

**CALCUL, EN OPTIQUE QUANTIQUE,
D'INTERFERENCES LOCALISEES**
à l'aide du produit normal $E \wedge B$

Roger S. NATAF

Institut de physique nucléaire

91406 Orsay

Résumé

Comme il n'existe pas de densité de probabilité de présence en un point pour les photons, on calcule les interférences sur le plan d'observation par le flux à travers ce plan de $\vec{P}/\hbar\omega$, \vec{P} étant le vecteur de Poynting du champ électromagnétique, en électromagnétisme d'abord classique, puis quantique. Les résultats s'accordent lorsque l'opérateur quantique \vec{P} est un produit normal, comme il est nécessaire pour une probabilité d'absorption d'un photon.

**CALCULATION, IN QUANTUM PHYSICS, OF INTERFERENCE WITH THE
NORMAL PRODUCT $E \wedge B$**

Abstract : Since the density probability for a photon being present at a point do not exist, interferences on an observation plane are calculated by the flux of $\vec{P}/\hbar\omega$, \vec{P} being the Poynting vector, first in classical electromagnetism, and secondly in Q.E.D. Results agree when the operator \vec{P} is taken as a normal product, as foreseen for the absorption probability of one photon.

Fevrier 1994

INTRODUCTION

Bien que l'existence du corpuscule photon eût été postulée par Einstein dès 1905, et que la mécanique ondulatoire de Louis de Broglie ait proposé, dès 1924, le double caractère corpusculaire et ondulatoire de toutes les particules, le photon est resté un peu à part : il n'est pas possible de définir pour lui une densité de probabilité de présence en un point, comme pour une particule relativiste de Klein-Gordon (spin 0) ou de Dirac (spin $\frac{1}{2}$). [PEIERLS - 1979]. Cependant, il faut expliquer les expériences d'interférences du type Taylor réalisées dès 1910, où des photons tombent un à un sur un écran photosensible [MATHIEU - 1994] ou sur des compteurs de

photons. Ceci peut être fait avec une "interprétation par correspondance" du flux d'énergie lumineuse tombant sur un point de l'écran: ce flux divisé par l'énergie $h\nu$ d'un photon de l'onde (de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$) donne la probabilité d'impact par unité de temps d'un photon sur un petit élément de surface de l'écran.

Ceci suppose évidemment qu'un photon de l'onde ait une fréquence (donc une énergie) bien définie - ce qui est postulé pour toute particule ou tout système quantique de durée infinie. Tel est le cas d'un photon isolé, pour lequel on néglige la probabilité d'absorption par la matière ambiante pendant la durée d'une expérience.

La probabilité d'impact calculée ne correspond pas à un impact ponctuel, mais à un impact sur un "compteur" microscopique de dimension moléculaire ou atomique ($\sim 10^{-10}$ m).

Nous effectuons ce calcul de flux pour une onde monochromatique présentant deux faisceaux de directions un peu différentes (vecteurs d'onde \vec{k} et \vec{k}') et déphasés l'un par rapport à l'autre dans une expérience d'interférences du type "non localisées". Ces faisceaux issus d'un même point source initial suivent ensuite des chemins différents d'où résulte une différence de marche entre eux; ils viennent enfin éclairer les différents points d'un plan d'observation, soit directement, soit en interférant. L'exemple le plus simple est celui des franges de Young. L'expérience des miroirs de Fresnel est aussi de ce type (cf. figure 1): les directions de \vec{k} et \vec{k}' sont celles de \vec{AB} , $\vec{A'B}$.

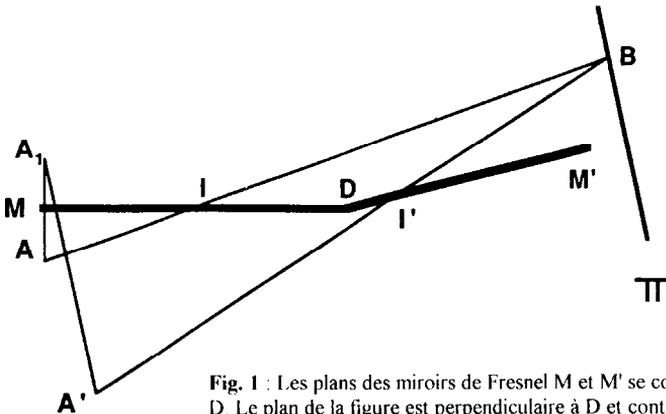


Fig. 1 : Les plans des miroirs de Fresnel M et M' se coupent suivant la droite D. Le plan de la figure est perpendiculaire à D et contient le point source A1. Les images de A1 dans les miroirs M et M' sont égales à AB et A'B respectivement. De même lorsque B se trouve hors du plan de la figure dans le plan d'observation Π perpendiculaire au plan de la figure et parallèle à AA', la différence de marche en B est A'B - AB.

Nous utiliserons d'abord, au paragraphe 1, le vecteur de Poynting \vec{P} du champ électromagnétique classique de ces ondes.

Ensuite, au paragraphe 2, est utilisé le vecteur de Poynting \vec{P} du champ électromagnétique quantique pris en valeur moyenne sur un état à un seul photon; cet état est cependant une superposition cohérente d'états \vec{k} et \vec{k}^* , soit $c_k | \vec{k} \rangle + c_{k^*} | \vec{k}^* \rangle$.

On obtient le même résultat qu'au paragraphe 1, conforme aux expériences classiques, si ${}^q \vec{P}$ est le produit normal $:{}^q \vec{E} \wedge {}^q \vec{B}$: des champs quantiques - Mais il est différent, et contraire à l'expérience, si l'on prend brutalement ${}^q \vec{E} \wedge {}^q \vec{B}$. Cet écart est lié à la différence des deux opérateurs $:{}^q \vec{E} \wedge {}^q \vec{B}$: et ${}^q \vec{E} \wedge {}^q \vec{B}$.

Le produit normal, dit de Wick, est utilisé dans tous les calculs perturbatifs de la théorie quantique des champs en interaction [JAUCH - 1955]. Il est également utilisé pour calculer une version de l'Hamiltonien quantique qui ne contient pas l'énergie de point zéro du vide complet $(\sum_k \hbar \omega_k)$: $H = \int {}^q P^0: d^3x$ où ${}^q P^0 = \frac{1}{2} (E^2 + B^2)$. (cf. par exemple: [ITZYKSON 1980], [NATAF 1988]). P^0 et P^j sont en fait les composantes T^{00} et T^{0j} du tenseur cinétique.

1 - Dans une onde électromagnétique sinusoïdale en représentation complexe, le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{P} = 1/2 (\vec{E}^* \wedge \vec{B} + \vec{E} \wedge \vec{B}^*) \tag{1}$$

Cette représentation est la même que celle des courants alternatifs sinusoïdaux, les champs réels instantanés étant :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E} + \vec{E}^*), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{B} + \vec{B}^*)$$

et les valeurs moyennes sur une longue durée étant seules retenues.

On suppose que $(\frac{\vec{E}}{\vec{B}})$ est un pur champ de radiation en jauge de Coulomb :

$$\vec{E} = \vec{E}_t \quad \text{transverse seulement} \quad (\text{div } \vec{E}_t \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_t = 0).$$

Les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{cases} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \omega \vec{A} \quad , \quad \text{où } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases} \tag{2}$$

d'où :

(*) \vec{E} et \vec{B} se trouvent dans l'échelle efficace où $\vec{E} \rightarrow \vec{E} \sqrt{2}$, $\vec{B} \rightarrow \vec{B} \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} \vec{E}^* \wedge \vec{B} = -i\omega \vec{A}^* \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{E} \wedge \vec{B}^* = i\omega \vec{A} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}^* \end{cases} \quad (3)$$

On obtient ainsi le vecteur \vec{P}' :

$$P'_j = \frac{j}{\hbar\omega}, \text{ dont le flux donne la probabilité d'impact d'un photon.}$$

Bien entendu, \vec{A} satisfait à l'équation de propagation :

$$\square \vec{A} = 0 \quad (4)$$

On obtient (avec $\hbar = 1$) :

$$P'_j = -\frac{i}{2} \sum_i A_i^* \nabla_j A_i - A_i \nabla_j A_i^* + \frac{i}{2} \sum_i A_i^* \nabla_i A_j - A_i \nabla_i A_j^* \quad (5)$$

Le second terme, soit (5.2), disparaît si l'on suppose, comme en théorie quantique des champs, que \vec{A} est nul en dehors d'un volume V ou que ce volume, cubique, est un élément d'un réseau périodique. De toute manière, il est le plus petit à cause de la transversalité (2).

Nous ferons les deux hypothèses suivantes :

→ 1. \vec{A} correspond à une onde plane, de vecteur d'onde \vec{k} , avec une polarisation parallèle à : $\vec{c} = c_1 \vec{\varepsilon}_1 + c_2 \vec{\varepsilon}_2$ où $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$ sont des vecteurs unités perpendiculaires à \vec{k} et entre eux (par exemple : $\vec{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon_{ijk} \vec{k}}{k}$), c_1, c_2 sont des nombres complexes.

Le terme (5.2) est alors nul puisque : $\sum c_i^* k_i = \sum c_i k_i = 0$.

En prenant pour \vec{A} la même normalisation qu'en théorie quantique :

$$\vec{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{V\omega}} \vec{c} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}, \text{ où } \omega = |\vec{k}| \text{ pour satisfaire à (4).}$$

Le premier terme de (5) est : $\frac{1}{V\omega} k_j \sum c_i^* c_i$

d'où :

$$\vec{P}' = \frac{1}{V} \frac{\vec{k}}{\omega} |\vec{c}|^2$$

En considérant un écran de surface S perpendiculaire au vecteur unité $\frac{\vec{k}}{\omega}$, le flux de \vec{P}' à travers l'écran est $\frac{S}{V}$ lorsque $|\vec{c}|^2 = 1$, c'est-à-dire qu'un photon traverse l'écran pendant le temps : $t = \frac{L}{c}$, où $L = \frac{V}{S}$.

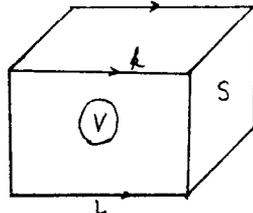


Figure 2

→ 1. 2 - \vec{A} correspond à la superposition de deux ondes planes :

$$\vec{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{V\omega}} \left[\vec{c} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{c}' e^{i \vec{k}' \cdot \vec{r}} \right]$$

avec : $\vec{c} \cdot \vec{k} = \vec{c}' \cdot \vec{k}' = 0$ et : $|\vec{c}|^2 + |\vec{c}'|^2 = 1$

Le terme principal de $(5')$ est alors :

$$\vec{P}_1 = \frac{1}{V\omega} \left[\vec{k} |\vec{c}|^2 + \vec{k}' |\vec{c}'|^2 + \frac{1}{2} (\vec{k} + \vec{k}') \cdot \left[\vec{c}' \cdot \vec{c} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} + \vec{c} \cdot \vec{c}' e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} \right] \right] \quad (6)$$

où le troisième terme de (6) est le terme d'interférence dépendant des déphasages entre c_1, c_2 et c'_1, c'_2 . Dans une expérience d'interférence classique, ces déphasages résultent de la différence de marche entre deux chemins optiques issus d'une même source initiale. Les directions de \vec{k} et \vec{k}' sont usuellement voisines, ce qui rend petit le terme (5.2) :

$$\vec{P}_2 = -\frac{1}{2V\omega} \left[(\vec{c}' \cdot \vec{k}) \vec{c}' e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} + (\vec{c} \cdot \vec{k}') \vec{c} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} + c \cdot c' \right]$$

Ce terme est nul avec des conditions aux limites du volume V.

Nota Bene - La variable \vec{r} dans (6) n'est pas la variable qui correspondrait à une position ponctuelle possible du photon, mais la conjuguée de Fourier du vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$.

Dans l'expérience de Fresnel les intensités des deux faisceaux sont égales : $|\vec{c}|^2 = |\vec{c}'|^2 = 1/2$, et ils ne sont pas polarisés : \vec{c}, \vec{c}' sont remplacés par les scalaires c, c' avec $c' = c e^{i\varphi}$ où : $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et le déphasage : $\varphi = k(A'B - AB)$.

Alors (6) donne l'éclairement de l'écran sur ΔS entourant B :

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{n} \Delta S = \frac{\Delta S}{2V} (\cos \theta + \cos \theta') (1 + \cos \varphi) \quad (6b)$$

\vec{n} vecteur unité normal à l'écran et $\theta = \widehat{\vec{k}, \vec{n}}$, $\theta' = \widehat{\vec{k}', \vec{n}}$.

2 - Calcul de l'interférence dans le cadre de l'électrodynamique quantique .

Le champ quantique $q_A^{\vec{r}}$ libre est défini par :

$$q_A^{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, s} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left[a_s(\vec{p}) \vec{\varepsilon}_s(\vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega_p t)} + h.c. \right] \quad (7)$$

où : $\omega_p = |\vec{p}|$, tandis que s désigne les deux valeurs possibles de polarisation pour \vec{p} fixé, $a_s(\vec{p})$ l'opérateur d'annihilation d'un photon de l'état $|\vec{p}, s\rangle$. La partie h.c, contenant les opérateurs de création correspondants s'écrit :

$$a_s^\dagger(\vec{p}) \vec{\varepsilon}_s(\vec{p}) e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega_p t)}$$

On peut écrire :

$$q_A^{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{A}_a + \vec{A}_a^\dagger) \quad (7')$$

\vec{A}_a contenant les opérateurs d'absorption et \vec{A}_a^\dagger les opérateurs de création. On remplace \vec{A} et \vec{A}^* du calcul classique du §1 par ces deux parties de $q_A^{\vec{r}}$ pour obtenir $q_P^{\vec{r}}$. A vrai dire, dans le calcul classique nous avions seulement retenu :

$$1/2(\vec{E}^* \wedge \vec{B}) \quad \text{et} \quad 1/2(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

les termes carrés s'annulant par une moyenne sur un temps long.

Ici, les termes carrés en \vec{A}_a produiraient l'annihilation de deux photons, ceux en \vec{A}_a^\dagger la création de deux photons, et nous nous intéressons seulement à ceux qui maintiennent constants les nombres de photons, et plus spécialement à ceux qui conservent l'état d'un photon de fréquence déterminée, photon qui est cependant une superposition cohérente de deux états de vecteurs d'onde \vec{k} et \vec{k}' et de plusieurs polarisations rectilignes :

$$\left. \begin{aligned} |p, h\rangle &\equiv \sum_{\vec{r}, r'} c_r |\vec{k}, r\rangle + c_{r'} |\vec{k}', r'\rangle \\ \text{avec : } \sum_{\vec{r}, r'} |c_r|^2 + |c_{r'}|^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Nous reprenons les résultats du §1 avec :

$$\begin{aligned} \vec{A} &\longrightarrow \vec{A}_a = \sum'_{\vec{p}, s} \frac{1}{\sqrt{V\omega_p}} a_s(\vec{p}) \vec{\varepsilon}_s(\vec{p}) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - \omega_p t)} \\ \vec{A}^\dagger &\longrightarrow \vec{A}_a^\dagger = \sum'_{\vec{q}, t} \frac{1}{\sqrt{V\omega_q}} a_t^\dagger(\vec{q}) \vec{\varepsilon}_t(\vec{q}) e^{-i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega_q t)} \end{aligned}$$

(*) Usuellement \vec{A}_a et \vec{A}_a^\dagger sont désignés par $\vec{A}^{(+)}$ et $\vec{A}^{(-)}$.

Le calcul de $\frac{1}{2} \vec{E}_a \wedge \vec{H}_a = -\frac{i\omega}{2} \vec{A}_a \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_a$
 conduit ici pour la composante j à :

$$P_{4j} = \frac{1}{2V} \sum \frac{\omega_q}{(\omega_p \omega_q)^{1/2}} p_j a_t^\dagger(\vec{q}) a_s(\vec{p}) \varepsilon_{si}(\vec{p}) \varepsilon_{ti}(\vec{q}) e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \quad (9)$$

De même à $1/2(\vec{E}_a \wedge \vec{H}_a)$ du §1 correspond un terme P_{2j} où \vec{A}_a^\dagger et \vec{A}_a sont interchangés et qui contient donc $a_s(\vec{p}) a_t^\dagger(\vec{q})$, tandis que $\vec{p} \leftrightarrow \vec{q}$ pour les autres facteurs.

Ainsi :

$$P_{2j} = \frac{1}{2V} \sum \frac{\omega_p}{(\omega_q \omega_p)^{1/2}} q_j a_s(\vec{p}) a_t^\dagger(\vec{q}) \varepsilon_{ti}(\vec{q}) \varepsilon_{si}(\vec{p}) e^{i(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{x}} \quad (10)$$

2.1 -

On utilise le produit normal de Wick pour ces expressions quadratiques des champs libres; les produits d'opérateurs de champs y sont écrits dans l'ordre normal : opérateurs d'absorption à droite, opérateurs d'émission à gauche, sans autre changement^(a). Alors on a le même produit $a^\dagger a$ dans (9) et (10).

Dans $\langle ph | : a^\dagger \vec{P} : | ph \rangle$, les seuls termes non nuls sont ceux en :

$\left. \begin{array}{l} a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) \\ a_r^\dagger(\vec{k}') a_r(\vec{k}') \end{array} \right\}$	termes "directs"	$\left. \begin{array}{l} \vec{p} = \vec{q} = \vec{k} \\ \vec{p} = \vec{q} = \vec{k}' \end{array} \right\}$
$\left. \begin{array}{l} a_r^\dagger(\vec{k}') a_r(\vec{k}) \\ a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}') \end{array} \right\}$	termes "d'échange"	$\left. \begin{array}{l} \vec{p} = \vec{k} \quad , \quad \vec{q} = \vec{k}' \\ \vec{p} = \vec{k}' \quad , \quad \vec{q} = \vec{k} \end{array} \right\}$

Ainsi :

$$\omega' \langle ph | : a^\dagger P_j : | ph \rangle = \frac{1}{V} \left(\sum_{\vec{k}} |a_r(\vec{k})|^2 k_j + \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} |c_r(\vec{k})|^2 k'_j \right) + \frac{1}{2V} \left[(\vec{c}^* \cdot \vec{c}) k_j e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}} + (\vec{c} + \vec{c}') k'_j e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{x}} + c c \right] \quad (6)'$$

redonne bien l'expression (6) de \vec{P}' dans §1.

(a) Pour les champs de fermions, ce changement d'ordre doit être accompagné d'un changement de signe.

2. 2 - Si l'on prend brutalement les produits d'opérateurs comme ils se présentent en passant du champ classique au champ quantifié ($a \rightarrow a$, $a^* \rightarrow a^\dagger$), avec les relations de commutation :

$$[a_s(\vec{p}), a_t^\dagger(\vec{q})] = \delta_{\vec{p}, \vec{q}} \delta_{st}$$

et si l'on remplace dans P_j :

$$a_s(\vec{p}) a_t^\dagger(\vec{q}) \quad \text{par} : \quad a_t^\dagger(\vec{q}) a_s(\vec{p}) + \delta_{\vec{p}, \vec{q}} \delta_{st}$$

on obtient les termes supplémentaires diagonaux :

$$+ \frac{1}{2V} k_j |\vec{c}|^2 + \frac{1}{2V} k'_j |\vec{c}'|^2$$

qui renforceraient les termes directs dans le rapport 3/2 par rapport aux termes directs précédents.

Mais ces derniers termes ne correspondent pas au problème posé. En effet, l'absorption d'un photon par l'écran correspond à l'amplitude de probabilité $a |ph\rangle$ - en simplifiant la notation, donc à la probabilité :

$$|a |ph\rangle|^2 = \langle ph | a^\dagger a |ph\rangle.$$

Alors que les termes précédents correspondent bien à ce produit normal en $a^\dagger a$, les derniers termes $\frac{1}{2} \langle ph | ph\rangle$ ne sont pas à considérer, ce qui s'accorde avec l'observation des interférences classiques. (1)

3 - Calculs analogues avec d'autres champs quantiques.

Pour les Bosons de spin 0 et les Fermions de Dirac, il n'est pas nécessaire de passer par le flux d'énergie, car le formalisme comporte un flux de probabilité de présence pour la particule, que l'on peut traiter directement : on peut définir le quadrivecteur densité - densité de courant pour la probabilité de présence. De là vient la différence avec le photon soulignée par R. Peierls.

Pour une onde de vecteur d'onde déterminé \vec{p} , le vecteur dont le flux correspond au nombre de particules est alors : $\frac{\vec{p}}{\psi_p} = \frac{\vec{v}}{v_p}$.

Le seul cas très analogue à celui du photon est relatif à un Boson neutre dont le champ scalaire est hermitique, soit : $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_a + \varphi_a^\dagger)$: les calculs sont beaucoup plus simples, mais parallèles aux calculs de ce travail.

¹⁾ Si l'on étudiait le gain d'un photon dans le vecteur d'état du champ électromagnétique $|\varphi_R\rangle$, on serait conduit à $|a^\dagger |\varphi_R\rangle|^2 = \langle \varphi_R | a a^\dagger | \varphi_R \rangle$ avec le produit antinormal, ce qui est exposé dans [COHEN-TANNOUJI 1988].

Conclusion

Pour le champ électromagnétique quantifié, comme pour les autres champs les interférences localisées sur un plan d'observation peuvent se calculer à l'aide de la valeur moyenne du flux d'un vecteur formé avec le produit normal de composantes du champ. Avec le photon, le carré normal du champ électrique est depuis longtemps utilisé [GLAUBER 1964] pour le calcul des intensités. Il est la partie agissante dans la densité d'énergie ρ , en première approximation. Glauber calcule les effets successifs de l'absorption du photon dans les atomes du compteur (en particulier la probabilité de la réémission). Ce carré normal est aussi utilisé pour le calcul des interférences. [COHEN-TANNOUJI 1987].

Pour la densité d'énergie $\frac{1}{2} \vec{E}_a^\dagger \vec{E}_a + \vec{E}_a \vec{E}_a^\dagger$: qui est utilisée au lieu du vecteur de Poynting, on trouve encore la même valeur que pour le champ classique en représentation complexe et valeurs efficaces :

$$\frac{1}{2} \vec{E}^* \vec{E} = \frac{\omega}{2V} [2|\vec{c}|^2 + (\vec{c}' \cdot \vec{c}) e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} + CC]$$

qui s'accorde avec (6)

En fait, la densité d'énergie comporte aussi :

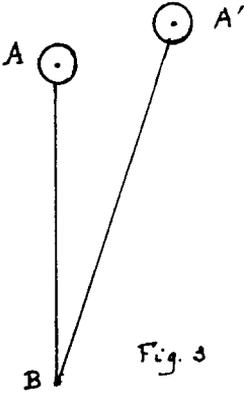
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{B}^* \vec{B} &= \frac{1}{2} (\vec{\nabla}_\perp \vec{A}^*) (\vec{\nabla}_\perp \vec{A}) = \frac{1}{2} \nabla^2 (\vec{A}^* \vec{A}) \\ &= -\frac{1}{2V} \frac{(\vec{k}-\vec{k}')^2}{\omega} [\vec{c}' \cdot \vec{c}) e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} + CC] \\ -\frac{(\vec{k}-\vec{k}')^2}{\omega} &= 2\omega (\cos \lambda - 1) \quad , \quad \text{où} : \lambda = (\vec{k}, \vec{k}') \end{aligned}$$

Ce terme est donc négligeable lorsque les directions \vec{k} et \vec{k}' sont voisines

D'autre part, les compteurs étudiés par Glauber ne sont guère sensibles au champ magnétique.

Appendice

Justification du déphasage $k(A'B - AB)$



1 - Il a été obtenu, comme en optique classique, en prenant deux trajets rectilignes $A'B$ et AB pour les amplitudes qui interfèrent; les amplitudes représentent le champ électrique réduit à un scalaire en l'absence de polarisation, ou, en lumière polarisée, une composante du champ électrique - si les faisceaux qui interfèrent peuvent garder la même polarisation au cours de leur préparation.

A l'instant $t=0$, il y a autour de A le paquet d'onde :

$$\psi(\vec{r}, 0) = N \theta(\sigma - r) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tag{A_1}$$

où \vec{r} est le vecteur coordonnée \vec{AM} , θ la fonction échelon de Heaviside, N un facteur de normalisation ($4\pi N^2 \frac{\sigma^3}{3} = 1$).

Pour le rayon σ de la boule remplie par le paquet d'ondes on prend $\sigma \ll \lambda$.

La transformée de Fourier triple de $\psi(\vec{r}, 0)$ est :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\vec{p}) &= \frac{N}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} \psi(\vec{r}, 0) \\ &= \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma r^2 dr \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{-i|\vec{p}-\vec{k}|r \cos \theta} \quad \text{où : } \theta = (\widehat{\vec{p}-\vec{k}}, \vec{r}) \\ &= \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma r^2 dr (e^{iqr} - e^{-iqr}) / iq \quad \text{avec : } q = |\vec{p}-\vec{k}| \\ &= N(2\pi)^{-3/2} \frac{2}{q} \int_0^\sigma r^2 dr \sin qr \equiv N(2\pi)^{-3/2} F(q) \tag{A_2} \\ F(q) &= \frac{2}{q^3} \left(-\sigma \cos q\sigma + \frac{\sin q\sigma}{q} \right) \end{aligned}$$

$|F(q)|$ devient très petite pour $q\sigma \gg 1$.

En effet :

$$F(q) = \frac{1}{q^2} \left[\frac{\sin q\sigma}{q\sigma} - \cos q\sigma \right] = \frac{1}{q} j_1(q\sigma)$$

$j_1(p)$ étant la fonction de Bessel habituelle ⁽¹⁾ $\sqrt{\frac{r}{r_0}} J_{3/2}(p)$

$$j_1(p) \sim \frac{1}{p} \cos p \quad \text{quand } p \rightarrow \infty$$

$\hat{p}(\vec{p})$ décroît donc comme $(q\sigma)^{-2}$

2 - En un autre point, voisin de B, et à l'instant $t > 0$, $\psi(\vec{r}, t)$ est obtenue en utilisant la fonction de Green retardée G , par le produit de convolution :

$$\psi(\vec{z}, t) = \int d^3r G(\vec{z} - \vec{r}, t) \psi(\vec{r}, 0)$$

Pour le champ électromagnétique réduit à un scalaire, G est :

$$\frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{r}|} \delta[|\vec{z} - \vec{r}| - t]$$

Plus simplement, la valeur de $\psi(\vec{z}, t)$ s'obtient en appliquant les opérations de translation spatiales et temporelle à $\psi(\vec{z}, 0)$ soit :

$$T(\vec{z} - \vec{r}, t) = e^{i(\vec{z} - \vec{r}) \cdot \vec{p} - i t E}$$

(\vec{P} et P_0 opérateurs infinitésimaux $-i\vec{p}$ et iE_0).

Pour chaque composante de Fourier $\hat{\psi}(\vec{p})$, l'effet de T est de la multiplier par : $e^{i(\vec{z} - \vec{r}) \cdot \vec{p} - i t E}$

où : $p = |\vec{p}|$, puisque ψ satisfait à l'équation de propagation : $\square \psi = 0$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \psi(\vec{z}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p e^{i(\vec{z} - \vec{r}) \cdot \vec{p} - i t E} e^{i\vec{r} \cdot \vec{p}} \hat{\psi}(\vec{p}) \\ &= C \int d^3p e^{i\vec{z} \cdot \vec{p} - i p t} F(\vec{p} - \vec{r}) \end{aligned}$$

Avec le changement de variable : $\vec{p} = \vec{k} + \vec{q}$

$$\psi(\vec{z}, t) = C \int d^3q e^{i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{z} - i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot t} F(\vec{q}) \tag{A_3}$$

(1)

$$j_1(p) = \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p^3}$$

Mécanique Quantique
Cohen-Tannoudji et al. page 933).

Mais $F(q)$ limite pratiquement l'intégrale (A_3) aux petites valeurs de q (voir les ordres de grandeur pratiques ci-après), de sorte que :

$$\vec{p}^2 = \vec{k}^2 + \vec{q}^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{q} \rightarrow p = (\vec{k}^2 + \vec{q}^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{q})^{1/2}$$

conduit à :

$$p \approx k \left[1 + \frac{q^2}{2k^2} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{q}}{k^2} \right]$$

ou :

$$p \approx k + \vec{k} \cdot \vec{q} + \frac{q^2}{2k}$$

avec : $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k}$ vecteur unité .

Portant ces valeurs dans (A_3) :

$$e^{i\vec{p} \cdot \vec{z} - i p t} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{z} - i k t - i \vec{k} \cdot \vec{q} t - i \frac{q^2}{2k} t}$$

D'où :

$$\psi(\vec{z}, t) \approx C e^{i\vec{k} \cdot \vec{z} - i k t} \int d^3q e^{i\vec{q} \cdot (\vec{z} - \vec{k} t)} e^{-i \frac{q^2}{2k} t} F(q) \quad (A_4)$$

avec le changement de variable $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ dans l'intégrale.

Ceci correspond bien à l'onde en représentation complexe du paragraphe 1 (p. 2)

L'intégrale de (A_4) , soit : $I(\vec{z} - \vec{k} t, t) = I(\vec{u}, t)$ est la transformée de Fourier triple du produit $e^{-i \frac{q^2}{2k} t}$ par $F(q)$, c'est-à-dire le produit de convolution des originales correspondantes, soit :

- pour $F(q)$: $\theta[\sigma - |\vec{z} - \vec{k} t|]$

- pour $e^{-i \frac{q^2}{2k} t}$ la Gaussienne :

$$g(\vec{z} - \vec{k} t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{z} - \vec{k} t)} e^{-i \frac{q^2}{2k} t} d^3q$$

En effet, l'intégrale : $\int e^{i\vec{q} \cdot \vec{u}} e^{-i \frac{q^2}{2k} t} d^3q = \prod_j \int_{-\infty}^{+\infty} dq_j e^{i q_j u_j} e^{-\frac{q_j^2}{2k} t}$

se transforme aisément par les changements de variables : $q_j \rightarrow q'_j = q_j + \frac{u_j}{t}$

donnant : $e^{-\frac{i k}{2t} \vec{u}^2} \prod_j \int dq'_j e^{-\frac{i k}{2t} q'^2} = (-2i\pi \frac{k}{t})^{3/2} e^{\frac{3i k}{2t} \vec{u}^2}$

Ces résultats montrent que le centre du paquet d'ondes se déplace suivant la droite parallèle à \hat{k} avec la vitesse c . Le produit de convolution :

$$\theta[\sigma - |\vec{z} - \vec{k} t|] \otimes e^{i \frac{k}{2t} (\vec{z} - \vec{k} t)^2}, \text{ ou : } \int d^3z' e^{i \frac{k}{2t} (\vec{z} - \vec{z}')^2} \theta[\sigma - |\vec{z}' - \vec{k} t|]$$

conduit à un "étalement" du paquet d'ondes, mais cet "étalement" est

purement complexes : $(\vec{x} - \vec{x}')^2 \sim i \frac{ct}{k}$, et ne peut pas conduire à une fonction de corrélation $\psi(\vec{x}_1, t_1) \psi^*(\vec{x}_2, t_2)$ éventuellement non nulle pour certaines valeurs telles que $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| > c(t_2 - t_1)$, ce qui pourrait arriver si le paquet d'ondes initial était une gaussienne réelle en $\exp\left[-\frac{(\Delta \vec{x})^2}{2\delta^2}\right]$ (1)

Un calcul analogue peut être effectué pour le paquet d'ondes provenant de A' à l'instant $t' < t$:

$$\psi'(\vec{r}', t') = N \theta(\sigma - r') e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}' - i k t'}$$

\vec{r}' étant relatif à A' : $\vec{r}' = \vec{r} - A \vec{A}'$

et : $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k$

(A₃) est remplacé par :

$$\psi'(\vec{r}, t) = C \int d^3q' e^{i(\vec{k}' + \vec{q}') \cdot \vec{r} - i(k' + q')(t-t')} F(q')$$

avec ici :

$$\vec{p} = \vec{k}' + \vec{q}'$$

$$|\vec{k}' + \vec{q}'| = k + \vec{k}' \cdot \vec{q}' + \frac{q'^2}{2k}$$

$$\begin{aligned} \psi'(\vec{r}, t) &= C e^{-i k t'} \int d^3q' e^{i(\vec{k}' + \vec{q}') \cdot \vec{r} - i(k + \vec{k}' \cdot \vec{q}' + \frac{q'^2}{2k})(t-t')} F(q') \\ &= C e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r} - i k t} \int d^3q' e^{i\vec{q}' \cdot [\vec{r} - \vec{k}'(t-t')] - i \frac{q'^2}{2k}(t-t')} F(q') \quad (A_5) \end{aligned}$$

Ici, le centre du paquet d'ondes se déplace parallèlement à \hat{k}' avec la vitesse c . Pour une valeur fixée du vecteur \vec{q}' dans l'intégrale de

(A₄) et (A₅) on a un déphasage relatif : $-\vec{q}' \cdot \hat{k}' t + \vec{q}' \cdot \vec{k}'(t-t')$

c'est-à-dire $q[-t \cos \theta + (t-t') \cos \theta']$, où θ et θ' sont les angles de \vec{q}'

avec \vec{k} et \vec{k}' . Comme ces directions sont très voisines, ce déphasage est sensiblement $-q t' \cos \theta$, correspondant à la différence de temps t' ,

ce qui donne la différence de marche $k(A'B - A'B)$ pour les ondes totales

ψ et ψ' .

(1) δ étant alors (à $t = 0$) l'écart quadratique moyen, il devient à l'instant t : $(\delta^2 + \frac{c^2 t^2}{k^2})^{1/2}$.

Finalement, vérifions que $F(q)$ coupe les valeurs de q de manière qu'elles restent petites devant celles de k pour des interférences réalisées en lumière visible : $q\sigma \sim 1$ pour $q \sim \sigma^{-1} = 10 \text{ cm}^{-1}$, tandis que, pour $\lambda = 0,6 \mu$, $k = \frac{\lambda}{2\pi} = 0,1 \mu = 10^{-5} \text{ cm}$ d'où : $k = 10^5 \text{ cm}^{-1}$, et $\frac{q}{k} \sim 10^{-4}$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- R.E. PEIERLS - Surprises in theoretical physics - page 10 -
Princeton University Press - 1979
- J.P. MATHIEU - Histoire de la Physique - Tome 2 - page 52 -
Lavoisier Tec et Doc - 1991
- J.M. JAUCH et F.ROHRLICH - Theory of photons and electrons -
Addison - Wesley publishing Co. - 1955
- C. ITZYKSON et J.B. ZUBER - Quantum field theory -
Mc Graw Hill - 1980
- R. NATAF - Introduction à la Physique des particules - page 108 -
Masson - 1988
- C. COHEN-TANNOUJJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG - Photons et Atomes -
Introduction à l'électrodynamique Quantique - page 209 -
Editions du C.N.R.S. - 1987
- R.J. GLAUBER - Optique et Electronique Quantiques -
Gordon and Breach - Les Houches 1964
- C. COHEN-TANNOUJJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG - Processus
d'interaction entre photons et atomes - page 132-
Editions du C.N.R.S. - 1988