

# La luminosité de l'arc-en-ciel

par Robert G.-M. CHALOT  
06140 Vence

---

## RÉSUMÉ

Dans la présente étude, on se propose de déterminer numériquement la luminosité du phénomène de l'arc-en-ciel, tant celle des deux arcs principaux, (primaire et secondaire), que celle des arcs surnuméraires qui leur sont parfois associés. De plus, on parvient à préciser la position exacte de ces derniers en fonction du diamètre des gouttes d'eau. Les études les plus récentes sur ce sujet font toutes appel à la diffraction de la lumière, et sont par suite inaptes à conduire à de pareils résultats. L'intérêt de ces derniers est de mieux comprendre les conditions de visibilité des phénomènes. Ils ont pu être obtenus en se référant aux explications anciennes de René Descartes et de Thomas Young, associées à des considérations physiques ou mathématiques d'un niveau relativement élémentaire.

## INTRODUCTION

Nombreux sont les textes parus au cours des dernières décennies ayant trait à l'arc-en-ciel et tentant de donner une explication de ce curieux phénomène lumineux atmosphérique. Il se trouve que toutes les théories présentées ont le défaut de faire appel à la diffraction de la lumière, d'où il résulte qu'elles sont inaptes à aborder correctement le problème de la luminosité, dont la solution est pourtant indispensable si l'on désire préciser les conditions complètes de sa visibilité.

La présente étude se propose de déterminer numériquement la luminosité tant des arcs-en-ciel principaux, (primaire et secondaire), que des arcs surnuméraires, qui sont parfois visibles à l'intérieur du primaire, en même temps qu'est fixée la position exacte de ces derniers en fonction du diamètre des gouttes d'eau, ce qui n'avait apparemment encore jamais été réalisé.

Elle est fondée essentiellement sur la vieille théorie de Descartes, complétée au moyen de considérations géométriques et analytiques simples, pour ce qui est des arcs principaux, et sur une explication de la formation des arcs surnuméraires, imaginée vers les années 1800 par

le Physicien Thomas Young, et qui n'a pas été retenue par la Communauté Scientifique pour des raisons historiques. Ainsi s'explique la brièveté de la liste des références bibliographiques.

Ici, pas de diffraction, mais prise en compte du diamètre de la pupille de l'œil de l'observateur.

## 1. RAPPEL DE LA THÉORIE DE DESCARTES

Comme on sait, la géométrie des deux arcs-en-ciel principaux est définie par la dérivation des deux équations :

$$\sin i = n \sin r \quad \Omega = 2\omega = 2 [(p + 1) r - i]$$

où  $i$  et  $r$  sont les angles d'incidence et de réfraction,  $n$  est l'indice de réfraction pour la longueur d'onde considérée,  $p$  le nombre de réflexions dans la goutte d'eau,  $\Omega$  la déviation pour le rayon émergent par rapport au rayon du Soleil (en fait  $180^\circ - \Omega$  pour l'arc primaire) (voir figures 1 et 2).

Considérons la fonction  $\Omega(i)$ .

Elle croît jusqu'à un maximum obtenu pour une certaine valeur de  $i$ , ce qui provoque une accumulation de lumière pour cette direction particulière, (le rayon de Descartes).

Sauf indication contraire, la luminosité qui est ici étudiée est la luminosité maximale, c'est-à-dire la luminosité qui apparaît à l'observateur dirigeant son regard dans la direction de la déviation maximale.

Cette direction  $\Omega$  est donnée de la manière suivante :

$$\frac{d\Omega}{dy} = \frac{d\Omega}{di} \frac{di}{dy} \quad \text{où } y = \sin i$$

$$\text{et} \quad \frac{d\Omega}{di} = 2 \left[ (p + 1) \frac{\cos i}{n \cos r} - 1 \right]$$

Le maximum de déviation est obtenu si :

$$\frac{d\Omega}{di} = 0$$

$$\text{qui donne} \quad \cos^2 i_0 = \frac{n^2 - 1}{(p + 1)^2 - 1}$$

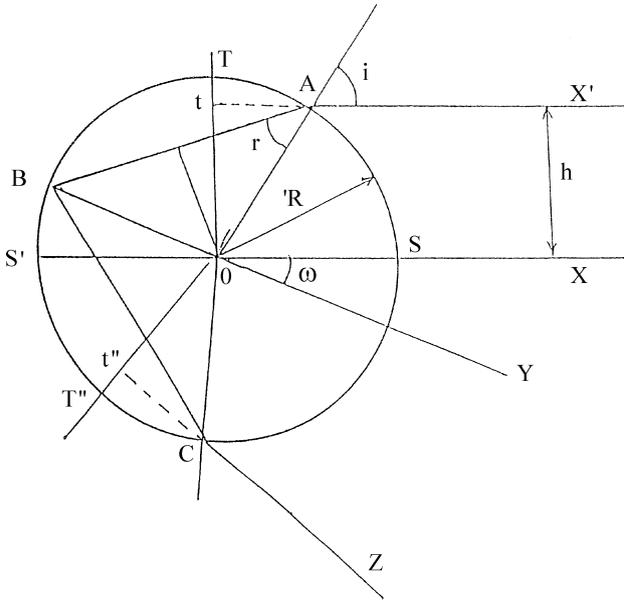


Figure 1 : Trajet des rayons arc primaire.

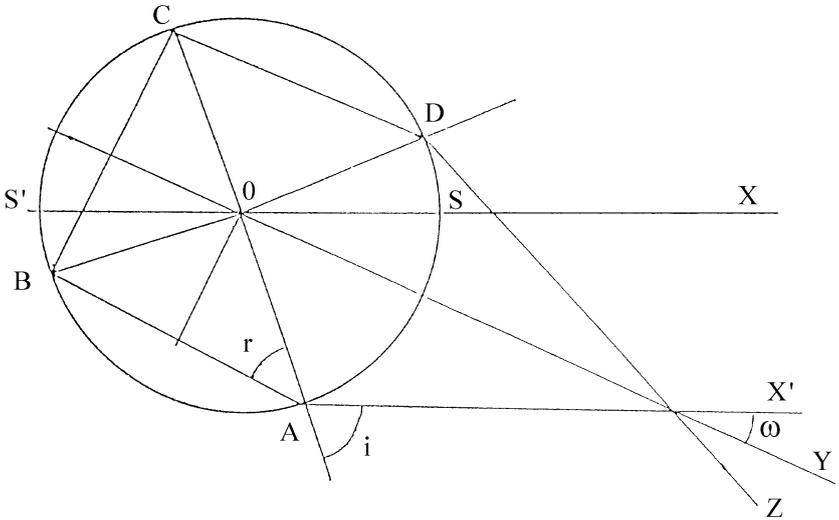


Figure 2 : Trajet des rayons arc secondaire.

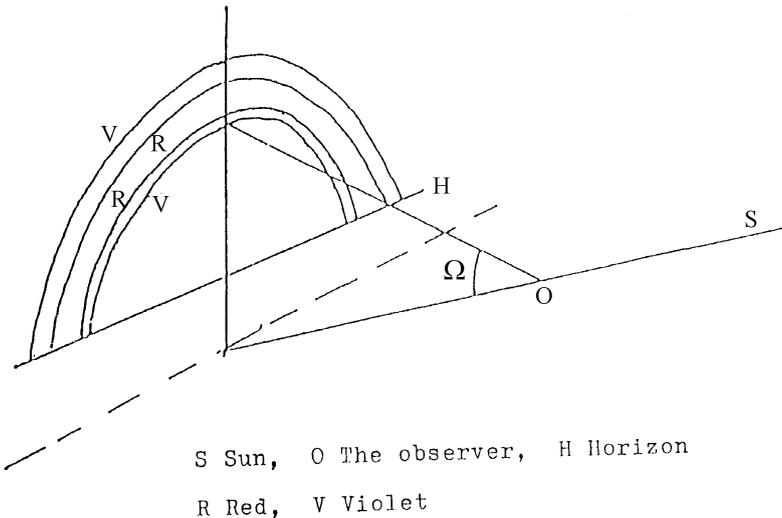
Et l'on obtient les valeurs suivantes, bien connues :

$\lambda$ (nm)	Arc primaire		Arc secondaire	
	750	410	750	410
n	1,330	1,342	1,330	1,342
i	59°35'	58°53'	71°56'	71°33'
r	40°25'	39°38'	45°38'	44°57'
$\Omega$	42°31'	40°46'	50°06'	53°24'
Ouverture moyenne $\Omega_m$	41°38'		51°45'	
Largeur $\Delta\Omega$	1°45'		3°18'	
Rouge	à l'extérieur		à l'intérieur	

Ces résultats sont valables pour un Soleil supposé ponctuel ; sinon, il convient d'ajouter  $\gamma = 32'$  à  $\Delta\Omega$ .

**Tableau 1** : Configuration des arcs-en-ciel principaux.

L'angle de déviation maximale caractérise les arcs primaire et secondaire qui sont vus par l'observateur comme des arcs parfaitement circulaires, situés comme le montre la figure 3.



**Figure 3** : Localisation des deux arcs.

## 2. LA LUMINOSITÉ DES ARCS PRINCIPAUX

Pour déterminer la luminosité des arcs-en-ciel principaux, on utilisera une méthode pas à pas, comprenant cinq étapes.

### 2.1. Première étape : Le concept de «pupille d'entrée»

Imaginons la situation suivante :

- une goutte d'eau unique,
- le Soleil comme source ponctuelle de lumière,
- pas de dispersion chromatique.

Depuis une goutte, située à la distance  $L$  de l'observateur, la pupille de l'œil, de diamètre  $d$ , est vue sous l'angle  $d/L$ . Pour la distance de référence  $L_0 = 2$  kilomètres, cet angle serait égal à  $10^{-6}$  radian si  $d = 2$  mm.

La pupille de l'œil est un petit cercle perpendiculaire au plan des figures 1 ou 2. Si l'on reste dans ce plan, elle se réduit à un segment de longueur  $d$ .

Si le rayon incident  $X'A$  se déplace parallèlement à lui-même de la quantité  $dh = R dy$ , ( $R$  rayon de la goutte), le rayon émergent  $CZ$  accuse une rotation  $d\Omega$  telle que :

$$d\Omega = \frac{1}{R} \left( \frac{d\Omega}{dy} \right) dh \quad \text{mais} \quad d\Omega = \frac{d}{L}$$

d'où pour un déplacement fini  $\Delta h$  :

$$\Delta h = R \frac{d}{L} \left( \frac{d\Omega}{dy} \right)^{-1}$$

Pour balayer complètement la pupille de l'œil, il nous faut sortir du plan de la figure. Cela peut être fait simplement en faisant osciller le plan de la figure autour de l'axe fixe  $OX$  joignant le centre du Soleil au centre de la goutte d'un angle  $d/L'$  où  $L'$  est la distance de l'œil de l'observateur à l'axe  $OX$ , soit  $L' = L \sin \Omega$ .

Ce faisant, le rayon incident se déplace, en arrière ou en avant du plan de la figure de la quantité  $\Delta h' = R t \frac{d}{L}$  en posant :  $t = \frac{\sin i}{\sin \Omega}$ .

Il résulte de ce qui précède qu'à tout rayon émergent s'appuyant sur le contour circulaire de la pupille de l'œil, on peut faire correspon-

dre un rayon issu du Soleil, supposé ponctuel, s'appuyant sur un contour fermé, disposé dans un plan perpendiculaire à la direction OX, à une distance quelconque de la goutte, puisque tous les rayons incidents sont parallèles.

La surface de ce contour, qui peut être appelé «pupille d'entrée du système», et qui a la forme d'une ellipse très allongée, a pour expression :

$$S = \varphi \frac{\pi}{4} \Delta h \cdot \Delta h'$$

$\varphi$  étant un coefficient de forme restant indéterminé, mais qui peut, sans aucun doute, être confondu avec l'unité, avec un degré d'approximation tout à fait acceptable pour le présent problème. En divisant cette surface par la surface frontale de la goutte  $\pi R^2$ , on obtient le rapport suivant, en prenant  $\varphi = 1$  :

$$\sigma = \frac{t}{4} \left( \frac{d\Omega}{dy} \right)^{-1} \left( \frac{d}{L} \right)^2$$

Ce rapport sera désigné ci-après comme le «coefficient de passage du front de condensation». Il joue un rôle de premier plan pour la détermination des caractéristiques photométriques des arcs-en-ciel.

Jusqu'ici, ce rapport est valable pour n'importe quel angle d'incidence  $i$ , sauf pour la région où la luminosité de l'arc-en-ciel est maximale.

Qu'arrive-t-il alors ?  $\frac{d\Omega}{dy}$  tend vers zéro, et  $\sigma$  tend vers l'infini, ce qui n'a pas de sens physique.

Dans ce cas, il nous faut utiliser le développement en série de Taylor-Mac-Laurin et considérer le second terme du développement :

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\Omega}{dy^2} \right) (\Delta y)^2$$

équation, qui, jointe à l'équation  $\Delta h = 2 R \cdot \Delta y$  valable de part et d'autre du sommet de la parabole dite «osculatrice» de la fonction  $\Omega = f(y)$  au voisinage de ce sommet, conduit à :

$$\Delta h = R\theta \left( \frac{d}{L} \right)^{1/2}$$

en posant :

$$\theta = \sqrt{8} \left( \frac{-d^2 \Omega}{dy^2} \right)^{-1/2}$$

D'où il résulte que :

$$\sigma = \frac{\theta t}{4} \left( \frac{d}{L} \right)^{3/2} = \sigma' \left( \frac{d}{L} \right)^{3/2}$$

En prenant pour valeur de l'indice de réfraction de l'eau  $n = 1,335$  au milieu du spectre visible, on obtient :

	Arc primaire	Arc secondaire
$\theta$	0,909	0,39
$t$	1,29	1,21
$\sigma'$	0,29	0,12

## 2.2. Seconde étape : La polarisation de la lumière

Maintenant, il y a lieu de considérer le partage de l'énergie lumineuse à chaque rencontre avec la paroi de la goutte d'eau, en prenant en compte la polarisation de la lumière, incluse dans les formules de Fresnel.

Si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les parts de la lumière qui sont réfléchies en A en B et en C de la figure 1, les parts qui sont réfractées sont  $1 - \rho_1$  et  $1 - \rho_2$ .

$$\text{Et l'on a : } \rho_1 = \left( \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \right)^2 \quad \rho_2 = \left( \frac{\text{tg}(i-r)}{\text{tg}(i+r)} \right)^2$$

pour chacune des composantes ; le coefficient résultant le Fresnel  $\rho_r$  est donné par :

$$\rho_r = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

	Arc primaire	Arc secondaire
$\rho_r$	$(1 - \rho)^2 \rho$	$(1 - \rho)^2 \rho^2$
$\rho_r$	0,045	0,0194

Si  $\mu$  représente le rapport entre l'énergie de la composante perpendiculaire au plan d'incidence, donc parallèle à la tangente à l'arc-en-ciel, et celle de la composante parallèle, donc contenue dans le plan de la figure 1 ou 2, on trouve que  $\mu = 26,7$  et  $9,5$  respectivement pour le primaire et pour le secondaire. Cela montre que les arcs-en-ciel sont polarisés, surtout le primaire.

La figure 4 montre comment les coefficients  $\rho_1$  et  $\rho_2$  varient en fonction de l'angle d'incidence  $i$ . La polarisation notoire de l'arc primaire est due à la faible différence entre  $i_0$  et l'angle de Brewster égal à  $\arctg n = 53^\circ 10'$  pour  $n = 1,335$ .

$$\rho^i \text{ and } \varphi'' = f(i) \quad (n = 1,335)$$

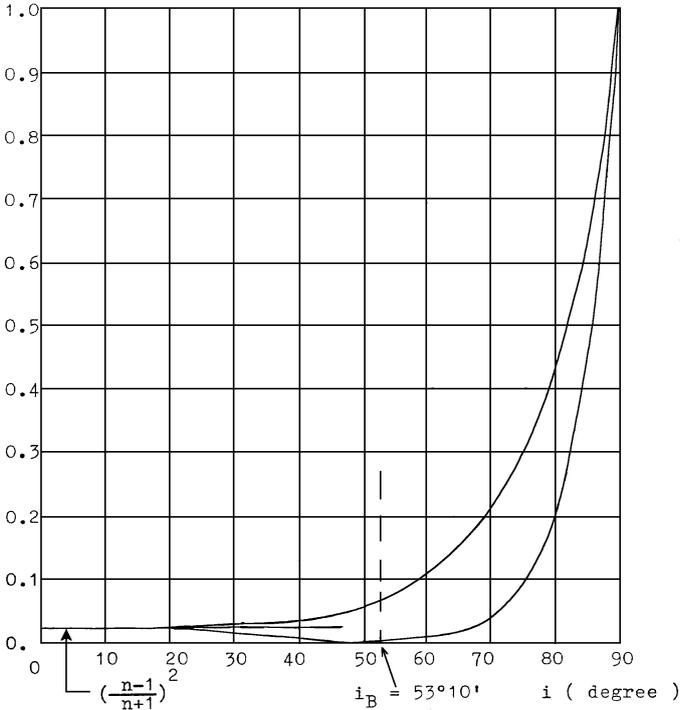


Figure 4 : Diagramme de Fresnel.

### 2.3. Troisième étape : *Le front de condensation*

Dans cette étape, on se propose de passer de l'hypothèse de la goutte unique à la situation réelle qui survient avec un nuage, une cascade ou un rideau de pluie. Tous ces derniers seront désignés comme «front de condensation».

Le fait important est que ni le diamètre des gouttes d'eau, ni leur densité de présence, (dans certaines limites précisées), ne viennent modifier le coefficient de passage  $\sigma$ .

En effet, la détermination numérique de la luminosité effectuée ci-après, déduite du coefficient  $\sigma$ , n'est directement applicable que si, lors de l'observation, une condition particulière est satisfaite, ce qui est d'ailleurs très fréquent dans le cas d'un nuage ou d'une cascade. Il suffit que la profondeur physique du front de condensation soit supérieure à la valeur dite «profondeur limite de saturation optique», laquelle dépend à la fois de la densité volumique de présence  $q$  et du diamètre  $D$  des gouttes par la formule simple :

$$l = \frac{2}{3} 10^6 \frac{D}{q} \quad l \text{ et } D \text{ en mm} \quad q \text{ en g/m}^3$$

Cette circonstance résulte du fait que seules interviennent dans la formation du phénomène, les gouttes d'eau qui sont visibles en ligne droite à la fois vues du Soleil et vues côté observateur. L'effet des gouttes situées en arrière est occulté par les gouttes situées en avant. La formule ci-dessus se déduit de considérations géométriques simples sur le degré d'obstruction en tenant compte de la formule donnant le volume de la sphère.

Lorsque la condition est satisfaite, pas plus la densité de présence  $q$  que le diamètre des gouttes  $D$  interviennent dans le résultat. S'il n'en est pas ainsi, des corrections peuvent être appliquées, que l'on laissera ici de côté, faute de place.

Par exemple, pour un nuage contenant  $0,5 \text{ g/m}^3$  de gouttes de  $0,05 \text{ mm}$  de diamètre, on trouve  $67 \text{ mètres}$  pour la profondeur limite de saturation optique, certainement inférieure à sa profondeur physique. Pour un rideau de pluie avec la même valeur de  $q$ , mais des gouttes de  $0,5 \text{ mm}$ , on trouverait  $667 \text{ mètres}$ , éventuellement plus que la profondeur physique.

#### 2.4. Quatrième étape : *Le Soleil n'est pas ponctuel*

Lors de cette étape, l'hypothèse du Soleil ponctuel est abandonnée au profit de la situation réelle, avec son diamètre apparent  $\gamma = 0,0093$  radian ou  $32'$ .

Comme on sait, l'énergie radiante en provenance du Soleil reçue sur une surface perpendiculaire aux rayons et à la limite de l'atmosphère terrestre est  $C = 1380 \text{ W/m}^2$ . On continue d'ignorer la dispersion chromatique et le diamètre de la pupille de l'œil  $d$  est toujours égal à  $2 \text{ mm}$ .

Dans l'hypothèse du Soleil ponctuel, l'arc-en-ciel devrait apparaître comme un filament circulaire sans épaisseur extraordinairement brillant. Maintenant, il apparaît comme un arc lumineux de même couleur que le Soleil et dont la largeur est exactement égale à son diamètre apparent  $\gamma$ .

En effet, la direction des rayons lumineux solaires atteignant le front de condensation varie de  $\pm \gamma/2$  puisque leur origine couvre le disque solaire tout entier et que l'angle de déviation maximale est le même pour tous. On remarque qu'à l'intérieur de la bande de largeur  $\gamma$ , la luminosité n'est pas constante, mais varie de zéro à zéro d'un bord à l'autre et passe par un maximum au centre. Cela est dû à ce que chaque arc concentrique reçoit une énergie correspondant à une « corde » du disque solaire d'autant plus courte qu'elle est plus éloignée de son diamètre parallèle à la tangente à l'arc-en-ciel. Il en résulte que le profil transversal énergétique lumineux dans la bande est nécessairement, (à une certaine échelle), représenté par un demi-cercle, dont le rayon correspond à la luminosité maximale au centre de la bande.

Pour parvenir à exprimer le rapport existant entre cette luminosité maximale et celle du disque solaire, (considérée comme uniforme), il suffit de chercher le rapport existant entre la quantité de lumière qui se propage vers l'œil de l'observateur en provenance d'une plage convenablement choisie de l'arc-en-ciel « blanc » à l'intérieur d'un angle solide déterminé et la quantité de lumière se propageant de façon similaire dans l'angle solide défini par le contour circulaire du Soleil. Pour ce faire et pour assurer l'égalité des deux angles solides, la plage choisie est constituée d'un carré quelconque inscrit dans la bande à l'étude supposée située à la distance  $L$  de l'observateur, et dont le côté

apparent soit exactement égal à  $\gamma$ . En même temps, le Soleil circulaire est remplacé fictivement par un carré de même côté apparent  $\gamma$ .

L'énergie lumineuse en provenance du Soleil fictif carré, pénétrant dans l'œil de l'observateur est donnée par :

$$W_1 = C f \frac{\pi}{4} d^2 \times \frac{4}{\pi} = C f d^2$$

tandis que l'énergie lumineuse en provenance de la plage carrée de l'arc-en-ciel est donnée, selon ce qui a été déterminé plus haut par :

$$W_2 = C f \frac{\theta t}{4} \rho_r \left(\frac{d}{L}\right)^{3/2} \gamma^2 L^2$$

le coefficient  $f$  représente la fraction de l'énergie visible dans le spectre solaire (environ 0,4).

Dans ces conditions, le quotient cherché serait égal à :

$$W_2/W_1 = \frac{\theta t}{4} \rho_r \gamma^2 \left(\frac{L}{d}\right)^{1/2}$$

Ramenant alors le Soleil depuis sa forme fictive carrée à la forme réelle circulaire, le dénominateur se trouve multiplié par  $\frac{\pi}{4}$  et le résultat final cherché est :

$$W_2/W_1 = \frac{\theta t}{\pi} \rho_r \gamma^2 \left(\frac{L}{d}\right)^{1/2}$$

Remplaçant les symboles par leurs valeurs :

$\theta = 0,909$  ;  $t = 1,29$  ;  $\rho_r = 0,045$  ;  $L = 2$  km ;  $d = 2$  mm ;  $\gamma = 0,0093$   
on trouve :

$$W_2/W_1 = 1,47 \cdot 10^{-3}$$

pour rapport des luminosités cherchées, pour un front de condensation situé à deux kilomètres.

Il résulte de l'équation littérale ci-dessus, (valable aussi bien pour l'arc secondaire que pour le primaire), que la luminosité de ces arcs est proportionnelle à la racine carrée de la distance  $L$ . Donc qu'elle croît

avec elle. Cette loi était demeurée jusqu'ici ignorée. Le fait s'est trouvé dissimulé parce que l'observateur est amené, sans s'en rendre compte, à comparer la luminosité intrinsèque de l'arc-en-ciel avec celle du ciel environnant, laquelle peut varier, selon les circonstances, dans de grandes proportions, de un à trente ou plus, comme le démontre un posemètre autonome dont l'indice d'éclairement, entre un ciel particulièrement clair et un ciel sombre peut passer de un à quatre ou de un à cinq. Or, on a  $2^5 = 32$ .

La même équation montre que, paradoxalement, plus petite est la pupille de l'œil, plus l'arc-en-ciel paraît brillant. Cela ne doit pas toutefois surprendre, car il ne faut pas oublier qu'il s'agit d'un rapport de luminosité, celle de l'arc-en-ciel et celle du Soleil ; et cette dernière varie comme  $d^2$ . Le fait peut être utilisé lors de la photographie du phénomène. Pour augmenter le contraste entre l'arc-en-ciel et le ciel environnant, il suffit de fermer le diaphragme autant que possible, tout en augmentant en compensation le temps de pose. En effet, le diaphragme de l'objectif joue le même rôle que la pupille de l'œil.

### 2.5. Cinquième étape : *La luminosité des bandes colorées*

Que deviennent les résultats obtenus ci-dessus : «Profil semi-circulaire de la luminosité à l'intérieur de l'arc-en-ciel blanc et luminosité maximale en son centre  $I_0 = 1,47 \cdot 10^{-3}$ , rapportée à celle du disque solaire», lorsque l'on tient compte de la dispersion de la lumière.

Imaginons en premier lieu que la loi de variation  $n = n(\lambda)$  de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde de la lumière soit une loi linéaire. Dans l'intervalle de variation retenu de 750 nm à 410 nm, il y a chevauchement de tous les profils semi-circulaires identiques et également espacés. L'analyse montre que, dans les limites ci-dessus correspondant à la largeur théorique de 1,75 degrés, la luminosité énergétique, (c'est-à-dire indépendante du pouvoir de l'œil humain de percevoir plus ou moins bien les couleurs), est constante dans cet intervalle et est donnée par :

$$I = \frac{\pi}{4} \frac{1}{3,28} I_0 = 3,52 \cdot 10^{-4}$$

Le facteur  $\frac{\pi}{4}$  n'est autre que la valeur numérique de l'intégrale

définie  $\int_0^1 y dx$  des ordonnées des différents points du profil semi-circulaire. Le coefficient 3,28 provient du fait que la luminosité est d'autant plus réduite que la dispersion de la lumière est plus importante ; il est égal au rapport de la largeur théorique de l'arc-en-ciel primaire 1,75 degrés ou 105' au diamètre apparent du Soleil  $\gamma = 32'$ .

La courbe représentative de la luminosité en fonction de l'indice de réfraction, (ou ce qui revient au même, en fonction de l'angle de déviation  $\Omega$ ), se compose alors d'un segment de droite horizontale, prolongé à ses deux extrémités par deux quarts d'ellipse ayant respectivement I et  $\gamma/2$  pour demi-axes vertical et horizontal.

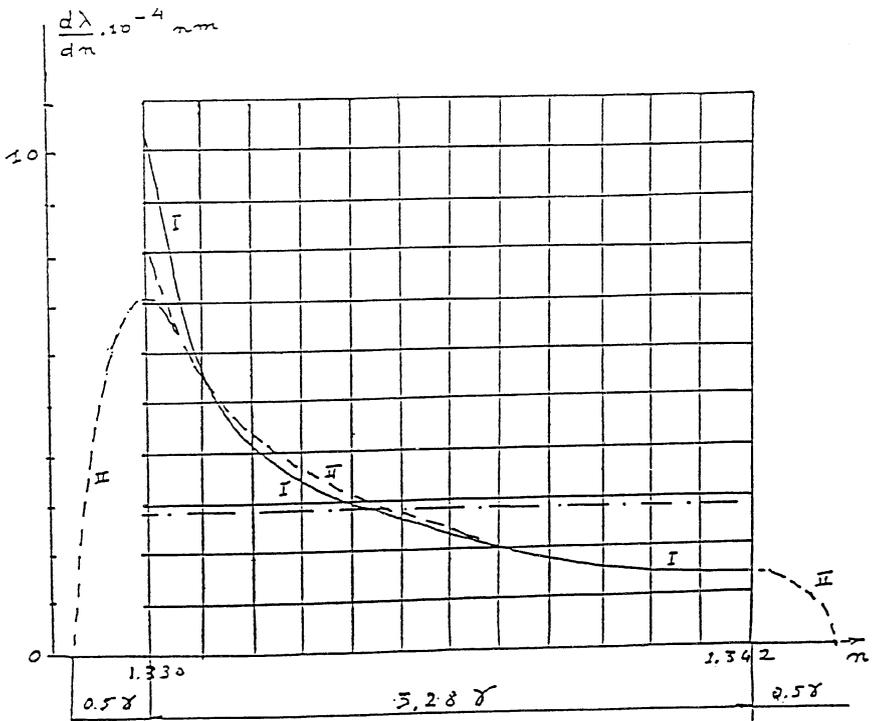


Figure 5 : Profil de la luminosité pour les arcs principaux.

En réalité, la loi  $n = f(\lambda)$  est très loin d'être linéaire. Le tableau 2 montre la relation réelle entre  $n$  et  $\lambda$ . La courbe I de la figure 5 montre la variation du quotient différentiel  $\frac{d\lambda}{dn}$  en fonction de  $n$ , lequel est proportionnel à la luminosité. L'ordonnée de la droite horizontale, en traits mixtes, est égale à la valeur moyenne de ce quotient, soit :

$$\frac{750 - 410}{0,012} = 2,83.10^4 \text{ nm}$$

<b>n</b>	<b><math>\lambda</math> (nm)</b>	<b><math>\Delta\lambda</math></b>
1,330	750	
1,331	671	79
1,332	625	46
1,333	589	36
1,334	559	30
1,335	533	25
1,336	510	23
1,337	490	20
1,338	472	18
1,339	455,5	16,5
1,340	440	15,5
1,341	425	15
1,342	410	15

**Tableau 2 :**  $\lambda = f(n)$ .

On en conclut que la luminosité de la bande rouge, pour  $\lambda = 750$  nm, est égale à environ 3,5 fois la valeur moyenne, tandis que celle de la bande violette est égale à la moitié de cette dernière. Ce résultat explique pourquoi la bande rouge est toujours la plus lumineuse, alors que la bande violette n'est que rarement visible.

Il convient en outre de tenir compte du fait que l'énergie solaire n'est pas répartie de manière uniforme à l'intérieur du spectre solaire. Si l'on prend pour unité la valeur du maximum, obtenue pour  $\lambda = 490$  nm, la bande rouge reçoit le coefficient 0,67 et la bande violette le coefficient 0,77, tandis que la valeur moyenne reçoit le coefficient

0,87. Les valeurs des luminosités pour les bandes extrêmes deviennent dans ces conditions :

$$\text{Rouge :} \quad 3,52 \times \frac{3,5 \times 0,67}{0,87} 10^{-4} = 9,5 10^{-4}$$

$$\text{Violet :} \quad 3,52 \times \frac{0,5 \times 0,77}{0,87} 10^{-4} = 1,5 10^{-4}$$

La courbe II de la figure 5 traduit l'effet de la non-uniformité de l'énergie dans le spectre solaire (relèvement au milieu, abaissement sur les bords).

Les valeurs numériques ci-dessus sont valables pour une distance L égale à deux kilomètres. Sinon, elles sont à multiplier par le facteur  $(L/L_0)^{1/2}$ . Elles sont si faibles qu'elles ne sont guère parlantes. Aussi, est-il préférable de comparer ces luminosités avec celle de la Pleine Lune, plutôt qu'avec celle du Soleil. Comme on sait, le rapport de luminosité de ces deux astres est donné par :

$$A_0 \gamma^2 = 6,3 10^{-6}$$

avec  $A_0$  Albedo de la Pleine Lune = 0,073 et  $\gamma = 0,093$ .

On obtient alors :

Rouge : 150 fois la Pleine Lune,

Violet : 25 fois la Pleine Lune.

Il apparaît que l'arc-en-ciel, apparaissant sur un nuage lointain, est beaucoup plus lumineux que ce que l'on aurait pu imaginer.

Les mêmes calculs peuvent être appliqués à l'arc secondaire, en remplaçant les coefficients  $\theta$ ,  $t$  et  $\rho_r$  par leurs nouvelles valeurs et en remarquant que l'arc secondaire est 1,88 fois plus large que le primaire, on trouve que la luminosité du secondaire est environ le dixième de celle du primaire, pour chaque couleur homologue.

### 3. LES ARCS SURNUMÉRAIRES

#### 3.1. L'explication de Thomas Young

On appelle «arcs surnuméraires» les arcs supplémentaires, de couleur rose, au nombre de deux ou trois, rarement quatre, qui sont parfois visibles au-dessous de l'arc primaire.

Une bonne explication de ce phénomène a été donnée vers l'année 1800 par le Physicien Thomas Young. On peut aujourd'hui comprendre facilement pourquoi cette explication n'a pas été retenue par la Communauté Scientifique. Il y a à cela trois raisons :

- la première est que la différence entre les chemins optiques à l'intérieur des gouttes est très faible, de l'ordre du millième du trajet total,
- la seconde réside dans le fait de la difficulté de déterminer avec une précision suffisante les angles d'incidence  $i_1$  et  $i_2$  correspondant aux rayons émergents parallèles engendrant les interférences, qui, selon Young, étaient à l'origine de la formation du phénomène,
- la troisième est plutôt d'ordre historique. A l'époque de Young, deux théories opposées régnaient à propos de la nature de la lumière, la théorie corpusculaire et la théorie ondulatoire. Or, l'explication de Young allait dans le sens de la seconde, alors que c'est la première qui prévalait à cette époque, surtout en Angleterre.

On constate que, s'il est très facile de déterminer  $\Omega$  à partir de  $i$  au moyen des deux équations de Descartes :

$$\sin i = n \sin r \quad \text{et} \quad \Omega = 2 (2r - i)$$

ce n'est pas le cas pour l'opération inverse, déterminer  $i$  à partir de  $\Omega$ . Le système d'équation est irréversible, et ne peut être utilisé dans l'autre sens qu'au moyen d'un ordinateur.

L'expression de la longueur du chemin optique est :

$$\Lambda = 2R (2n \cos r - \cos i)$$

comme le montre la figure 1, si l'on prend comme plans de référence entre lesquels est évaluée cette longueur, les plans dont les traces sont OT et OT'' sur la figure 1.

L'équation ci-dessus est valable quelque soit la valeur de l'angle d'incidence  $i$ , égale ou non à l'angle d'incidence  $i_0$  de Descartes, et l'on constate que la fonction :

$$x = (2 n \cos r - \cos i)$$

ne dépend que de la variable  $i$ .

Considérons une paire de rayons incidents parallèles situés de part et d'autre du rayon incident de Descartes, dans l'hypothèse du Soleil ponctuel. Et choisissons les angles d'incidence  $i_1$  et  $i_2$  de telle sorte que les rayons émergents possèdent la même déviation  $\Omega$ , telle que  $\Delta\Omega = \Omega_0 - \Omega$ ,  $\Omega_0$  étant la déviation maximale de Descartes.

Soit  $\Delta\Lambda$  la différence de chemin optique pour les deux paires de rayons,  $\Delta\Lambda = \Delta^2x \cdot 2R$ . La figure 6 représente la variation de  $\Delta^2x$  comme fonction de  $\Delta\Omega$ , en prenant  $n = 1,330$  pour l'indice de réfraction de l'eau ; en effet, la couleur rosée des arcs surnuméraires est la conséquence de la prépondérance de la couleur rouge dans l'arc-en-ciel principal. Le tracé de la courbe peut être obtenu par ordinateur.

Par exemple,  $\Delta\Omega = 1,8$  degré conduit à  $\Delta^2x = 1,6 \cdot 10^{-3}$ , l'ordinateur fournit les valeurs  $i_1 = 50,13$  degrés et  $i_2 = 68,16$  degrés. Selon la théorie des interférences de Young, la différence  $\Delta\Lambda = 2 R \Delta^2x$  doit être un multiple de  $\lambda$ , soit  $\nu \cdot \lambda$ . Si l'on prend  $\nu = 2$ , le diamètre de la goutte doit être égal à :

$$D = 2 R = \frac{\nu\lambda}{\Delta^2x} = \frac{2 \times 750 \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-3}} = 0,94 \text{ mm}$$

valeur tout à fait vraisemblable pour des arcs surnuméraires aperçus dans un jet d'eau.

Sur la figure 6, la courbe est complétée par un faisceau de lignes droites inclinées, issues de l'origine, avec des coefficients angulaires arbitraires entiers, 1, 2, 3, 4. Une construction géométrique simple permet de voir que pour les trois autres valeurs  $\nu$  et un même diamètre de goutte d'eau, les écarts angulaires pour les autres arcs surnuméraires seraient respectivement : 1,2 - 2,2 - 2,6 degrés, la première frange d'interférence étant alors noyée dans l'arc principal et de ce fait invisible.

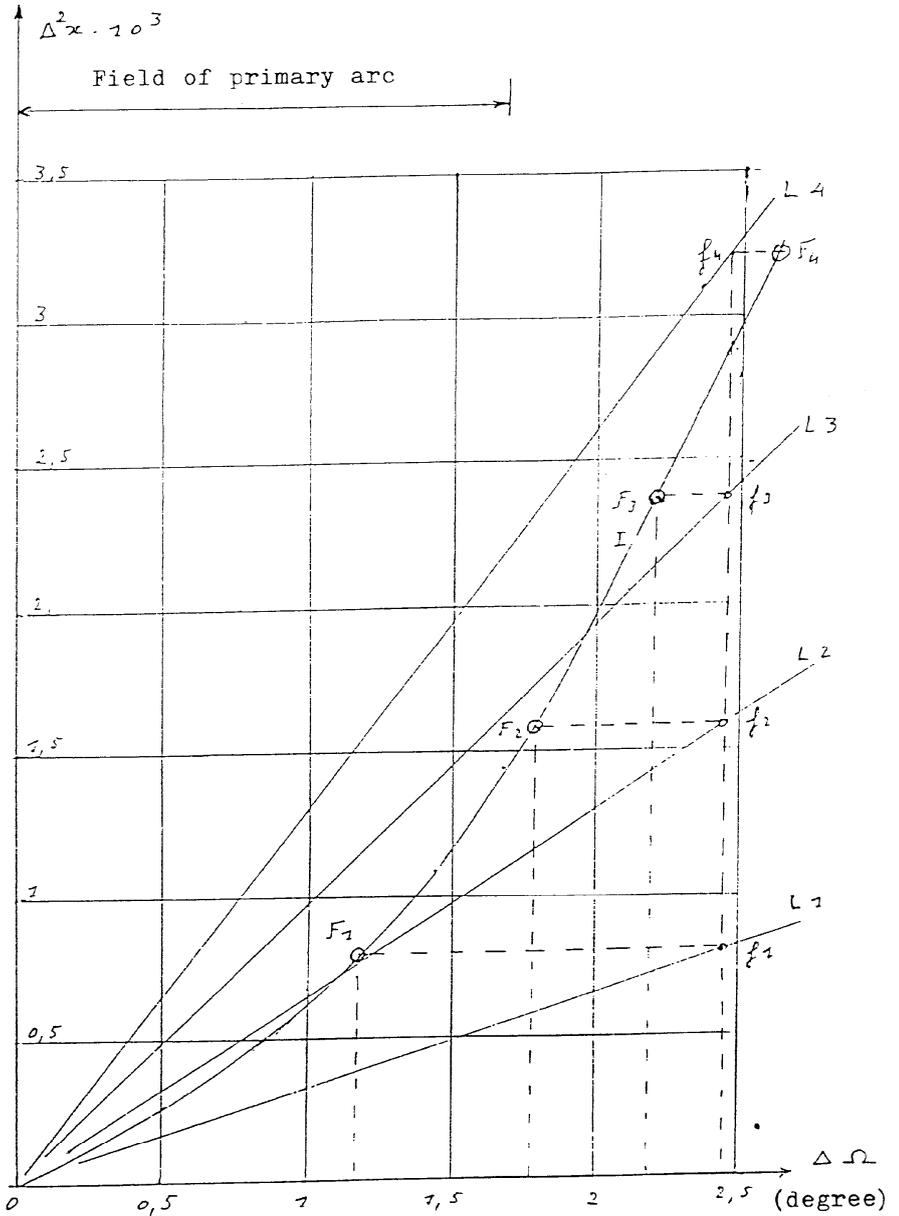
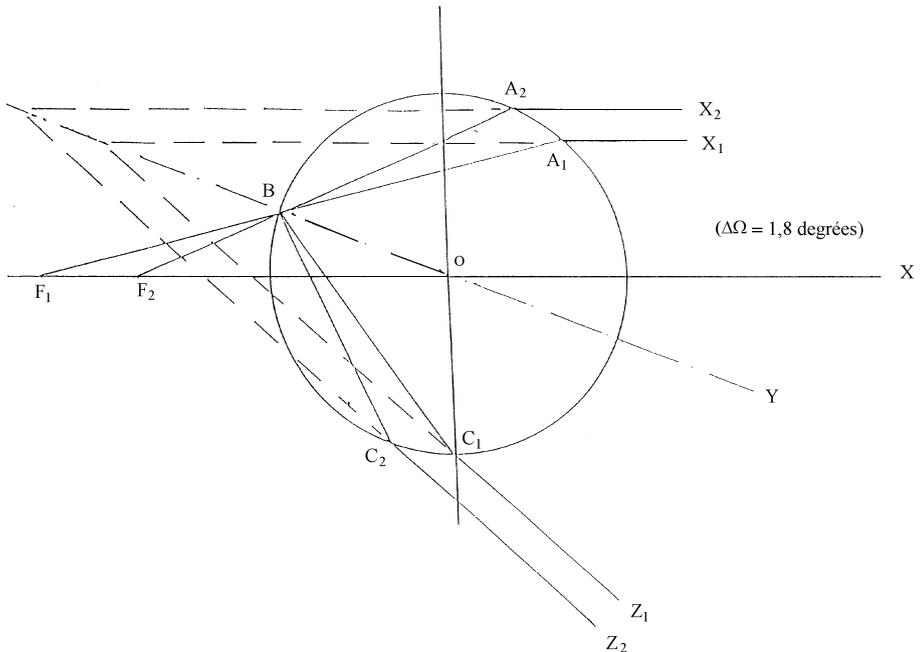


Figure 6 : Abaque pour les arcs surnuméraires.

La figure peut être utilisée, soit pour connaître le diamètre des gouttes connaissant la position des franges, soit pour effectuer l'opération inverse.

La figure 7 montre le trajet des rayons lumineux pour  $\Delta\Omega = 1,8$  degré, avec  $i_1 = 50,13$  degrés et  $i_2 = 68,16$  degrés. La distance entre les deux rayons émergents parallèles est d'environ 0,1 mm pour une goutte de 1 mm de diamètre, c'est-à-dire beaucoup moins que le diamètre de la pupille de l'œil. Cette figure peut être facilement tracée connaissant les deux angles d'incidence, en utilisant la formule suivante :

$$f = \frac{\sin i}{\text{tg}(i - r)} \quad \text{avec} \quad f = \frac{OF}{R}$$



**Figure 7 :** Trajet des rayons arcs surnuméraires.

En réalité, un arc surnuméraire ne se réduit pas à une seule ligne. Sa largeur résulte à la fois du fait que le Soleil n'est pas ponctuel, et du fait qu'il existe une certaine dispersion à l'intérieur de la bande rouge.

### 3.2. Luminosité

Sont étudiées ci-après successivement la luminosité des arcs surnuméraires et celle de la zone intérieure à l'arc primaire, qui a donné lieu à l'appellation de «zone sombre d'Alexandre» à la région comprise entre les deux arcs-en-ciel principaux, à cause d'un effet de contraste. Nous commencerons par la seconde.

Soulignons tout d'abord la différence fondamentale qui existe entre ces deux luminosités et celle des arcs principaux : elles sont indépendantes de la distance  $L$  du front de condensation à l'observateur, contrairement à celle-ci. Cela est dû à ce qu'ici, la dérivée première de la fonction  $\Omega = f(i)$  conserve sa juste place. En effet, les angles d'incidence à considérer sont fort éloignés de ceux que l'on rencontre au voisinage immédiat de la région d'éclat maximal. La pupille d'entrée unique en forme d'ellipse très allongée est remplacée par deux pupilles d'entrée de part et d'autre de la première, dont la forme se rapproche d'un cercle.

Pour la luminosité de la zone intérieure, toutes les couleurs se trouvent mélangées, et l'on prend en compte l'indice de réfraction moyen  $n = 1,335$ .

Le rapport entre la luminosité de cette zone intérieure et la luminosité au centre de l'arc primaire se détachant sur un front de condensation situé à une distance  $L$  quelconque, peut être obtenu en utilisant la formule suivante :

$$\varepsilon = \frac{t_1 \theta_1 \rho_1 + t_2 \theta_2 \rho_2}{t \cdot \theta \cdot \rho} \left( \frac{d}{L} \right)^{1/2}$$

avec au numérateur  $t = \frac{\sin i}{\sin \Omega}$        $\theta = \left( \frac{d\Omega}{dy} \right)^{-1}$       et  $\rho$

le coefficient résultant de Fresnel pour chacun des angles d'incidence  $i_1$  et  $i_2$ , et au dénominateur  $t$ ,  $\theta$  et  $\rho$ , les mêmes coefficients que ceux précédemment définis lors de l'étude de la luminosité de l'arc primaire. L'application de cette formule montre que la luminosité de cette zone est faible, de l'ordre du quart de celle de la Pleine Lune en bordure immédiate de celui-ci, et qu'elle ne décroît que lentement vers l'intérieur, encore la moitié environ de cette valeur à la distance de dix degrés de l'arc principal.

La luminosité des arcs surnuméraires se déduit de ce premier résultat par les considérations auxiliaires suivantes :

- du fait de la prépondérance de la couleur rouge dans l'arc primaire, engendrant, comme il a été dit, leur couleur rosée, il convient de considérer l'indice  $n = 1,330$  et non  $1,335$ , mais surtout de multiplier par trois le résultat,
- par ailleurs, on sait que, lorsqu'il y a interférence, ce ne sont pas les énergies qui s'ajoutent, mais les amplitudes à la crêtes des ondes, ce qui, si les énergies étaient égales, doublerait encore le résultat,
- en fait, dans le cas présent, les énergies ne sont pas égales, et il se trouve que, pour la composante polarisée parallèle, les énergies des rayons émergents pour  $i_1$  et pour  $i_2$  sont si différentes, à cause de la proximité de l'angle de Brewster pour le rayon incident intérieur, qu'il n'y a pas interférence. Seuls interfèrent les rayons émergents de la composante perpendiculaire.

Le résultat final est que la luminosité des arcs surnuméraires, indépendante de la distance, peut être évaluée en gros comme égale à celle de la Pleine Lune, ce qui est très faible, comparé à ce qui a été obtenu pour l'arc-en-ciel primaire.

Ces résultats inédits sont de nature à expliquer pourquoi les arcs surnuméraires et, a fortiori, le contraste de la zone sombre d'Alexandre, sont si rarement perceptibles.

Les meilleures conditions pour les apercevoir sont celles d'un ciel extraordinairement clair et dégagé, avec un Soleil situé bas sur l'horizon, conditions que l'on retrouve d'ailleurs pour l'observation d'un arc-en-ciel primaire très lumineux se détachant sur un nuage lointain, comme il arrive après un orage.

Pour les arcs surnuméraires, une condition supplémentaire intervient, à savoir une homogénéité suffisante du front de condensation au point de vue du diamètre des gouttes d'eau. En effet, la configuration géométrique des franges d'interférence dépend, comme on a vu, du diamètre des gouttes ; un manque d'homogénéité entraînant inévitablement leur brouillage complet. C'est d'ailleurs la vraie raison pour laquelle on ne voit jamais plus de deux ou trois arcs surnuméraires à proximité immédiate du primaire, et non pas la décroissance de leur luminosité lorsqu'on s'éloigne à l'intérieur.

Remarquons pour terminer qu'à aucun moment, on n'a pris en considération le pouvoir qu'a l'œil humain de transformer en sensation colorée le flux d'énergie lumineuse reçu du Soleil par l'intermédiaire de la goutte d'eau.

On a raisonné comme si l'œil était uniformément impressionné dans les limites arbitrairement fixées du spectre visible, de 750 nm côté rouge, à 410 nm côté violet.

En effet, ce dernier problème est un problème de physiologie qui n'entre pas dans le cadre de cette étude exclusivement physique.

## CONCLUSION

Il apparaît que la présente étude sur la luminosité de l'arc-en-ciel atteint un double objectif :

- d'une part, elle réhabilite totalement les vues des deux savants, René Descartes et Thomas Young, injustement mises à l'écart au profit d'explications complexes mettant en jeu la diffraction de la lumière, et incapables de ce fait de quantifier la luminosité,
- d'autre part, en pénétrant dans le mécanisme intime des phénomènes, elle permet de mieux appréhender les conditions photométriques de leur apparition.

Accessoirement, elle rend inutile le besoin d'aller consulter les textes traitant de ce sujet parus durant les années récentes, puisqu'elle ne fait appel qu'à des notions de Physique et de Mathématiques pratiquement connues de tous. Essentiellement, elle demande de bien savoir «voir dans l'espace».

En fait, la diffraction de la lumière intervient lors de l'étude de son effet sur de petits objets, comme le sont les gouttelettes de brouillard, qui n'ont pas été considérées ci-avant.

## BIBLIOGRAPHIE

- René DESCARTES : «*Les Météores*», Discourt huitième, 1637.
- Thomas YOUNG : Conférence du 24 novembre 1803, dans *Philosophical Transactions of the Royal Society* de l'année 1804, sur la loi générale des interférences.
- R. CHALOT : «*A propos du phénomène de l'arc-en-ciel*», B.U.P. n° 724, mai 1990.
- R. CHALOT : «*Une nouvelle approche pour l'arc-en-ciel*», C.R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série II, 1992, p. 159-161.
- R. CHALOT : «*Une mise à jour de la théorie de l'arc-en-ciel*», La Météorologie, septembre 1993, p. 18 à 25.