M \frac{1}{1 - \beta_M}$ où T_M est mesuré dans le référentiel de M.

Ou
$$T_M^{(R)} = \frac{T_M}{\sqrt{1 - \beta_M^2}} \quad (12)$$

Les temps $T_M^{(R)}$ et T_M ont ainsi des valeurs différentes. Le temps perd ainsi son caractère absolu. Telle est la surprenante conséquence d'un argument de symétrie qui semble a priori assez naturel !

- d** - On applique (12) à la fréquence d'arrivée des crêtes (par exemple), (d'où) :

$$f = \frac{1}{\alpha} f_0 = f_0 \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \quad (13)$$

avec
$$\beta = \frac{v}{c}$$

$\Delta f = f - f_0 > 0$ si M se rapproche de S ($\beta < 0$) et inversement. La relation (13) traduit l'effet Doppler relativiste. En fait, la forme prise par (13) par rapport aux formules classiques :

$$f = \frac{f_0}{1 - \beta} \quad \text{et} \quad f = f_0 (1 + \beta)$$

tient au facteur γ_s qui change l'échelle du temps lorsqu'on passe d'un référentiel à l'autre. Qualitativement, l'effet reste le même : f croît si la source se rapproche de l'observateur et décroît si elle s'éloigne.

- e** - Les relations de «double effet» Doppler, en particulier celles qui concernent la vélocimétrie ne sont pas modifiées par la prise en compte de la relativité puisqu'on ne change pas de référentiel. L'accès au facteur γ_s présenté ici est d'ailleurs fondé sur cette propriété.

- f** - En prenant soin d'expliciter les référentiels, le résultat **VI.1.a** s'écrit :

$$f_A^{(R)} = f_S^{(R)} \frac{1 - \beta_M + \beta_S - \beta_M \beta_S}{1 - \beta_S + \beta_M - \beta_M \beta_S}$$

Également :
$$f_A^{(S)} = f_S^{(S)} \frac{1 - \beta_{MS}}{1 + \beta_{MS}}$$

dans le référentiel lié à S.

D'après (12), en termes de fréquences :

$$f_A^{(R)} = f_A^{(S)} \sqrt{1 - \beta_S^2} \quad \text{et} \quad f_S^{(R)} = f_S^{(S)} \sqrt{1 - \beta_S^2}$$

d'où :
$$f_A^{(R)} = f_A^{(S)} \sqrt{1 - \beta_S^2} = f_S^{(S)} \frac{1 - \beta_{MS}}{1 + \beta_{MS}} \sqrt{1 - \beta_S^2}$$

ainsi que :
$$f_A^{(R)} = f_S^{(R)} \frac{1 - \beta_M + \beta_S - \beta_M \beta_S}{1 - \beta_S + \beta_M - \beta_M \beta_S}$$

$$= f_S^{(S)} \frac{1 - \beta_M + \beta_S - \beta_M \beta_S}{1 - \beta_S + \beta_M - \beta_M \beta_S} \sqrt{1 - \beta_S^2}$$

En égalant ces deux expressions de $f_A^{(R)}$:

$$\frac{1 - \beta_M + \beta_S - \beta_M \beta_S}{1 - \beta_S + \beta_M - \beta_M \beta_S} = \frac{1 - \beta_{MS}}{1 + \beta_{MS}}$$

d'où :

$$\beta_{MS} = \frac{\beta_M - \beta_S}{1 - \beta_M \beta_S}$$

ou

$$\boxed{v_{MS} = \frac{v_M - v_S}{1 - \frac{v_M v_S}{c^2}}} \quad (14)$$

relation qui exprime la loi de composition des vitesses en relativité restreinte.

Pour $|\beta_S| = 1$ ou $|\beta_M| = 1 \Rightarrow |\beta_{MS}| = 1$. c apparaît comme une vitesse limite indépassable.

Si $|\beta_S| \ll 1$ ou $|\beta_M| \ll 1$: $v_{MS} \approx v_M - v_S$, on retrouve la cinématique classique de Galilée.

IV.3. a - La relation Doppler classique (3) :

$$f_A = f_0 (1 - \beta_S \cos \theta)^{-1}$$

doit être modifiée en :

$$f_A = f_0 \frac{(1 - \beta_S^2)^{1/2}}{1 - \beta_S \cos \theta} \quad (15)$$

pour tenir compte du changement d'échelle du temps lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre.

On a vu dans **II.2.d** que v_a vitesse apparente sur le fond du ciel est maximale pour $\theta = \theta_{am}$ tel que $\cos \theta_{am} = \beta_S$. On en déduit d'après (15) :

$$f_{AM} = f_0 (1 - \beta_S^2)^{-1/2} = f_0 \gamma_S$$

b - On mesure : $\frac{v_a}{c} = a$ et $\frac{\Delta f}{f_0} = b$.

$$\begin{aligned} I - \text{On a :} \quad v_{am} &= \gamma_S v_S \\ &= \gamma_S \beta_S c \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \frac{v_{am}}{c} = \gamma_S \beta_S > \frac{v_a}{c} = a$$

$$\text{on en déduit : } \beta_m = \left(\frac{a^2}{1+a^2} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \gamma_m = (1+a^2)^{1/2}$$

Application numérique : $\beta_m = 0,944$, $\gamma_m = 3,029(8)$ pour $a = 2,86$.

$$\text{On a : } v_a/c = \frac{\beta_S \sin \theta}{1 - \beta_S \cos \theta} = a \quad \text{et} \quad \frac{(1 - \beta_S^2)^{1/2}}{1 - \beta_S \cos \theta} = 1 + b$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{\beta_S \sin \theta}{(1 - \beta_S^2)^{1/2}} (1 + b) = a$$

$$\text{ou encore} \quad \beta_S \gamma_S \sin \theta = \frac{a}{1 + b}$$

$$\text{L'inégalité} \quad \gamma_S \beta_S > a \Rightarrow \sin \theta < \frac{1}{1 + b}$$

$$\text{d'où} \quad \theta_M = \text{Arc sin} \frac{1}{1 + b}$$

Application numérique : $\theta_M = \text{Arc sin} 0,164$ pour $b = 5,10$.
Soit $\theta_M = 9^\circ 26'$.

2 - Pour calculer θ et v_S on procède par approximations successives en tenant des valeurs extrémales ci-dessus.

On trouve : $v_S \approx 0,964(5)c$ et $\theta \approx 7^\circ 20'$.

IV.4. a - Il n'y a pas de symétrie de A_1 et A_2 car A_2 dispose de moteurs qu'il doit mettre en action pour faire demi-tour :

dans un référentiel galiléen seules des forces (réelles...) produisent des accélérations. Dans le référentiel (non galiléen) de A_2 , A_1 fait demi-tour sans l'action d'aucun moteur (A_1 est purement passif). D'où la référence nécessaire à un référentiel galiléen. On peut parler de dissymétrie d'ordre dynamique par opposition à la symétrie cinématique.

$$\mathbf{b} - t_1 = 2 \frac{D}{v} = \frac{2}{\beta} \frac{D}{c} \quad \text{soit } t_1 = 20 \text{ ans} \quad (\beta = 0,6).$$

$$t_2 = (1 - \beta^2)^{1/2} t_1 \quad \text{soit } t_2 = 16 \text{ ans} \quad ((1 - \beta^2)^{1/2} = 0,8).$$

La distance maximale d'éloignement mesurée par A_2 est $d = v t_2/2$ soit $d = 0,6 c \times 8 = 4,8 \text{ a.l}$ au lieu de 6 a.l . Il y a pour A_2 «contraction» des longueurs. C'est une conséquence également surprenante de la cinématique d'Einstein. Cette contraction est, en fait, un simple effet de mesure et ne correspond pas à une réelle compression de la matière !

Précisions par A_2 et A_1 les périodes des signaux reçus ainsi que leur nombre selon les phases de réception.

Pour A_2 :

- Phase d'éloignement :

$$T_2 = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} T_0 = 2T_0 \text{ pour } \beta = 0,6,$$

$$n_2 = \frac{t_2}{2T_2} = \frac{t_2}{4T_0}$$

- Phase de retour :

$$T_2' = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} T_0 = \frac{T_0}{2}$$

$$n_2' = \frac{t_2}{2T_2'} = \frac{t_2}{T_0} = 4 n_2$$

On notera que chaque phase a, pour A_2 , une même durée $t_2/2$.

Pour A_1 :

- Phase d'éloignement :

$$T_1 = T_2 = 2 T_0$$

la durée de réception est $\frac{t_1}{2} + \frac{\beta}{2} t_1 = 0,8 t_1 = 16$ ans

$$n_1 = \frac{0,8 t_1}{2 T_0} = \frac{t_2}{2 T_0} = 2 n_2$$

- Phase de rapprochement :

$$T'_1 = \frac{T_0}{2}$$

la durée de réception est $0,2 t_1 = 4$ ans

$$n'_2 = \frac{0,2 t_1}{T'_1} = \frac{0,4 t_1}{T_0/2} = n_1 = 2 n_2$$

Ici $n_1 = n'_1$ résultat évident a priori. En revanche les durées des phases ne sont plus égales. On retrouve ici la dissymétrie des situations de A_1 et de A_2 annoncée en **IV.1.a**. On peut dire aussi que A_2 est immédiatement informé de son retour (moteurs en action) alors que A_1 n'en est informé qu'avec retard.

On notera aussi que le nombre total de signaux reçus par A_2 est $5 n_2 = 4 n_2 + n_2$ tandis qu'il n'est que $4 n_2 = 2 n_2 + 2 n_2$ pour A_1 . On retrouve le rapport

$$\frac{4}{5} = 0,8 = \frac{t_2}{t_1} = \frac{d}{D} .$$