

Étude expérimentale de la rétroaction tension tension dans un système bouclé du premier ordre

par M. BEQUET et M. JULIARD
LTEG H. Brisson
25, avenue H. Brisson - 18103 Vierzon

Cet article présente un montage permettant de vérifier expérimentalement et sans difficultés les propriétés d'un système bouclé comportant une rétroaction tension tension. Cette étude correspond au programme d'électronique des classes de mathématiques spéciales.

De plus on y trouvera :

- la description d'un amplificateur opérationnel de mauvaise qualité mais dont les caractéristiques sont facilement mesurables,
- des mesures effectuées avec les systèmes d'acquisition Orphy GTS et Candibus et utilisant le détecteur de crête et le phasemètre décrits dans le B.U.P. n° 742,
- l'exploitation de ces mesures et leur modélisation avec le logiciel Régressi.

1. RAPPELS THÉORIQUES

1.1. Description du système étudié

Le système bouclé étudié ici comporte (voir figures 1, 2 et 3 ci-après) :

- Une chaîne directe qui est un amplificateur différentiel de tension du premier ordre caractérisé par :
 - sa résistance différentielle d'entrée R_{EO} ,
 - son gain G_O dans la bande passante (G_O est positif),
 - sa constante de temps τ_O (τ_O est positive),
 - sa fréquence de coupure $f_O = 1 / (2\pi\tau_O)$,
 - sa résistance de sortie R_{SO} ,
 - sa tension de décalage en sortie V_{DO} .

A vide la tension de sortie v_S est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\tau_0 \frac{dv_S}{dt} + v_S = G_O v_\varepsilon + V_{DO}$$

cette équation différentielle conduit en régime sinusoïdal permanent à la fonction de transfert à vide $\underline{H}_O = \frac{G_O}{1 + j f/f_0}$ (passe-bas du premier ordre).

- Une chaîne de retour qui est une S.C.V. → V idéale caractérisée par :
 - une résistance d'entrée infinie,
 - un transfert β réel positif à toute fréquence,
 - une résistance de sortie nulle,
 - une tension de décalage nulle.

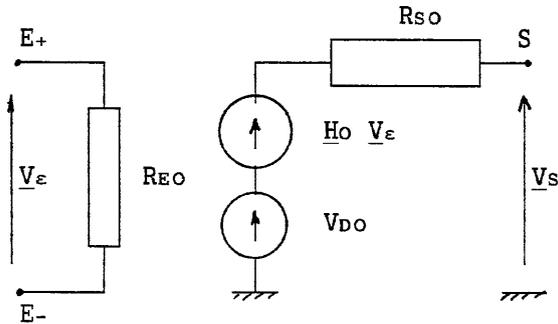


Figure 1 : Chaîne directe.

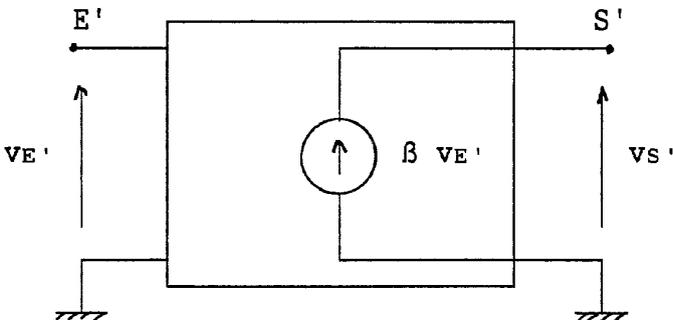


Figure 2 : Chaîne de retour.

La rétroaction est du type tension tension (voir figure 3) :

- la tension de sortie de la chaîne directe est appliquée à l'entrée de la chaîne de retour,
- la liaison série entre l'entrée de la chaîne directe et la sortie de la chaîne de retour permet d'obtenir : $v_\varepsilon = v_E - \beta v_S$ et l'on a dans ce cas une réaction négative,
- en permutant les bornes E_+ et E_- de la chaîne directe on obtiendra $v_\varepsilon = \beta v_S - v_E$ et l'on aura une réaction positive.

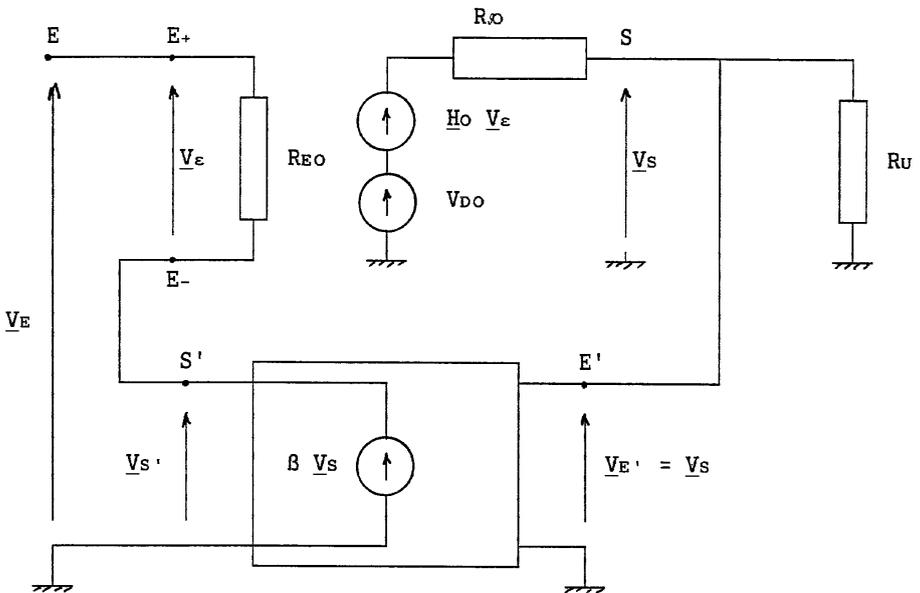


Figure 3 : Schéma du système bouclé.

1.2. Propriétés du système bouclé

Les résultats ci-après sont classiques et pour le détail des calculs on pourra se reporter aux ouvrages d'électronique du niveau des classes préparatoires.

Pour un système bouclé avec réaction négative

- Équation différentielle vérifiée par v_S :

$$\tau \frac{dv_S}{dt} + v_S = G v_E + \frac{V_{DO}}{1 + G_O \beta}$$

avec :

$$\tau = \frac{\tau_O}{1 + G_O \beta}$$

et :

$$G = \frac{G_O}{1 + G_O \beta}$$

τ_O , G_O et β étant des constantes positives, il en est de même pour τ et l'équation différentielle montre que le système bouclé avec réaction négative est toujours stable.

De plus la tension de décalage V_D du système bouclé est plus petite que celle de la chaîne directe puisque $V_D = V_{DO}/(1 + G_O \beta)$.

- Fonction de transfert \underline{H} en régime sinusoïdal permanent :

$$\underline{H} = \frac{G}{1 + j f/f_c}$$

avec :

$$f_c = 1/(2\pi\tau) = f_O (1 + G_O \beta)$$

Le système bouclé se comporte donc également comme un passe-bas du premier et le produit gain bande passante reste constant lorsque β varie : $G f_c = G_O f_O$.

– Résistance d'entrée R_E dans la bande passante de la chaîne directe ($f \ll f_O$) : $R_E = R_{EO} (1 + G_O \beta)$; la réaction négative augmente la résistance d'entrée.

– Résistance de sortie R_S dans la bande passante de la chaîne directe ($f \ll f_O$) : $R_S = R_{SO}/(1 + G_O \beta)$; la réaction négative diminue la résistance de sortie.

Pour un système bouclé avec réaction positive

- Équation différentielle vérifiée par v_S :

$$\tau \frac{dv_S}{dt} + v_S = -G v_E + \frac{V_{DO}}{1 - G_O \beta}$$

avec :

$$\tau = \frac{\tau_O}{1 - G_O \beta}$$

et :

$$G = \frac{G_O}{1 - G_O \beta}$$

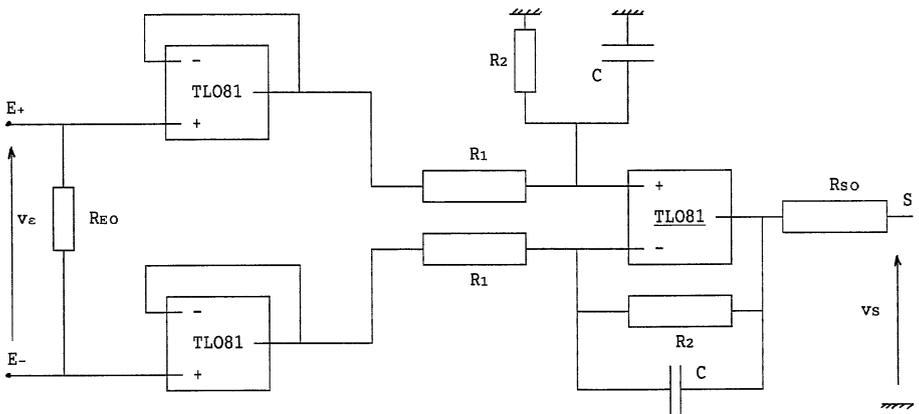
τ_O , G_O et β étant des constantes positives, le signe de τ dépend de celui de $(1 - G_O \beta)$:

- si $(1 - G_O \beta) > 0$: la solution de l'équation homogène contient une exponentielle à argument réel négatif et le système bouclé est stable,
- si $(1 - G_O \beta) < 0$: la solution de l'équation homogène contient une exponentielle à argument réel positif et le système bouclé est instable.

2. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE : MONTAGE PROPOSÉ

2.1. Chaîne directe

(voir Annexe 1 en fin d'article pour une discussion plus complète)



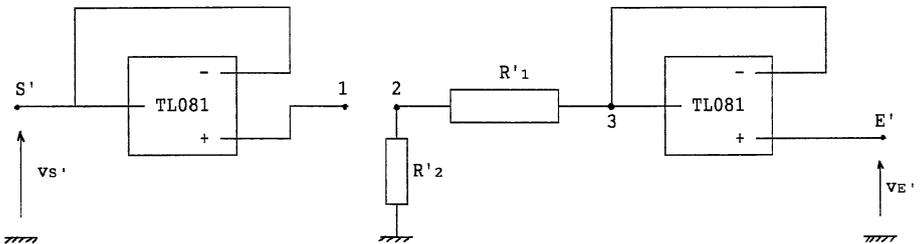
Valeurs proposées

$R_{EO} = 10 \text{ k}\Omega$; $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$; $C = 3 \text{ nF}$; $R_{SO} = 100 \Omega$.

On obtient ainsi un amplificateur différentiel de tension se comportant en passe-bas dont :

- E_+ et E_- sont les entrées non inverseuse et inverseuse,
- R_{EO} est la résistance d'entrée,
- le gain G_O est fixé par R_2/R_1 (ici $G_O \approx 10$),
- la constante de temps τ_O est égale à $R_1 C$ (ici $\tau_O \approx 300 \mu\text{s}$),
- la fréquence de coupure f_O est égale à $1/(2\pi R_2 C)$ (ici $f_O \approx 530 \text{ Hz}$),
- R_{SO} est la résistance de sortie,
- la tension de décalage peut être ajustée en exploitant la compensation d'offset du TL081 dont le nom est souligné sur le schéma.

En définitive la chaîne directe ainsi constituée se comporte comme un amplificateur opérationnel de caractéristiques médiocres mais faciles à mesurer (on peut d'ailleurs l'utiliser dans ce but lors d'une première approche de l'amplificateur opérationnel).

2.2. Chaîne de retour**Valeurs proposées**

$R'_1 = 1,5 \text{ k}\Omega$; R'_2 : ajustable de 0 à $\approx 1 \text{ k}\Omega$.

En connectant 1 et 3 on obtient $v_{S'} = v_{E'}$ et $\beta = 1$.

En connectant 1 et 2 et en faisant varier R'_2 , β varie de 0 à $\approx 0,4$.

De plus le diviseur de tension constitué par R'_1 et R'_2 étant «coincé» entre deux suiveurs, on peut considérer que la chaîne de retour est bien idéale.

Enfin la valeur choisie pour R'_1 permet de limiter le courant débité par le premier A.O. en deçà de la valeur de saturation.

3. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE : RÉSULTATS OBTENUS

3.1. Décalage, résistance d'entrée, résistance de sortie

Pour la chaîne directe

$V_{DO} = 112,8 \text{ mV}$; $R_{EO} = 9,900 \text{ k}\Omega$; $R_{SO} = 102,6 \Omega$.

Pour le système bouclé avec réaction négative

On a porté dans le tableau ci-dessous les valeurs mesurées de V_D , R_E et R_S ainsi que les valeurs calculées (entre parenthèses) et les écarts relatifs entre elles. Pour les calculs on a utilisé $G_O = 9,564$ (déterminé plus loin).

| β | $V_D \text{ mV}$ | $\delta V_D / V_D$ | $R_E \text{ k}\Omega$ | $\delta R_E / R_E$ | $R_S \Omega$ | $\delta R_S / R_S$ |
|---------|------------------|--------------------|-----------------------|--------------------|----------------|--------------------|
| 1 | 10,07 (10,68) | 6 % | 107,0 (104,6) | 2 % | 9,1 (9,7) | 6 % |
| 0,369 | 21,75 (24,91) | 13 % | 46,00 (44,84) | 3 % | 22,0 (22,6) | 3 % |
| 0,200 | 31,60 (38,64) | 18 % | 29,67 (28,90) | 3 % | 34,3 (35,1) | 2 % |
| 0,0996 | 48,10 (57,80) | 17 % | 19,12 (19,32) | 1 % | 52,0 (52,6) | 1 % |

Pour R_E et R_S les résultats obtenus sont satisfaisants.

Ils le sont beaucoup moins pour V_D ; une explication possible est l'existence d'un décalage propre à la chaîne de retour (négligé dans l'étude théorique) et influant sur le décalage réel du système bouclé (cf. annexe 2).

3.2. Comportement en régime sinusoïdal permanent

On a relevé les diagrammes de Bode en gain (voir figure 4 : $\text{mod}(\underline{H})$ en fonction de f) et en phase (voir figure 7 : $\text{arg}(\underline{H})$ en fonction

de f) de la chaîne directe et du système bouclé **avec réaction négative** pour différentes valeurs de β .

Le matériel utilisé comprenait :

- la centrale d'acquisition Orphy GTS et le logiciel Régressi,
- un générateur basse fréquence avec wobble, et
- le phasemètre et le détecteur de crête décrits dans le B.U.P. n° 742.

Commentaires sur les diagrammes de Bode en gain

Sur la figure 4 sont superposés les cinq diagrammes obtenus avec : $\beta = 0$ (chaîne directe), $\beta = 0,0996$; $0,200$; $0,369$; $1,000$ (les diagrammes sont numérotés de 1 à 5 dans l'ordre croissant de β).

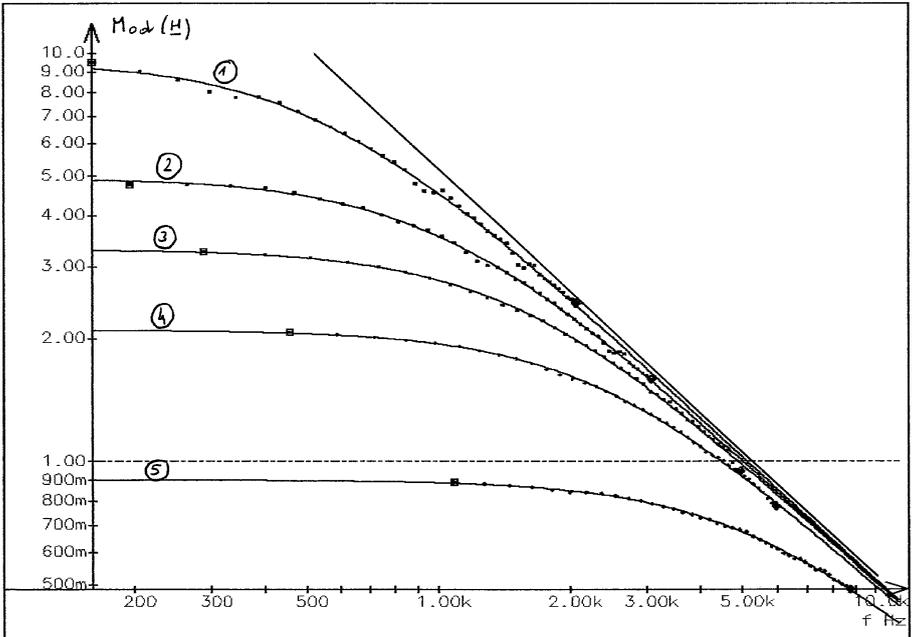


Figure 4 : Variations de $\text{mod}(H)$ en fonction de f .

Modélisation des variations de $\text{mod}(\underline{H})$ avec f

Pour chaque valeur de β , on a modélisé les variations de $\text{mod}(\underline{H})$ par : $\text{mod}(\underline{H}) = \text{mod}[G/(1 + j f/f_C)]$ le logiciel Régressi se chargeant du calcul de G et f_C à partir des valeurs expérimentales ; on a reporté dans le tableau ci-dessous les valeurs ainsi obtenues.

| β | G | Écart relatif | f_C (kHz) | $M = G f_C$ (kHz) |
|---------|-------|---------------|-------------|-------------------|
| 0 | 9,564 | 2,1 % | 0,539 | 5,155 |
| 0,0996 | 4,948 | 0,5 % | 1,036 | 5,126 |
| 0,200 | 3,308 | 0,6 % | 1,551 | 5,131 |
| 0,369 | 2,099 | 0,8 % | 2,430 | 5,101 |
| 1,000 | 0,901 | 1,1 % | 5,603 | 5,048 |

La première ligne du tableau correspond à la chaîne directe ; pour celle-ci on notera G_0 et f_0 les valeurs de G et f_C .

De plus on a porté les écarts relatifs calculés par le logiciel entre les valeurs expérimentales et les valeurs obtenues par modélisation ; on observera que ces écarts restent faibles.

On a également porté le produit gain bande passante M qui reste, comme attendu, sensiblement constant lorsque β varie.

En plus des points expérimentaux la figure 4 comporte le tracé en coordonnées logarithmiques :

- des courbes modélisées pour chaque valeur de β ,
- de la courbe d'équation $\text{mod}(\underline{H}) = G_0 f_0 / f$ qui est l'asymptote commune aux courbes précédentes pour les fréquences grandes devant f_C .

Tous ces résultats montrent que le système étudié se comporte en parfait accord avec la théorie.

Modélisation des variations de G avec β

Pour l'ensemble des valeurs de β on a modélisé les variations de G par : $G = G_0/(1 + G_0 \beta)$, le logiciel Régressi se chargeant du calcul de G_0 ; on obtient ainsi $G_0 = 9,578$ avec un écart relatif de 0,5 %. La valeur de G_0 ainsi obtenue est proche de celle trouvée par modélisation sur la chaîne directe ($G_0 = 9,564$) et la courbe de modélisation passe bien au voisinage des points expérimentaux.

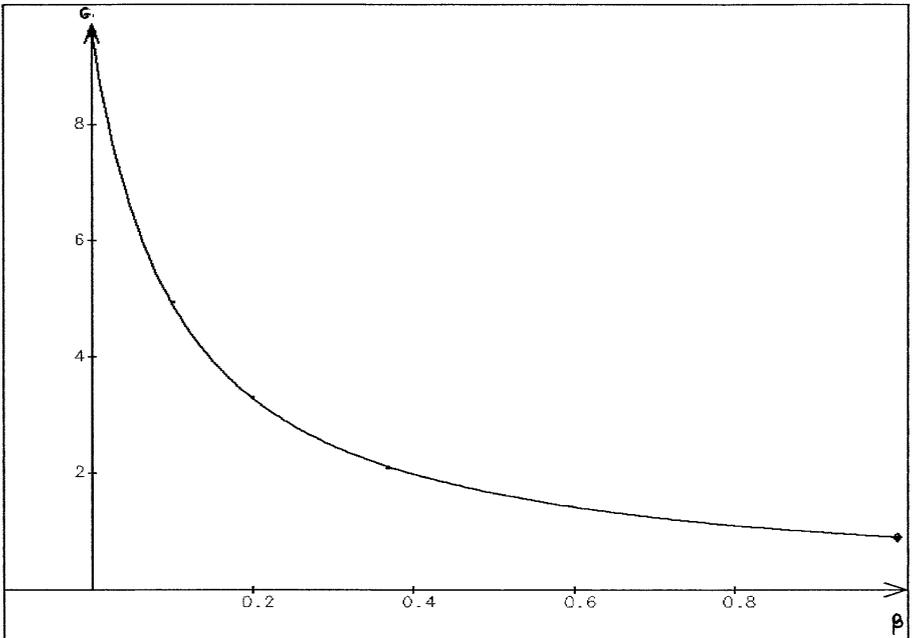


Figure 5 : Variations de G avec β .

Modélisation des variations de f_C avec β

On a modélisé de même les variations de f_C avec β par :
 $f_C = f_0 (1 + G_0 \beta)$; après calcul on obtient : $f_0 = 0,540$ kHz et $G_0 = 9,380$
avec un écart relatif de 0,4 %.

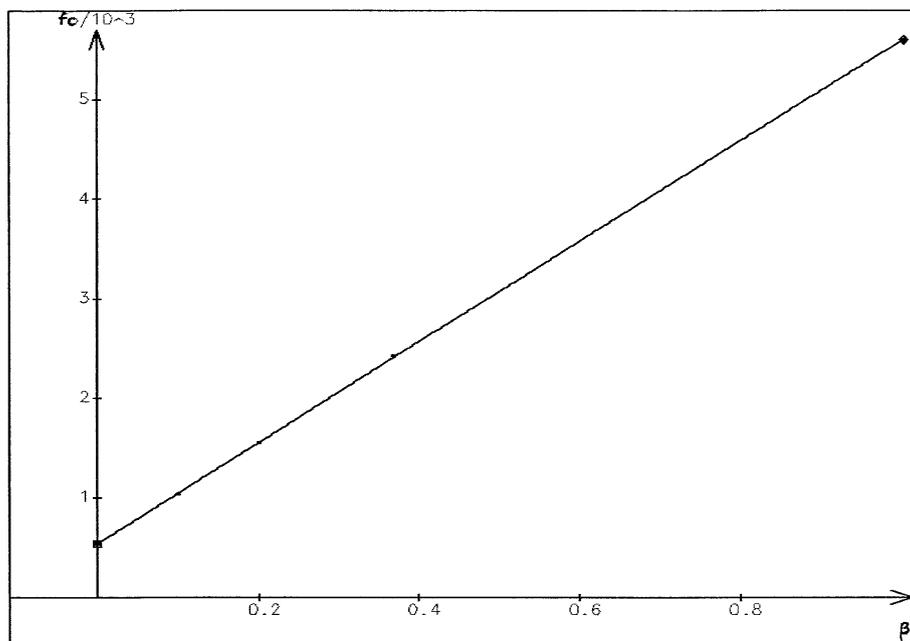


Figure 6 : Variations de f_C avec β .

Commentaires sur les diagrammes de Bode en phase

Sur la figure 7 on a porté les variations de $\arg(\underline{H})$ en fonction de f , pour les différentes valeurs de β et en coordonnées semi logarithmiques. On y trouve l'ensemble des points expérimentaux et les courbes de modélisation ($\arg(\underline{H}) = -\arg[(1 + j/f/f_C)]$) qui redonnent pour f_C des valeurs en accord avec celles obtenues précédemment (diagrammes numérotés de 1 à 5 comme pour le gain).

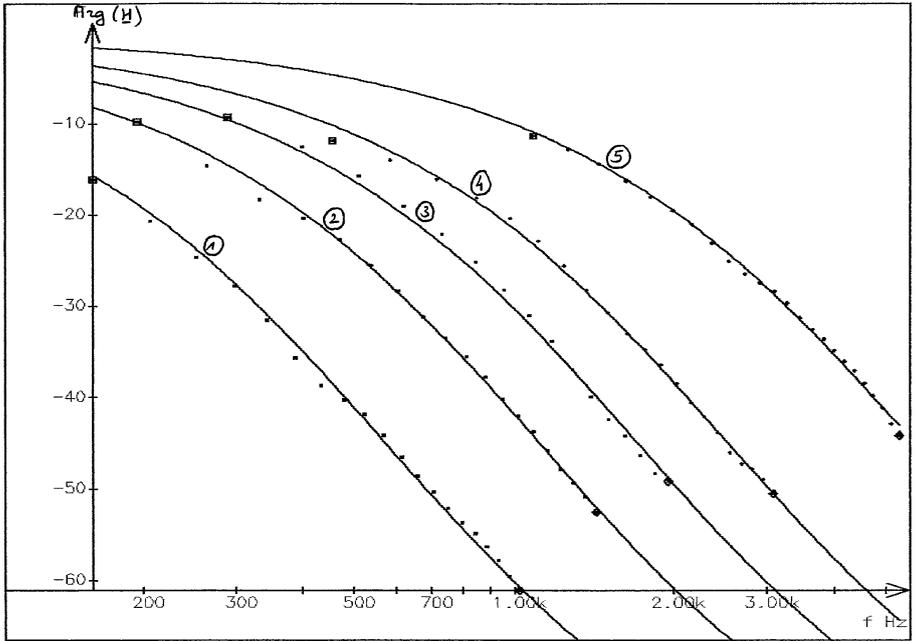


Figure 7 : variations de $\arg(h)$ en fonction de f

3.3. Comportement en régime transitoire

Principe de l'étude

Le système bouclé (avec réaction négative ou positive) est attaqué par des signaux carrés alternatifs dont la période est suffisante pour permettre au régime transitoire de se développer. On enregistre les tensions d'entrée et de sortie du système sur une durée un peu supérieure à une période ; l'enregistrement est répété pour différentes valeurs de β .

Remarque : le système d'acquisition utilisé ici est le Candibus qui permet l'enregistrement de tensions négatives plus aisément que l'Orphy GTS.

Résultats expérimentaux

On a effectué sept enregistrements (numérotés de 1 à 7 ci-dessous).

D'un enregistrement à l'autre β varie ainsi que le type de réaction ; par commodité on a affecté un coefficient $\alpha = +1$ à la réaction négative et un coefficient $\alpha = -1$ à la réaction positive.

Les valeurs de β et α sont données dans le tableau ci-dessous :

| Numéro | Figure | α | β |
|--------|--------|----------|-----------------------|
| 1 | / | + 1 | 0 |
| 2 | 8 | + 1 | $49,36 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | / | + 1 | $125,7 \cdot 10^{-3}$ |
| 4 | / | - 1 | $2,689 \cdot 10^{-2}$ |
| 5 | 9 | - 1 | $4,761 \cdot 10^{-2}$ |
| 6 | 10 | - 1 | $9,970 \cdot 10^{-2}$ |
| 7 | 11 | - 1 | $1,459 \cdot 10^{-1}$ |

On trouvera ci-après les figures correspondant aux enregistrements n° 2, 5, 6 et 7.

Commentaires

- la figure 8 correspond à un régime de fonctionnement stable ; la constante de temps τ est positive car la réaction est négative,
- la figure 9 correspond aussi à un régime de fonctionnement stable : malgré la réaction positive τ reste positive car $\beta < 1/G_O$,
- la figure 11 correspond elle à un régime de fonctionnement instable (changement de courbure des branches d'exponentielles) : la réaction est positive et $\beta > 1/G_O$; la constante de temps τ est devenue négative,
- la figure 10 correspond à peu près au cas limite : $\beta = 9,970 \cdot 10^{-2}$ alors que $1/G_O \approx 0,101$; on a encore un régime de fonctionnement stable avec une constante de temps qui devient importante.

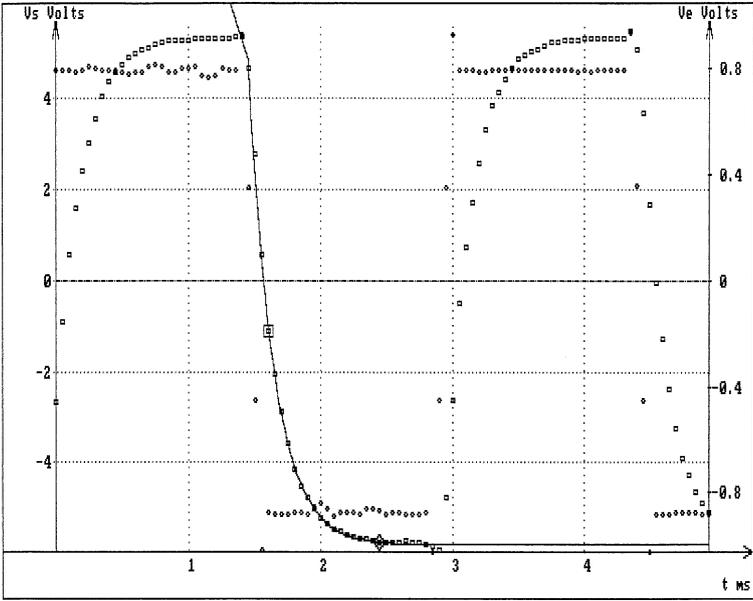


Figure 8 : Enregistrement n° 2.

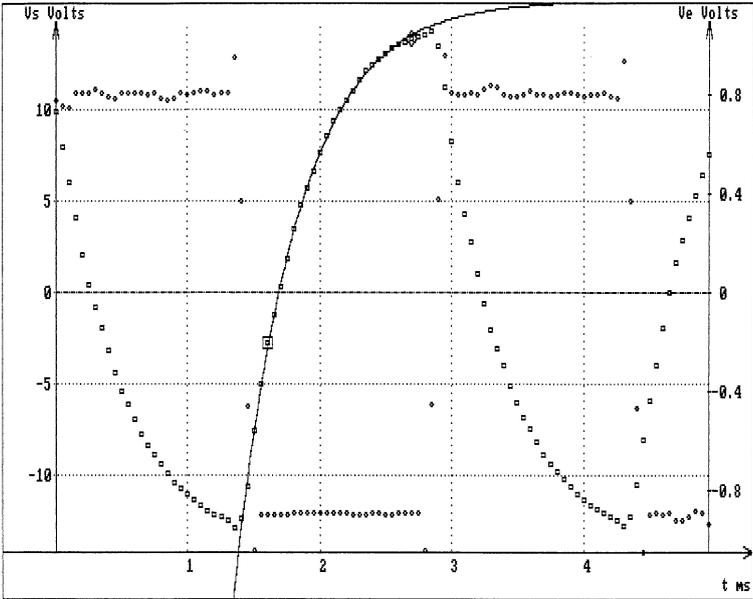


Figure 9 : Enregistrement n° 5.

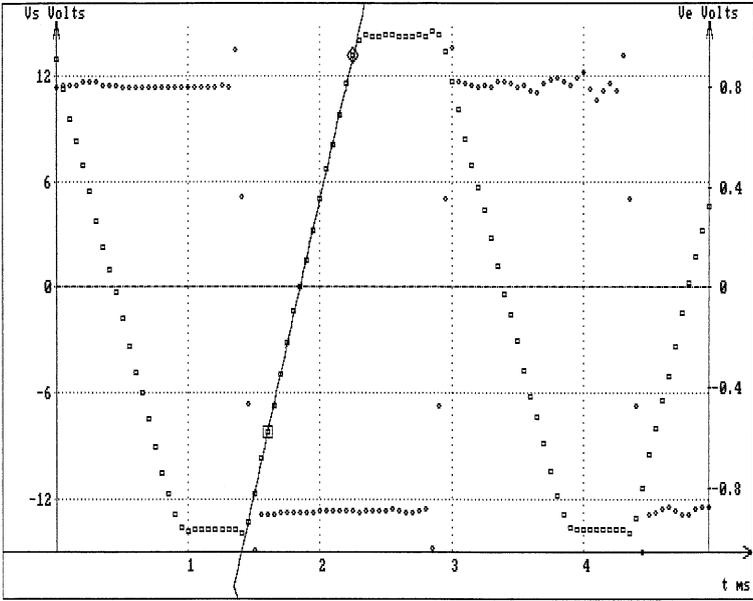


Figure 10 : Enregistrement n° 6.

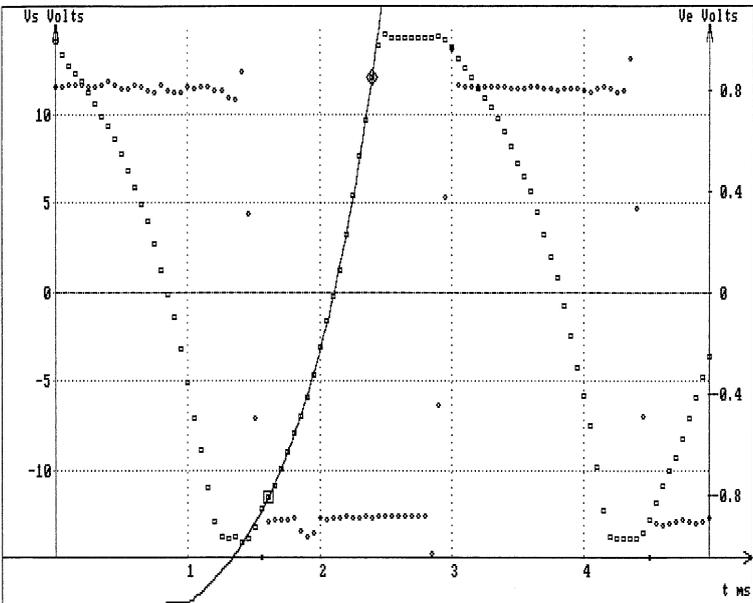


Figure 11 : Enregistrement n° 7.

Modélisation de l'évolution de v_S en fonction du temps

Dans chaque cas l'évolution de v_S a été modélisée à partir de :

- $v_S = v_F + (v_I - v_F) \exp[-(t - t_O)/\tau]$,
- t_O : instant choisi pour le début de la modélisation,
- V_I : valeur de v_S à l'instant t_O ,
- V_F : valeur limite de v_S pour t tendant vers $+\infty$ si τ est positif ou t tendant vers $-\infty$ si τ est négatif,
- τ : constante de temps.

Le logiciel Régressi se charge du calcul des paramètres V_I , V_F et les mieux adaptés aux valeurs expérimentales.

Le seul paramètre physiquement intéressant étant la constante de temps, on n'a reporté dans le tableau ci-dessous que les différentes valeurs de τ obtenues ainsi que les écarts relatifs sur v_S .

| Numéro | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------------|-------|
| τ en μs | 268 | 194 | 120 | 355 | 480 | $20 \cdot 10^3$ | - 650 |
| Écart relatif en % | 0,6 | 0,7 | 0,3 | 0,9 | 1,2 | 1,8 | 1,5 |

On peut constater sur les différentes figures que les courbes de modélisation passent bien au voisinage des points expérimentaux.

Modélisation de l'évolution de τ en fonction de β

L'évolution de τ a été modélisée par : $\tau = \tau_O / (1 + G_O \beta')$ avec $\beta' = \alpha \beta$, ce qui permet d'avoir une expression unique utilisable dans les deux cas de réaction.

Le logiciel calcule : $\tau_O = 270 \mu s$, $G_O \approx 9,894$ avec un écart relatif de 0,3 %. On trouvera sur la figure 12 les point expérimentaux et la courbe de modélisation (pour des raisons d'échelle le point correspondant à l'enregistrement n° 6 n'a pas été pris en compte) : l'accord entre les deux est satisfaisant malgré le petit nombre de point expérimentaux dont on dispose dans ce cas.

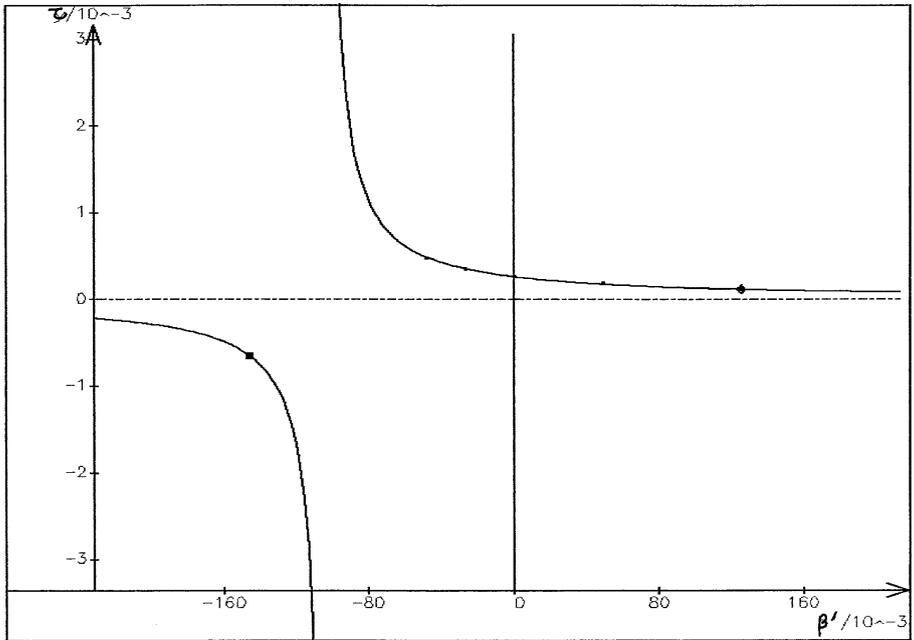


Figure 12 : Variations de τ en fonction de β' .

CONCLUSION

Le système présenté permet donc de vérifier expérimentalement toutes les propriétés d'un système bouclé du premier ordre comportant une rétroaction tension tension. Disposant d'une dizaine de ces montages implantés sur circuit imprimé nos élèves peuvent effectuer en séance de travaux pratiques l'étude présentée ici.

Pour terminer nous souhaitons remercier vivement Bruno VELAY pour sa relecture attentive et ses remarques avisées dont on trouvera l'écho dans les annexes ci-après.

Annexe 1

Au sujet de l'ordre du montage

Les résultats théoriques concernant la chaîne directe sont donnés en supposant les amplificateurs opérationnels idéaux. Dans cette partie on montre que cette approximation est légitime dans le domaine de fréquence utilisé.

Rappel : fonction de transfert \underline{H}_{ID} de la chaîne directe en supposant les A.O. idéaux.

En posant : $G_O = R_2/R_1$ et $f_O = 1/(2\pi R_2 C)$

on obtient :

$$\underline{H}_{ID} = \frac{G_O}{1 + j f/f_O}$$

C'est la fonction de transfert d'un passe-bas du premier ordre de gain G_O et de fréquence de coupure f_O , ce que confirme l'étude expérimentale.

Fonction de transfert \underline{H}' de la chaîne directe obtenue avec un calcul plus complet

Pour ce calcul on tient compte du fait que l'amplificateur opérationnel dont le nom est souligné sur le schéma de la chaîne directe est lui-même un passe-bas du premier ordre de gain μ_O et de fréquence de coupure f_C (aux fréquences utilisées les A.O. des suiveurs ont un comportement idéal) ; tous calculs faits on obtient le résultat ci-dessous :

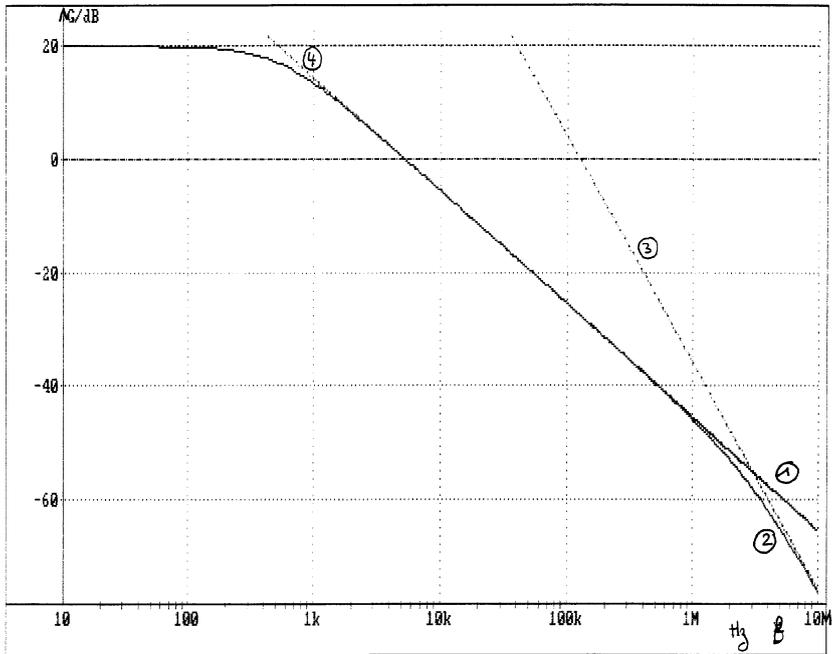
$$\underline{H}' = \frac{G_O}{1 + j f/f_O + \frac{1}{\mu_O} (1 + j f/f_C) (1 + G_O + j f/f_O)}$$

Le terme $\frac{1}{\mu_O} (1 + j f/f_C) (1 + G_O + j f/f_O)$ apparaît donc comme un terme correctif.

Pour la chaîne directe : $G_0 = 10$ et $f_0 \approx 530$ Hz,
pour un TL081 : $\mu_0 = 3.10^5$ et $f_C = 10$ Hz.

On trouve ci-dessous les variations en fonction de f (de 10 Hz à 10 MHz) des modules de \underline{H}_{ID} et \underline{H}' exprimés en dB.

On observe que les deux graphes se superposent jusqu'à des fréquences supérieures à 100 kHz et ne commencent à se séparer qu'à des fréquences de l'ordre de 1 MHz ; ceci justifie l'approximation de l'amplificateur opérationnel idéal utilisé pour le calcul de la fonction de transfert de la chaîne directe puisque les fréquences utilisées lors des mesures sont inférieures à 10 kHz.



Courbe ① : \underline{H}_{ID}

Courbe ② : \underline{H}'

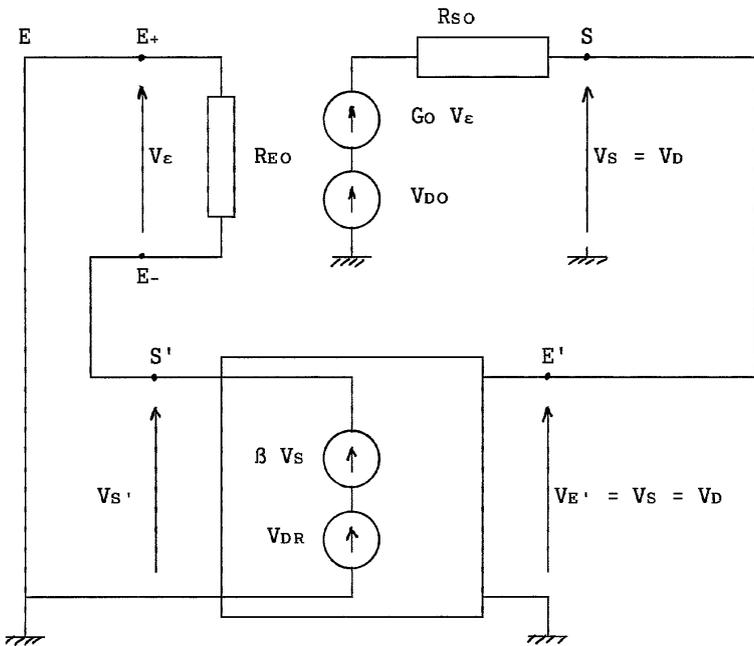
Courbe ③ : asymptote à -40 dB/décade d'un système du deuxième ordre.

Courbe ④ : asymptote à -20 dB/décade d'un système du premier ordre.

Annexe 2

Influence du décalage de la chaîne de retour sur le décalage du système bouclé

On a noté lors de la mesure de la tension de décalage V_D du système bouclé des écarts importants (jusqu'à 18 %) entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées ; le calcul théorique effectué négligeait le décalage V_{DR} propre à la chaîne de retour ; on reprend cette étude ci-dessous en prenant en compte ce décalage.



Expression théorique de V_D

La chaîne directe impose :

$$V_D = V_{DO} + G_O V_E$$

le court circuit à l'entrée impose :

$$V_{\varepsilon} = -V_{S'} = -\beta V_D - V_{DR}$$

on en tire l'expression de V_D :

$$V_D = \frac{V_{DO}}{1 + G_O \beta} - V_{DR} \frac{G_O}{1 + G_O \beta}$$

Résultats expérimentaux

Pour le système étudié :

$$V_{DO} = 112,8 \text{ mV} ; G_O = 9,564 ; V_{DR} = 1,6 \text{ mV}$$

on a rassemblé dans le tableau ci-dessous les résultats des mesures et la comparaison aux valeurs théoriques attendues (entre parenthèses).

| | | | | |
|--------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| β | 1 | 0,369 | 0,200 | 0,0996 |
| V_D mV | 10,07 (9,23) | 21,75 (21,53) | 31,60 (33,47) | 48,10 (49,93) |
| $\delta V_D / V_D$ | 9 % | 1 % | 6 % | 4 % |

On voit ainsi que la prise en compte de la tension de décalage de la chaîne de retour améliore la concordance entre valeurs expérimentales et valeurs théoriques.