Densité volumique et densité de courant de quantité de mouvement d'un champ électromagnétique

par J. SORNETTE
Spé P - Lycée Turgot - 75003 Paris

INTRODUCTION

Il est classique de montrer à partir des équations de Maxwell qu'un champ électromagnétique contient une densité volumique d'énergie $u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\vec{E}^{\,2} + \frac{1}{2}\,\frac{\vec{B}^{\,2}}{\mu_0}$ et véhicule de l'énergie, la puissance traversant une surface élémentaire étant le flux à travers celle-ci du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \wedge \vec{B}$.

On peut de même montrer que le champ électromagnétique contient et transporte de la quantité de mouvement. Bien que la démonstration soit plus élégante en formalisme tensoriel à trois (mécanique classique) ou mieux à quatre dimensions (mécanique relativiste), nous adopterons ici une démarche «classique».

FORMULATION LOCALE D'UNE LOI DIFFÉRENTIELLE

La plupart des lois physiques sont de la forme suivante : pour un système S fermé, $\frac{dF}{dt} = G$ avec F et G se calculant par intégration de densités volumiques à savoir :

$$F = \iiint_S f\,dV \quad \text{et} \quad G = \iiint_S g\,dV$$

Imaginons un système S déformable occupant à l'instant t un volume Ω et à l'instant t + dt un volume Ω'. Pour fixer les idées, supposons que le système a gonflé et que $\Omega' = \Omega \cup d\Omega$ (voir figure 1).

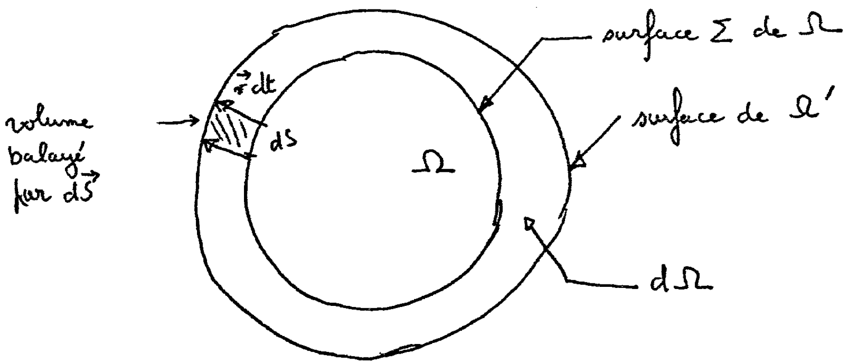

Figure 1

dt étant supposé infiniment petit, la loi physique considérée s'écrit :

$$dF = \iiint_{\Omega'} f(t+dt)\,dV - \iiint_{\Omega} f(t)\,dV = dt\,.\,G = dt \iiint_{\Omega} g(t)\,dV$$

Comme Ω' est la réunion de Ω et dΩ :

$$\iiint_{\Omega'} \ldots = \iiint_{\Omega} \ldots + \iiint_{d\Omega} \ldots$$

D'autre part, dΩ est dû au déplacement des particules du système S. Pendant le temps dt, elles se sont déplacées de $\vec{v}\,dt$ et chaque surface élémentaire $d\vec{S}$ à la surface Σ de Ω a balayé un volume $dV = d\vec{S}\,.\,\vec{v}\,dt$, la réunion de ces surfaces balayées étant justement dΩ (voir figure 1).

On déduit donc, après division par dt :

$$\frac{1}{dt}\left[\iiint_{\Omega} f(t+dt)\,dV - \iiint_{\Omega} f(t)\,dV\right] + \iint_{\Sigma} f\vec{v}\,.\,d\vec{S} = \iiint g\,dV$$

En permutant $\frac{d}{dt}$ et $\iiint$ d'une part ; en appliquant ce bon vieux théorème de Green-Ostrogradski d'autre part, on tire :

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}(f\vec{v}) - g \right) dV = 0$$

Ceci étant vrai quelque soit Ω, on en déduit la formulation locale de la loi physique :

$$\frac{dF}{dt} = G \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}(f\vec{v}) = g$$

On note souvent $\vec{j} = f\vec{v}$.

Inversement, toute relation du type :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\,\vec{j} = g$$

pourra être considérée comme la formulation locale d'une loi $\frac{dF}{dt} = G$.

f et g s'identifiant, au vu de la démonstration précédente, aux densités volumiques de F et G et $\vec{j}$ à un vecteur densité de courant dont le flux à travers une surface $d\vec{S}$ est le rapport dF/dt où dF est la quantité de F traversant $d\vec{S}$ pendant dt, toujours au vu de ce qui précède.

APPLICATION À LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Pour un système fermé $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ où $\vec{P}$ désigne une quantité de mouvement et $\vec{F}$ une force.

La projection sur 0x, $\frac{dP_x}{dt} = F_x$ a une traduction locale :

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} + \vec{\nabla}\,\vec{j_x} = f_x$$

de même pour les projections sur 0y et 0z.

Convenons tout naturellement de noter $\vec{p}$ et $\vec{f}$ les vecteurs de composantes (p_x , p_y , p_z) et (f_x , f_y , f_z) et de façon plus audacieuse (j) une matrice 3 × 3 de vecteurs colonnes $\vec{j_x}$, $\vec{j_y}$, $\vec{j_z}$ et $\vec{\nabla}(j)$ un vecteur de composantes ($\vec{\nabla}\,\vec{j_x}$, $\vec{\nabla}\,\vec{j_y}$, $\vec{\nabla}\,\vec{j_z}$).

Ainsi l'on a : $$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \vec{\nabla}(j) = \vec{f}$$

APPLICATION AU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Un volume élémentaire chargé contient la charge dq = ρ dV animée d'une vitesse $\vec{v}$, le vecteur densité de courant étant alors $\vec{j_e} = \rho\, \vec{v}$.

Ce volume est soumis de la part du champ électromagnétique à la force $d\vec{F} = \rho\, dV\, (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ d'où $\vec{f} = d\vec{F} \,/\, dV = \rho\, \vec{E} + \vec{j_e} \wedge \vec{B}$.

Par action et réaction, ces charges exercent sur le champ la force volumique $\vec{f} = -(\rho\, \vec{E} + \vec{j_e} \wedge \vec{B})$.

Force qu'on va tenter de mettre sous la forme $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \vec{\nabla}(j)$.

Tout d'abord tirons part des deux équations de Maxwell suivantes :

$$\vec{\nabla}\,\vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j_e} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

d'où l'on tire ρ et $\vec{j_e}$ que l'on reporte dans l'expression de f. Alors :

$$\vec{f} = -\varepsilon_0 (\vec{\nabla}\,\vec{E}) \,.\, \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$$

De plus $$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{B}) - \vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Si l'on utilise l'équation de Maxwell $(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, compte tenu de l'antisymétrie du produit vectoriel, on tire :

$$\vec{f} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \, \vec{E} \wedge \vec{B}) - \varepsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{E} + (\vec{\nabla}\, \vec{E})\, \vec{E} \right]$$

$$- \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\, \vec{B} \right]$$

en rajoutant, pour la symétrie entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$, le terme *nul* en $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ (dernière des équations de Maxwell : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$).

On voit d'ores et déjà que $\vec{p} = \varepsilon_0 \, \vec{E} \wedge \vec{B}$ si l'on arrive à mettre les autres termes sous la forme $\vec{\nabla}(j)$. En fait on cherchera (j_e) et (j_m) tels que :

$$\vec{\nabla}(j_e) = -\varepsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, \vec{E} \right]$$

et :

$$\vec{\nabla}(j_m) = -\frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\, \vec{B} \right]$$

En cas de succès pour (j_e) il suffira de remplacer $\vec{E}$ par $\vec{B}$ et ε_0 par $1/\mu_o$ pour trouver (j_m).

Développons en projetant d'abord sur 0_x.

On veut $\vec{\nabla} \cdot \vec{j_x} = -\varepsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_y \, E_z - (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_z \, E_y + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, E_x \right]$

$$= -\varepsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial_z} E_z - \frac{\partial E_z}{\partial_x} E_z - \frac{\partial E_y}{\partial_x} E_y + \frac{\partial E_x}{\partial_y} E_y + \ \dots \right.$$

$$\left. \dots + \left(\frac{\partial E_x}{\partial_x} + \frac{\partial E_y}{\partial_y} + \frac{\partial E_z}{\partial_z} \right) E_x \right]$$

En regroupant les termes astucieusement on tire :

$$\vec{\nabla}\, \vec{j_x} = +\varepsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial_x} \left(\frac{-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial_y} (-E_x \, E_y) + \frac{\partial}{\partial_z} (-E_x \, E_z) \right]$$

En raisonnant de même sur 0_y et 0_z on tire :

$$(j_e) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_0}{2}\left(-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) & -\varepsilon_0 E_y E_x & -\varepsilon_0 E_z E_x \\ -\varepsilon_0 E_x E_y & \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_x^2 - E_y^2 + E_z^2\right) & -\varepsilon_0 E_z E_y \\ -\varepsilon_0 E_x E_z & -\varepsilon_0 E_y E_z & \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_x^2 + E_y^2 - E_z^2\right) \end{pmatrix}$$

On peut condenser l'écriture en notant $\dot{I}$ la matrice unité et $(E_i\, E_j)$ la matrice de terme générique le produit de E_i par E_j (en notant E_1 , E_2 , E_3 pour E_x , E_y , E_z). Ainsi :

$$(j_e) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\,\dot{I} - \varepsilon_0\,(E_i\, E_j)$$

et par analogie :

$$(j_m) = \frac{1}{2}\,\frac{\vec{B}^2}{\mu_0}\,\dot{I} - \frac{1}{\mu_0}\,(B_i\, B_j)$$

Rappelons que $\vec{p} = \varepsilon_0\,\vec{E} \wedge \vec{B}$. La pertinence de ces résultats va être étudiée sur les deux exemples qui suivent.

LIEN AVEC L'ASPECT CORPUSCULAIRE

Soit une surface élémentaire $d\vec{S}$ dans une région où l'on trouve n photons de fréquence ν par unité de volume, animés d'une vitesse de module c, bien sûr, dans une direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ (voir figure 2).

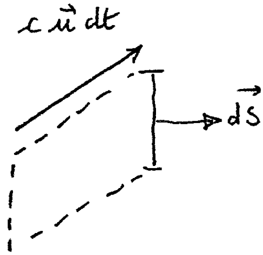

Figure 2

Les photons qui traversent $d\vec{S}$ entre t et t + dt sont contenus à l'instant initial dans le cylindre de base $d\vec{S}$, de hauteur $c\,\vec{u}\,dt$ et de volume

$c\,\vec{u}\,dt \cdot d\vec{S}$. Comme il y a n photons d'énergie $h\nu$ par unité de volume, $d\vec{S}$ est traversée pendant dt par l'énergie $d\mathscr{E} = n\,h\,\nu\,c\,\vec{u}\,dt \cdot d\vec{S}$. Par comparaison avec $d\mathscr{E} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}\,dt$; $\vec{\Pi}$ s'identifie avec $n\,h\,\nu\,c\,\vec{u}$.

D'autre part l'unité de volume contenant n photons de quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}\vec{u}$, la densité volumique de quantité de mouvement est $\vec{p} = n\,\frac{h\nu}{c}\,\vec{u}$.

$\vec{p}$ et $\vec{\Pi}$ sont liés par la relation $\vec{p} = \frac{1}{c^2}\vec{\Pi}$. Comme cette relation ne dépend ni de ν, ni de $\vec{u}$, elle reste valable après intégration pour une distribution quelconque de photons de directions et de fréquences diverses.

L'approche électromagnétique conduit, elle, à $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$ et, voyez plus haut, à $\vec{p} = \varepsilon_0\,\vec{E} \wedge \vec{B}$. Comme ε_0 et μ_0 sont liés par la relation $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$; on a bien $\vec{p} = \frac{1}{c^2}\vec{\Pi}$.

Les deux approches sont bien compatibles.

PRESSION DE RADIATION

Raisonnons sur un exemple.

Soit une onde plane progressive sinusoïdale, polarisée rectilignement. Avec un bon choix des axes, les champs s'écrivent :

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0}{c}\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{array}\right.$$

Supposons qu'elle se réfléchisse en x = 0 sur un plan métallique de conductivité infinie. Classiquement, on montre que l'onde réfléchie est :

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l}0\\ -E_0\cos\omega\left(t+\dfrac{x}{c}\right)\\ 0\end{array}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ \dfrac{E_0}{c}\cos\omega\left(t+\dfrac{x}{c}\right)\end{array}\right.$$

La superposition de l'onde incidente et de la réfléchie est l'onde stationnaire :

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l}0\\ 2E_0\sin(\omega t)\sin\left(\dfrac{\omega x}{c}\right)\\ 0\end{array}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ \dfrac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\cos\left(\dfrac{\omega x}{c}\right)\end{array}\right.$$

En particulier, au niveau du miroir métallique (en x = 0) :

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ 0\end{array}\right. \qquad \vec{B}\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ \dfrac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\end{array}\right.$$

La matrice (j_e) est donc nulle et la matrice (j_m) est :

$$\frac{2E_0^2\cos^2(\omega t)}{\mu_0 c^2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{4\,E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2\,E_0^2\cos^2(\omega t)}{\mu_0 c^2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Une surface élémentaire du miroir $d\vec{S}=\left|\begin{array}{l}dS\\ 0\\ 0\end{array}\right.$ est traversée par un débit de quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\left|\begin{array}{l}\vec{j_x}\cdot d\vec{S}\\ \vec{j_y}\cdot d\vec{S}\\ \vec{j_z}\cdot d\vec{S}\end{array}\right.$$

où $\vec{j_x}$, $\vec{j_y}$, $\vec{j_z}$ sont les colonnes de (j).

Ici
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{2E_0^2 \cos^2(\omega t)}{\mu_0 c^2} dS \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

soit :
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 2\, \varepsilon_0\, E_0^2 \cos^2(\omega t)\, d\vec{S}$$

$\frac{d\vec{p}}{dt}$ est en fait la force appliquée par le champ au métal ; comme elle est proportionnelle à $d\vec{S}$, le coefficient est homogène à une pression : c'est la pression de radiation, ici $2\, \varepsilon_0\, E_0^2 \cos^2(\omega t)$.

Ce résultat est parfaitement conforme à celui que donne l'approche classique, à savoir le calcul de la densité surfacique de charges σ et de la densité surfacique de courant $\vec{i_s}$ à partir des discontinuités des composantes normale du champ électrique et tangentielles du champ magnétique, puis l'application de la formule de la pression électromagnétique $\frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} - \frac{\mu_0}{2}\,\vec{i_s}^{\,2}$, formule qui généralise la notion de pression électrostatique.

BIBLIOGRAPHIE

Pour approfondir ces notions et replacer l'électromagnétisme dans le seul cadre qui lui convienne, celui de la relativité, une seule référence, certes ardue mais «incontournable» :

L. LANDAU et E. LIFCHITZ : *«Théorie des champs»*, Éditions Mir, Moscou.