

LA CONVERSION D'ENERGIE ELECTROMECHANIQUE

D. Gaude

**laboratoire d'électrotechnique
et d'électronique de puissance**

Université de Lyon I

Résumé: Les machines électriques tournantes cachent sous une grande variété de types, une unité structurelle très poussée qui a fait concevoir, il y a quelques années, une théorie unifiée des convertisseurs électromagnétiques tournants non saturés. Ces modèles engendrent aujourd'hui des applications technologiques importantes, comme la possibilité d'utiliser le moteur électrique asynchrone triphasé (le moteur le plus usuel en milieu industriel) en lieu et place de la machine à collecteur, dans une de ses applications spécifiques: la conversion électromécanique à vitesse variable.

Introduction: Les machines électriques tournantes sont constituées de circuits électriques et d'un circuit magnétique. Les circuits électriques sont des bobines (q bobines comportant N_j spires, j variant de 1 à q) parcourues par des courants continus ou variables. Ces bobines enlacent un circuit magnétique, ensemble continu de milieux ferromagnétiques ou non, dont la partie fixe constitue le stator et la partie mobile, le rotor. Entre stator et rotor, un milieu non ferromagnétique joue un grand rôle. C'est l'entrefer; presque toute l'énergie électromagnétique y est stockée. Rotor et stator sont constitués de milieux ferromagnétiques saturables; leur perméabilité μ_r est variable avec les courants passant dans les circuits électriques. Ces machines sont des convertisseurs électromagnétiques et obéissent, à ce titre aux équations de Maxwell. Ces équations locales fixent les relations entre les vecteurs champs, à chaque instant et en chaque point du système physique.

I - Les équations de Maxwell dans une machine

1 - Par rapport aux équations locales générales,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

il y a lieu d'apporter des remarques et des simplifications.

Le vecteur champ électrique \vec{E} est un champ électromoteur.

La présence de milieux magnétiques nécessite d'utiliser deux vecteurs pour le magnétisme : Le champ magnétique \vec{H} et l'induction magnétique \vec{B} .

Les milieux magnétiques sont homogènes et isotropes et éventuellement saturables :

$$\vec{B} = \mu_r(H) \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (2)$$

Le champ électrique et le vecteur densité de courant sont reliés par la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3)$$

où σ désigne la conductibilité électrique du milieu .

L'équation $\text{div}(\vec{B}) = 0$ traduit la conservation du flux Φ de l'induction magnétique à travers toute section du circuit magnétique .

Le vecteur $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ peut être négligé devant \vec{j} car les fréquences usuelles des phénomènes présentés ici sont faibles.

L'équation $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$ traduit le théorème d'Ampère.

2 - Le circuit magnétique

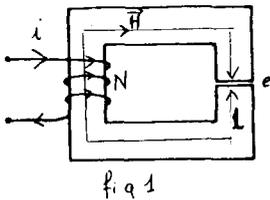


figure 1 :
circuit magnétique élémentaire

Une situation-type d'application du théorème d'Ampère est représentée par le problème suivant : Un tore, de longueur moyenne l , est composé d'un milieu ferromagnétique de perméabilité μ , dans lequel est ménagé un entrefer étroit de longueur e ($e \ll l$) ; sur ce tore est bobiné un enroulement à N spires parcourues par un courant d'intensité i (voir figure 1).

On applique le théorème d'Ampère sur une ligne de champ moyenne, fermée et orientée dans le sens sud-nord de la bobine lorsqu'elle passe dans la bobine.

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\text{fer}} l + H_{\text{air}} e = Ni$$

Si l'entrefer est étroit, les lignes de champ ne divergent pratiquement pas à la sortie de la partie ferromagnétique du circuit . La section du circuit magnétique ne varie pas.

$$\Phi = B_{\text{air}} S = B_{\text{fer}} S$$

$$B_{\text{air}} = B_{\text{fer}}$$

$$B_{\text{air}} = \mu_0 H_{\text{air}}$$

$$B_{\text{fer}} = \mu_{\text{fer}} H_{\text{fer}}$$

Pour résoudre analytiquement le problème, il faut ici faire l'hypothèse supplémentaire de la *linéarité du milieu ferromagnétique* : $\mu_r = \text{cte}$. Dans ce cas :

$$\frac{B_{\text{fer}}}{\mu_{\text{fer}}} l + \frac{B_{\text{air}}}{\mu_0} e = Ni$$

$$\frac{\Phi}{S \mu_0} \left(e + \frac{l}{\mu_r} \right) = Ni$$

En électrotechnique, on appelle *force magnétomotrice ε (f.m.m.)*, la circulation du vecteur champ magnétique le long du circuit magnétique.

Cette définition rappelle celle de la force électromotrice, circulation du vecteur champ électrique le long d'un circuit électrique filiforme.

La f.m.m. s'exprime en fonction du courant i par

$$\varepsilon = Ni \quad (4) \quad (\text{unité: A})$$

On appelle *réductance* du circuit magnétique R le rapport:

$$R = \frac{\varepsilon}{\Phi} \quad (5) \quad (\text{unité: H}^{-1})$$

et *perméance* du circuit magnétique P :

$$P = \frac{1}{R} \quad (6) \quad (\text{unité: H})$$

Si le milieu magnétique n'est plus linéaire, P dépend de ε .

La relation entre le flux magnétique et la force magnétomotrice n'est plus linéaire :

$$\Phi = P(\varepsilon) \varepsilon \quad (7)$$

L'énergie électromagnétique stockée dans le circuit magnétique avec la densité volumique $f = \frac{B^2}{2\mu}$ se retrouve donc principalement dans l'entrefer lorsque ce circuit est peu saturé et lorsque $\mu \gg \mu_0$.

L'entrefer va donc jouer un rôle prépondérant dans la conversion électromécanique.

Si l'on peut considérer que la section des spires de la bobine, qui enlacent le circuit magnétique, est la même que celle du circuit magnétique, ou bien qu'il n'y a pas de flux hors du circuit magnétique (pas de fuite), le flux magnétique total à travers la bobine est:

$$\Psi = N\Phi$$

$$\Psi = N \cdot P(\epsilon)\epsilon = P(\epsilon)N^2 i$$

L'inductance propre de la bobine est alors :

$$L(\epsilon) = P(\epsilon)N^2 \quad (8)$$

En cas de non linéarité du circuit magnétique, L n'est pas constante.

3 - Le circuit électrique

L'équation de Maxwell $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ traduit localement la loi de Faraday et la loi de Lenz. Elle permet de relier la f.e.m. dans les bobinages du circuit électrique au flux magnétique total Ψ .

Soit la $j^{\text{ème}}$ bobine (C_j) parmi les q bobines enlaçant le circuit magnétique. la f.e.m. e_j dans cette bobine est obtenue par:

$$e_j = \oint_{C_j} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -N_j \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi_j}{dt}$$

La loi d'Ohm généralisée appliquée à la bobine C_j donne:

$$u_j = r_i j - e_j = r_i j + \frac{d\Psi_j}{dt}$$

Le bobinage j est en interaction électromagnétique avec les autres bobinages par l'intermédiaire du circuit magnétique:

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^q L_{jk} i_k$$

L_{jj} désigne l'inductance propre de la bobine j ; L_{jk} désigne l'inductance mutuelle entre les bobines j et k .

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^q L_{jk} i_k \right) = \sum_{k=1}^q \frac{dL_{jk}}{dt} i_k + \sum_{k=1}^q L_{jk} \frac{di_k}{dt}$$

$$e_{jt} = - \sum_{k=1}^q L_{jk} \frac{di_k}{dt} \quad (9) \text{ et } (10)$$

$$e_{jr} = - \sum_{k=1}^q \frac{dL_{jk}}{dt} i_k$$

e_{jt} est la f.e.m. de transformation et e_{jr} est la f.e.m. de mouvement (le plus souvent de rotation)

Remarque:

La variation éventuelle de l'entrefer au cours de la rotation, modifie la perméance du circuit magnétique. les inductances propres L_{jj} varient alors au cours du temps, indépendamment de la saturation magnétique et leur dérivée par rapport au temps n'est pas nulle.

L'anisotropie du circuit magnétique "vu" par une bobine entraîne la variation de l'inductance de cette bobine au cours de la rotation.

Considérons le convertisseur suivant (voir figure 2), qui pourrait modéliser une machine synchrone monophasée.

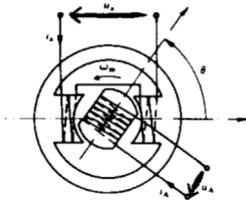


figure 2: convertisseur électromagnétique à entrefer variable

Au cours de la rotation, le circuit magnétique "vu" par le stator est à entrefer variable. L'inductance de la bobine statorique est variable. La fonction $L_s(\theta)$, périodique, est décomposable en série de Fourier et présente des harmoniques pairs.

II - Création de la f.m.m. dans une machine tournante.

1 - On considère une machine tournante dont le circuit magnétique est anisotrope vis à vis du rotor et du stator, à l'arrêt. A la périphérie du rotor, se place un bobinage qui, lorsqu'il est parcouru par un courant, crée un champ magnétique, dont les lignes fermées traversent le rotor, une partie du stator et deux fois l'entrefer.

Le bobinage prend place dans des encoches taillées à la périphérie du rotor. Il en est de même pour le stator. Ce double encochage rend, en fait, le circuit magnétique anisotrope. Mais dans une première approximation, on néglige cet effet. L'entrefer peut être considéré comme un espace étroit entre deux cylindres coaxiaux.

Dans un premier temps, on considère que le bobinage statorique n'est pas alimenté.

Le bobinage rotorique est placé dans deux encoches diamétralement opposées (figure 3). La bobine à N spires, que l'on crée ainsi, possède, en coupe radiale, un axe de symétrie, que l'on appellera *axe magnétique* du rotor.

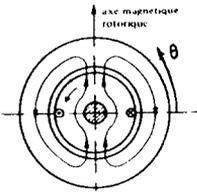


figure 3: bobine rotorique diamétrale

On calcule le champ magnétique dans le circuit magnétique, par le théorème d'Ampère en suivant une ligne de champ. Celle-ci traverse deux fois l'entrefer perpendiculairement aux surfaces latérales des cylindres rotoriques et statoriques.

Dans ce calcul classique, on suppose la perméabilité du milieu ferromagnétique très grande et même infinie. Le fer n'est donc pas saturé.

Cette dernière hypothèse permet d'écrire que:

$$H_{\text{fer}} = \frac{B_{\text{fer}}}{\mu} \rightarrow 0$$

$$B_{\text{fer}} \neq 0 \quad \text{car} \quad \Phi_{\text{fer}} = \Phi_{\text{air}} \neq 0$$

$$H_{\text{air}}(\theta)e + H_{\text{air}}(-\theta)e + H_{\text{fer}}|_{\text{fer}} = Ni$$

par raison de symétrie,

$$H(\theta) = H(-\theta) \quad \text{en module}$$

$$2 H_{\text{air}}(\theta) = \frac{Ni}{e}$$

En coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < \theta < \pi \quad \vec{H}(\theta) &= \frac{Ni}{2e} \vec{u}(\theta) \\ \text{si } \pi < \theta < 2\pi \quad \vec{H}(\theta) &= -\frac{Ni}{2e} \vec{u}(\theta) \\ \varepsilon(\theta) &= \vec{H}(\theta) \cdot e \vec{u}(\theta) \end{aligned}$$

est la f.m.m. dans l'entrefer

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < \theta < \pi \quad \varepsilon(\theta) &= \frac{Ni}{2} \\ \text{si } \pi < \theta < 2\pi \quad \varepsilon(\theta) &= -\frac{Ni}{2} \end{aligned}$$

On remarque que la f.m.m. ne dépend pas de la largeur de l'entrefer. C'est donc cette notion de f.m.m. qui est généralisable aux machines à entrefer variable. Elle sera privilégiée, le plus souvent, dans la suite, par rapport à la notion de champ magnétique.

La f.m.m. dans l'entrefer de cette machine à bobine diamétrale est périodique dans l'espace; sa période est 2π .

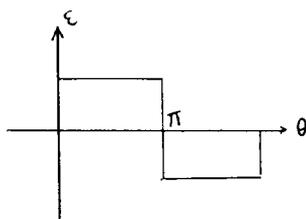


figure 4 f.m.m. dans l'entrefer d'une machine à bobine diamétrale

La répartition des spires dans une seule encoche n'est pas rationnelle, ne serait-ce que par le fait que l'espace disponible dans une encoche est réduit. De plus, la répartition de la f.m.m., périodique dans l'espace, présente de nombreux harmoniques, que l'on cherche à minimiser.

On répartit les spires sur un grand nombre d'encoches régulièrement réparties sur la périphérie du rotor.

Compte tenu des symétries, le rotor se comporte toujours comme un solénoïde, dont l'axe magnétique fait un angle $\theta = \pi/2$ avec l'axe du repère.

On obtient ainsi un rotor bipolaire (un pôle nord et un pôle sud) (voir figure 5).

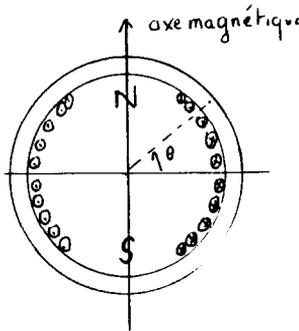


figure 5: rotor bipolaire

Pour un très grand nombre d'encoches, la distribution de f.m.m. le long de l'entrefer se rapproche d'une sinusoïde. On dit alors que le champ ou la f.m.m. est à répartition sinusoïdale (voir figure 6, x est l'abscisse curviligne de l'entrefer).

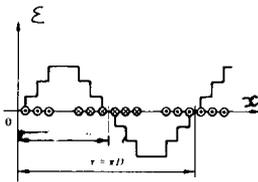


figure 6: distribution bipolaire de f.m.m. à répartition quasi-sinusoïdale

Pour obtenir un couple de moment plus grand, on tend à multiplier le long de l'entrefer le nombre de bobines identiques à la précédente. On augmente ainsi le nombre p de paires de pôles.

La distribution de f.m.m. est donc répétée p fois le long de l'entrefer. La période angulaire spatiale des pôles est $2\pi/p$ (voir figure 7).

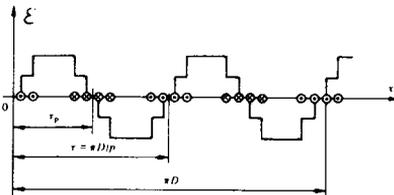


figure 7: distribution multipolaire de f.m.m. à répartition quasi sinusoïdale

L'angle πp est le pas polaire angulaire mécanique.

L'angle π est le pas polaire d'une machine bipolaire équivalente; on le qualifie de pas polaire électrique.

Dans ce qui suit, on considère des *angles et des vitesses angulaires électriques et mécaniques*. Entre ces grandeurs, on trouve toujours les relations suivantes:

$$\theta_{\text{méca}} = \frac{\theta_{\text{elec}}}{p} \quad \omega_{\text{méca}} = \frac{\omega_{\text{elec}}}{p} \quad (11)$$

Le rotor, tel qu'il a été décrit, sous sa forme bipolaire ou multipolaire existe bien tel quel; il constitue une roue polaire.

Faisons maintenant tourner cette roue polaire autour de son axe.

2 - F.m.m. tournante et f.m.m. pulsante

a) On raisonne sur une machine multipolaire (p paires de pôles), dont l'enroulement rotorique crée dans l'entrefer, de largeur constante, une f.m.m. à répartition spatiale sinusoïdale; l'enroulement rotorique est parcouru par un courant continu d'intensité i .

La roue polaire tourne à la vitesse angulaire (mécanique) Ω constante correspondant à une fréquence de rotation (en tour.s⁻¹): $n = \Omega/2\pi$.

Un point de l'entrefer voit défiler les pôles du rotor à cette fréquence temporelle.

Mais la fréquence de passage d'un pôle nord devant un point de l'entrefer est :

$$f = pn.$$

On appelle fréquence de synchronisme cette fréquence.

La f.m.m. en un point de l'entrefer présente une double périodicité:

- temporelle : fréquence f
- spatiale: période $2\pi/p$

On est donc en présence d'une onde progressive de f.m.m. ou f.m.m. tournante, qui, dans le cas sinusoïdal s'écrit:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta, t) &= \bar{\varepsilon} \cos(2\pi p n t \pm 2\pi \frac{\theta}{2\pi/p}) \\ \varepsilon(\theta, t) &= \bar{\varepsilon} \cos(\omega t \pm p\theta) \quad (12) \\ \omega &= p\Omega \end{aligned}$$

Ω est la pulsation mécanique, c'est à dire la vitesse angulaire mécanique du rotor. Comme il a été convenu plus haut (relation (11)), ω est donc la pulsation électrique.

Considérons deux ondes précédentes se propageant en sens inverses . La f.m.m. résultante en un point de l'entrefer est une onde stationnaire ou f.m.m. pulsante d'expression :

$$\varepsilon(\theta, t) = 2\hat{\varepsilon} \cos(\omega t) \cos(p\theta)$$

b) On peut aussi créer une f.m.m. pulsante ou tournante à l'aide d'un bobinage fixe (statorique)

Considérons un bobinage bipolaire statorique, donc fixe . On pourrait aussi, de même considérer un bobinage bipolaire rotorique, par rapport à un référentiel tournant lié au rotor.

Ce bobinage crée dans l'entrefer une f.m.m. dont la courbe représentative est une courbe en escalier (figure 8).

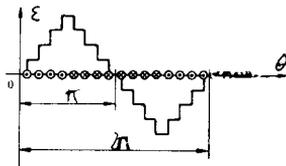


figure 8 : f.m.m. créée par un bobinage multipolaire fixe, dans l'entrefer

La décomposition en série de Fourier de cette fonction conduit à :

$$\varepsilon(\theta, t) = \hat{\varepsilon}_1 \sin\theta + \hat{\varepsilon}_3 \sin(3\theta) + \dots + \hat{\varepsilon}_{2k+1} \sin((2k+1)\theta) + \dots$$

Chaque terme ε_j dépend du courant i qui parcourt les spires du bobinage.

Considérons le terme fondamental de $\varepsilon(\theta, t)$ et supposons que le bobinage est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal monophasé de pulsation ω .

$$\varepsilon_i(\theta, t) = k_1 i \sin(\theta)$$

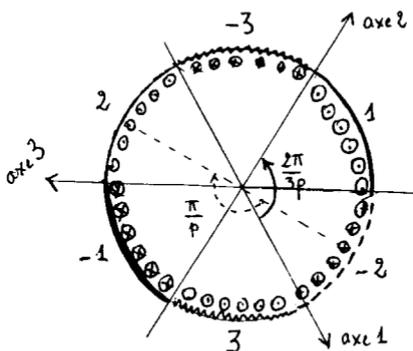
$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$$

$$\varepsilon(\theta, t) = k_1 \hat{I} \sin(\omega t) \sin(\theta)$$

L'onde de f.m.m. est stationnaire. Un bobinage fixe, alimenté par un courant sinusoïdal monophasé produit une f.m.m. pulsante. Il en est de même pour les harmoniques d'espace.

Considérons maintenant un bobinage bipolaire polyphasé à q phases. Celui-ci est constitué de q bobinages bipolaires monophasés décalés d'un angle (électrique) de $2\pi/q$ dans l'espace (voir figure 9, cas du triphasé).

Les courants alimentant les bobinages sont des courants polyphasés équilibrés, donnés par les expressions suivantes:



$$i_1 = \hat{I} \cos(\omega t)$$

$$i_2 = \hat{I} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{q})$$

$$i_3 = \hat{I} \cos(\omega t - 2 \cdot \frac{2\pi}{q})$$

.....

$$i_q = \hat{I} \cos(\omega t - (q-1) \cdot \frac{2\pi}{q})$$

figure 9 : répartition des bobines d'un enroulement statorique bipolaire, triphasé ($p = 1$)

Chaque fmm pulsante, due à chaque courant monophasé, s'écrit en tenant compte de la décomposition relative aux harmoniques d'espace:

phase k :

$$\varepsilon_k(\theta, t) = \sum_j \hat{\varepsilon}_j \sin[j(\theta - (k-1) \frac{2\pi}{q})] \cos(\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{q})$$

La f.m.m. totale est la somme des fmm dues à chaque phase (linéarité du théorème d'Ampère).

Pour le terme fondamental:

$$\varepsilon_1(\theta, t) = \frac{q}{2} \hat{\varepsilon}_1 \sin(\theta - \omega t)$$

Un enroulement bipolaire polyphasé parcouru par un système de courants polyphasés équilibré de pulsation ω , produit une f.m.m. tournant par rapport à lui à la vitesse angulaire de synchronisme : $\Omega_{\text{synchro}} = \omega$ (Th de Galileo Ferraris)

Si le bobinage est en plus multipolaire à p paires de pôles :

$$\Omega_{\text{synchro}} = \frac{\omega}{p}$$

Cas des harmoniques d'espace : Les harmoniques de la f.m.m. donnent des ondes pouvant tourner dans le sens direct ou dans le sens inverse. chaque harmonique j a sa propre vitesse angulaire de synchronisme:

$$\Omega_{j \text{ synchro}} = \frac{\omega}{p \cdot j}$$

Dans une machine à courant alternatif, le bobinage statorique multipolaire (p paires de pôles), le plus souvent triphasé, alimenté par un système de courants triphasés équilibré adéquat de pulsation ω , crée une f.m.m. tournant à la vitesse de synchronisme $\Omega_s = \omega/p$.

Tout se passe comme si le stator créait un ensemble de pôles alternativement nord et sud rigide, tournant à la vitesse de synchronisme. le couple électromagnétique trouve son origine dans l'interaction entre les systèmes de pôles tournants statoriques et rotoriques.

En raisonnant ainsi, on peut se demander comment peut fonctionner une machine à courant continu, dont le stator, alimenté en courant unidirectionnel crée une f.m.m. immobile dans l'entrefer. Sans modification, par rapport à une machine à courant alternatif, un pôle rotorique ne peut qu'osciller autour d'un pôle statorique fixe.

La modification à apporter consiste à changer la nature (nord ou sud) du pôle rotorique au moment adéquat pour créer un couple optimal. C'est le rôle du collecteur. (voir figure 10)

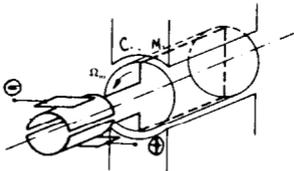


figure 10: principe d'une machine à collecteur

Le système bipolaire crée dans l'entrefer une distribution de f.m.m., non sinusoïdale, représentée par la courbe ci-dessous.

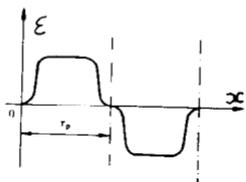


figure 11: distribution de f.m.m. dans l'entrefer d'une machine à collecteur.

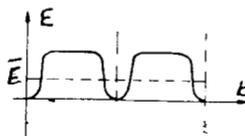


figure 12: fem d'une machine à collecteur

La f.e.m. induite de rotation aux bornes de la spire est alternative, non sinusoïdale.

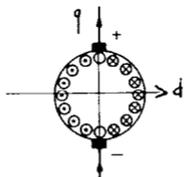
L'adjonction d'un collecteur, constitué de deux demi-bagues isolées entre elles réalise le redressement mécanique de la f.e.m. ; le zéro de la f.e.m. correspond à l'instant de la commutation.

Dans une machine réelle, un grand nombre de spires distribuées dans des encoches réparties et reliées à un collecteur à plusieurs lames permet d'obtenir une f.e.m. induite pratiquement constante au cours du temps. Le courant arrivant au collecteur est unidirectionnel. Il n'en est pas de même du courant dans les spires de l'enroulement rotorique, qui change de sens afin de modifier la nature (sud-nord) des pôles. L'ensemble des courants statoriques et rotoriques créent une f.m.m. immobile.

En particulier, *la rotation du rotor n'engendre aucun effet d'induction au stator.*

Pour le stator, vis à vis des phénomènes d'induction électromagnétiques, tout se passe comme si le rotor était immobile.

L'enroulement rotorique est dit *pseudo-stationnaire*. Il est analogue à un solénoïde dont l'axe coïncide avec l'axe des balais.



Cet axe est orthogonal à l'axe nord-sud du bobinage statorique.

La machine possède donc deux axes privilégiés en quadrature. (voir figure ci-contre)

La machine à courant continu est certes d'un abord théorique plus difficile.

Mais l'intérêt de l'étude sommaire effectuée au paragraphe précédent réside dans le fait que toute machine électrique peut être ramenée après une transformation mathématique adéquate à une machine à enroulements pseudo-stationnaires agissant selon deux axes en quadrature. Ceci constitue la base de la théorie unifiée des machines électriques.

III - Une machine électrique est un système thermodynamique.

Les machines électriques peuvent être classées en deux catégories.

Les machines à entrefer constant (à l'encochage près), ou machines à pôles lisses.

Les machines à entrefer variable ou machines à pôles saillants

Dans une machine à entrefer constant, le circuit magnétique est isotrope, au voisinage de l'entrefer. Les inductances propres des bobinages sont constantes au cours de la rotation du rotor, pour ce qui concerne les facteurs géométriques dont dépendent la perméance.

Les inductances peuvent varier lorsque la perméabilité du fer varie. La variation d'inductance qui en résulte n'est pas simple à modéliser, le phénomène n'étant pas linéaire.

Dans une machine à pôles lisses, le couple provient de l'interaction entre les pôles tournants ou pseudo-stationnaires statoriques et rotoriques.

Dans une machine à entrefer variable, le couple provient en plus de la variation géométrique de la perméance. On parle de *couple réticent*.

1 - Energie libre et coénergie

Pour les raisonnements énergétiques qui suivent, **la machine est motrice**. Elle reçoit de l'énergie électrique W_{el} de la part de l'extérieur qu'elle transforme en travail W_m , en chaleur Q , les inévitables pertes. Une partie de l'énergie est stockée dans le circuit magnétique, sous forme d'énergie électromagnétique W_{em} .

W_{el} , W_m et Q sont des formes d'énergie non stockables ou dites de transfert.

Le bilan d'énergie élémentaire, en valeur absolue, est donné par:

$$\delta W_{el} = \delta W_m + \delta Q + dW_{em} \quad (13)$$

Après intégration entre deux états A et B

$$W_{el\ A \rightarrow B} = W_{m\ A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B} + W_{em}(B) - W_{em}(A) \quad (14)$$

L'énergie stockée W_{em} apparaît comme l'énergie libre du système : F.

Le bilan élémentaire est traduit par :

$$dF = \delta W_{el} - \delta W_m - \delta Q \quad (15)$$

On considère une machine bipolaire. l'étude physique se ramène à l'interaction entre une bobine fixe et une autre mobile . Le problème est à un degré de liberté et paramétré par l'angle θ qui est ici un angle électrique.

Pour ne pas masquer le phénomène important, la conversion électromécanique, on néglige dans la suite toute dissipation d'énergie sous forme de chaleur.

$$\begin{aligned} \delta W_{el} &= u_s i_s dt + u_r i_r dt = -e_s i_s dt - e_r i_r dt \\ -e_s &= \frac{d\Psi_s}{dt} \\ -e_r &= \frac{d\Psi_r}{dt} \\ \delta W_{el} &= d\Psi_s i_s + d\Psi_r i_r \\ \delta W_m &= C_{em} d\theta \\ dF &= d\Psi_s i_s + d\Psi_r i_r - C_{em} d\theta \\ C_{em} &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{\Psi_s, \Psi_r} \end{aligned}$$

C_{em} désigne le couple électromagnétique.

Celui-ci apparaît comme l'opposée de la dérivée partielle de l'énergie libre par rapport à l'angle, dérivation effectuée à flux constant. Le calcul du moment du couple est aisé lorsque le problème fait apparaître explicitement les flux.

Quelle est l'expression de F?

Considérons une transformation énergétique d'un état A vers un état B pendant laquelle le rotor est arrêté ($d\theta = 0$) . L'énergie est défini à une constante additive près ; on prend donc $F(A) = 0$.

$$\begin{aligned} dF &= i_S d\psi_S + i_R d\psi_R \\ F &= \int_{\psi_{sA}}^{\psi_{sB}} \int_{\psi_{rA}}^{\psi_{rB}} i_S d\psi_S + i_R d\psi_R \end{aligned} \quad (15)$$

La saturation magnétique empêche de terminer analytiquement ce calcul. Une solution numérique ou graphique est envisageable. Dans l'approximation de la linéarité du circuit magnétique, on introduit les inductances propres et mutuelles L_{ii} et L_{ij} .

$$\begin{aligned} \psi_S &= L_{SS}i_S + L_{SR}i_R \\ \psi_R &= L_{SR}i_S + L_{RR}i_R \end{aligned}$$

Le système est immobile; les inductances sont des constantes au cours du temps.

$$\begin{aligned} dF &= i_S L_{SS} di_S + i_S L_{SR} di_R + i_R L_{SR} di_S + i_R L_{RR} di_R \\ dF &= d\left(\frac{1}{2} L_{SS} i_S^2 + \frac{1}{2} L_{RR} i_R^2 + L_{SR} i_S i_R\right) \\ F &= \frac{1}{2} (L_{SS} i_S^2 + L_{RR} i_R^2) + L_{SR} i_S i_R \end{aligned} \quad (16)$$

Comme on le remarque, cette relation ne fait pas intervenir les flux explicitement.

Pour l'utiliser afin de calculer le couple, il faut inverser la relation matricielle:

$$\begin{bmatrix} \psi_S \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{SR} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \quad (17)$$

A l'instar des autres domaines de la thermodynamique, on fait apparaître une autre fonction dont les paramètres caractéristiques sont les courants. cette fonction s'apparente à une enthalpie libre. Les électrotechniciens l'appellent *coénergie*. elle est définie arbitrairement par l'expression générale:

$$F' = \sum_k \psi_k i_k - F \quad (18)$$

Dans le cas d'une machine à deux enroulements :

$$\begin{aligned}
 F' &= i_S \Psi_S + i_R \Psi_R - F \\
 dF' &= i_S d\Psi_S + i_R d\Psi_R + di_S \Psi_S + di_R \Psi_R - dF \\
 dF' &= i_S d\Psi_S + i_R d\Psi_R + di_S \Psi_S + di_R \Psi_R - i_S d\Psi_S - i_R d\Psi_R + C_{em} d\theta \quad (19) \\
 C_{em} &= + \left(\frac{\partial F'}{\partial \theta} \right)_{i_S i_R}
 \end{aligned}$$

Les variables à maintenir constantes sont ici les courants.

Quelle est l'expression de F'?

Comme dans le cas de F on considère une transformation énergétique, rotor à l'arrêt.

$$\begin{aligned}
 dF' &= (di_S) \Psi_S + (di_R) \Psi_R \\
 F' &= \int_{i_{SA}}^{i_{SB}} \int_{i_{rA}}^{i_{rB}} (di_S) \Psi_S + (di_R) \Psi_R \quad (20)
 \end{aligned}$$

En l'absence de saturation magnétique, le calcul analytique peut être terminé.

$$F' = F = \frac{1}{2} (L_{SS} i_S^2 + L_{RR} i_R^2) + L_{SR} i_S i_R \quad (21)$$

sous forme matricielle:

$$\begin{aligned}
 F = F' &= \frac{1}{2} [i_S i_R] \begin{bmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{SR} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \\
 C_{em} &= \left(\frac{\partial F'}{\partial \theta} \right)_{i_S i_R} = \frac{1}{2} [i_S i_R] \begin{bmatrix} \frac{\partial L_{SS}}{\partial \theta} & \frac{\partial L_{SR}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_{SR}}{\partial \theta} & \frac{\partial L_{RR}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} \quad (22) \text{ et } (23)
 \end{aligned}$$

Cette expression du couple électromagnétique est générale, en absence de saturation magnétique.

2 - Machine à entrefer constant.

La conversion d'énergie peut être étudiée par l'interaction entre deux systèmes de pôles tournants, l'un pour le stator et l'autre pour le rotor, correspondant à une

répartition de f.m.m. ou ici d'induction magnétique, sinusoïdale le long de l'entrefer.

Par rapport à un référentiel fixe, les p_S paires de pôles du stator tournent à la vitesse angulaire mécanique Ω_S .

Un point de l'entrefer, repéré par l'angle θ par rapport au stator voit donc l'induction :

$$B_S(\theta, t) = \hat{B}_S \sin(p_S \theta - \omega_S t)$$

$$\omega_S = p_S \Omega_S$$

Par rapport à un référentiel lié au rotor, les p_R paires de pôles du rotor tournent à la vitesse angulaire mécanique Ω_R .

Un point de l'entrefer, repéré par l'angle θ' par rapport au référentiel lié au rotor voit donc l'induction :

$$B_R(\theta', t) = \hat{B}_R \sin(p_R \theta' - \omega_R t)$$

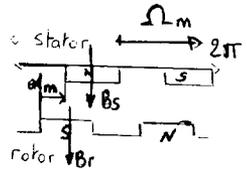
$$\omega_R = p_R \Omega_R$$

La vitesse du rotor par rapport au stator est Ω_m . L'induction rotorique tourne à la vitesse angulaire ω'_R par rapport au stator.

$$\Omega'_R = \Omega_m + \Omega_R$$

$$\omega'_R = p_R \Omega'_R = p_R (\Omega_m + \Omega_R) = \omega_R + p_R \Omega_m$$

$$\omega'_R = \omega_R + \omega_m \quad \text{avec} \quad \omega_m = p_R \Omega_m$$



L'onde d'induction rotorique s'exprime dans le repère fixe lié au stator par

$$B'_R(\theta, t) = \hat{B}_R \sin(p_R \theta - \omega'_R t - p_R \alpha_m)$$

α_m exprime le décalage initial entre les deux ondes, c'est à dire entre un pôle nord statorique et un pôle sud rotorique (voir figure ci-dessus). On constate que lorsque α_m est positif (de peu sur la figure), l'onde rotorique est en retard sur l'onde statorique . Le couple créé par le stator sur le rotor est moteur donc de moment positif.

En l'absence de saturation, l'induction magnétique dans l'entrefer est la somme des inductions statoriques et rotoriques, l'énergie est quasiment totalement stockée dans l'entrefer.

Soient D le diamètre d'alésage du stator, l la longueur totale de l'entrefer dans le sens de l'axe de la machine et e l'épaisseur de cet entrefer.

$$F = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{1}{2\mu_0} (B_S + B'_R)^2 dt$$

dt est l'élément de volume dans l'entrefer

$$F = \frac{1}{2\mu_0} leD \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} (B_S^2 + B'_R{}^2 + 2B_S B'_R) d\theta$$

En reprenant les relations précédentes donnant les ondes statoriques et rotoriques, on obtient:

$$\frac{1}{4\mu_0} leD \int_0^{2\pi} B_S^2 d\theta = \frac{\pi}{4\mu_0} leD \hat{B}_S^2$$

$$\frac{1}{4\mu_0} leD \int_0^{2\pi} B'_R{}^2 d\theta = \frac{\pi}{4\mu_0} leD \hat{B}_R^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_0} le \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} 2B_S B'_R d\theta &= \frac{1}{2\mu_0} leD \hat{B}_S \hat{B}_R \left(\int_0^{2\pi} \cos[(p_S - p_R)\theta - (\omega_S - \omega'_R)t + p_R \alpha_m] d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \cos[(p_S + p_R)\theta - (\omega_S + \omega'_R)t - p_R \alpha_m] d\theta \right) \end{aligned}$$

p_S et p_R sont des nombres entiers.

Si p_S et p_R sont différents,

$$F' = k(\hat{B}_S^2 + \hat{B}_R^2) \quad k \text{ facteur de proportionnalité}$$

$$C_{em} = 0$$

Si p_S et p_R sont égaux à p ,

$$F = \frac{\pi D l e}{2\mu_0} \left(\frac{\hat{B}_S^2 + \hat{B}_R^2}{2} \right) + \hat{B}_S \hat{B}_R \cos(p\alpha_m - (\omega_S - \omega'_R)t)$$

$$C_{em}(t) = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_m} = + \frac{\pi D l e}{2\mu_0} (\hat{B}_S \hat{B}_R p \sin(p\alpha_m - (\omega_S - \omega'_R)t)) \quad (24)$$

Le couple est pulsant et sa valeur moyenne est nulle sauf si:

Une condition de fréquence est remplie:

$$\omega_s = \omega'_R = \omega_R + \omega_m$$

Les champs tournants sont nécessairement synchrones; le couple ne dépend pas du temps.

$$\bar{C}_{em} = \frac{\pi D l e}{2 \mu_0} (\hat{B}_S \hat{B}_R p \sin(p \alpha_m)) \quad (25)$$

Une condition de décalage doit être remplie elle aussi:

$$\sin(p \alpha_m) \neq 0 \quad (26)$$

Le décalage polaire électrique $p \alpha_m$ doit être différent de 0 ou de π .

Si on introduit la perméance P de l'entrefer et les fmm e statoriques et rotoriques.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu_0 \pi D l}{e} & \hat{B} &= \mu_0 \frac{\hat{e}}{e} \\ C_{em} &= \frac{1}{2} P \hat{e}_S \hat{e}_R p \sin(p \alpha_m) \end{aligned} \quad (27)$$

Le couple est moteur si le décalage polaire électrique, inférieur en valeur absolue à 90° , généralement, est positif avec les conventions de signe choisies.

Revenons alors sur la machine bipolaire équivalente. La condition $\Omega_s = \Omega'_R$ traduit l'égalité des vitesses angulaires absolues des champs tournants statoriques et rotoriques; ces champs sont synchrones. La condition $\sin(\alpha_m) \neq 0$ traduit la nécessité pour les deux systèmes de pôles statoriques et rotoriques tournant d'être décalés dans l'espace.

La condition $\sin(\alpha_m) = 1$ permet d'obtenir un couple maximum.

C'est le cas dans une machine à collecteur usuelle, dans laquelle les axes des enroulements pseudo-stationnaires statoriques et rotoriques sont perpendiculaires.

On peut remarquer que pour une machine à collecteur la condition de fréquence $\Omega_s = \Omega'_R$ est satisfaite; ces deux pulsations sont égales à 0.

Une machine à courant continu est une machine à champ tournant à vitesse nulle.

3 - Classification des machines à pôles lisses et à courant alternatif.

On considère une machine à stator triphasé. La pulsation électrique de la f.m.m. tournante statorique est ω_s . La vitesse "électrique" du rotor est ω_m ($\omega_m = p\Omega_m$) et la pulsation électrique de la f.m.m. tournante créée par le rotor et par rapport au rotor est ω_R .

$$\omega_S = \omega_R + \omega_m$$

Si le bobinage rotorique est alimenté en courant continu, $\omega_R = 0$. En effet, un courant continu génère un champ tournant à vitesse nulle.

$$\omega_S = \omega_m \quad \Omega_S = \Omega_m$$

Le rotor tourne à la vitesse de synchronisme Ω_S qui est la vitesse angulaire mécanique du champ tournant statorique. La machine est dite **synchrone**.

Si le bobinage rotorique est polyphasé (cage d'écureuil par exemple), la condition $\omega_S = \omega_R + \omega_m$ indique que:

$$\omega_R \neq 0 \quad \omega_S \neq \omega_m$$

La machine est dite **asynchrone**.

Dans le fonctionnement moteur usuel (hyposynchronisme), $\omega_S \geq \omega_m, \omega_R \geq 0$,

Dans le fonctionnement hypersynchrone $\omega_S \leq \omega_m, \omega_R \leq 0$, le champ rotorique tourne en sens inverse du rotor. C'est un mode de fonctionnement utilisable pour freiner le moteur.

4 - Machines à entrefer variable au cours de la rotation

On considère d'abord une machine à réluctance variable (bipolaire équivalente)

Le bobinage statorique de cette machine est bipolaire, alimenté en courant alternatif monophasé ou triphasé. Dans le cas d'un bobinage triphasé, le courant de pulsation ω crée une onde de f.m.m. tournante de pulsation ω , à distribution spatiale approximativement sinusoïdale.

Sur le rotor cylindrique saillent des pièces ferromagnétiques faites d'un matériau magnétiquement doux, donc à faible induction rémanente.

On considère un modèle de machine bipolaire, à réluctance variable, très simplifié, représenté par la figure 13.

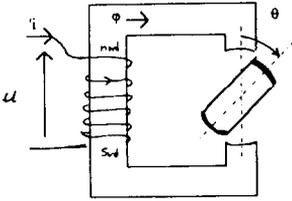


figure 13: modèle d'une machine bipolaire à réluctance variable

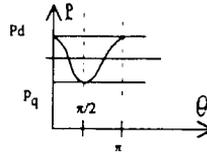


figure 14 : courbe perméance en fonction l'angle θ

C'est un système à un degré de liberté de rotation et à un seul enroulement d'excitation.

La perméance du circuit magnétique varie périodiquement avec l'angle de rotation du rotor. La période angulaire est π . La perméance varie entre une valeur P_{\max} lorsque $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ et une valeur P_{\min} lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$. La fonction $P(\theta)$ n'est pas sinusoïdale, mais elle est décomposable en série de Fourier.

En se limitant à l'harmonique de rang 2,

$$P(\theta) = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} + \frac{(P_{\max} - P_{\min}) \cos 2\theta}{2}$$

L'inductance du bobinage statorique varie au cours de la rotation

$$L(\theta) = N^2 P(\theta)$$

$$L(\theta) = N^2 \left(\frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} + \frac{(P_{\max} - P_{\min}) \cos 2\theta}{2} \right)$$

La coénergie du système F' s'exprime par:

$$F' = \frac{1}{2} Li^2$$

$$F' = \frac{1}{2} N^2 \left(\frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} + \frac{(P_{\max} - P_{\min}) \cos 2\theta}{2} \right) i^2$$

Le moment du couple électromagnétique est alors obtenu en dérivant à courant constant la coénergie, par rapport à l'angle θ .

$$C_{em} = \left(\frac{\partial F'}{\partial \theta} \right)_i = -N^2 i^2 \frac{1}{2} (P_{\max} - P_{\min}) \sin(2\theta) \quad (28)$$

On remarque que l'on laisse i constant, même si i est alternatif sinusoïdal !

Le couple de la machine est dit *réductant*, car il dépend de la variation de la réluctance du circuit magnétique au cours de la rotation.

$$i = \hat{i} \sin(\omega t) \quad \theta = \theta_0 + \omega_m t$$

$$C_{em} = k \hat{i}^2 \sin^2(\omega t) \sin 2(\theta_0 + \omega_m t)$$

$$C_{em} = k \hat{i}^2 [\sin(2\omega_m t + 2\theta_0) + \sin(2(\omega + \omega_m)t + 2\theta_0) + \sin(2(-\omega + \omega_m)t + 2\theta_0)]$$

Si $\omega_m \neq \pm \omega$, le couple moyen est nul.

Cette machine entre dans la catégorie des machines synchrones.

5 - Classification des machines à entrefer variable et à courant alternatif.

L'exemple précédent a montré que la machine doit tourner à la vitesse de synchronisme, afin que le couple réductant soit de valeur moyenne non nulle. Les machines à pôles saillants sont des machines synchrones;

-si le bobinage rotorique n'est pas excité, la machine ne présente qu'un couple réductant;

-si le bobinage rotorique est excité en courant continu, le couple est dû en partie à la réluctance variable et en partie à l'interaction des systèmes de pôles tournants au rotor et au stator, comme dans une machine à pôles lisses.

IV - Les machines à enroulements pseudostationnaires.

1 - La machine à courant continu à deux enroulements

Nous raisonnerons sur la machine à courant continu bipolaire avant d'introduire le convertisseur électromécanique généralisé appelé machine de Kron.

On considère une machine à collecteur bipolaire, à pôles rotoriques lisses et à pôles statoriques saillants (voir figure 15). Vu du stator, le circuit magnétique est isotrope et l'inductance propre statorique constante au cours de la rotation. Vu du rotor, le circuit magnétique est anisotrope. En se limitant, comme dans la machine

à réluctance variable précédente, à l'harmonique 2, l'inductance propre rotorique varie entre deux valeurs extrêmes L_d et L_q (voir figure 16)

On lie au stator deux axes mathématiques privilégiés:

L'axe d (comme direct) confondu avec l'axe magnétique statorique.

L'axe q (comme quadrature) en avance de 90° dans le sens du mouvement par rapport à l'axe d.

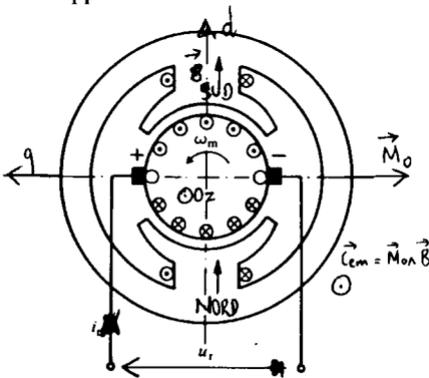


figure 15: Machine à collecteur bipolaire

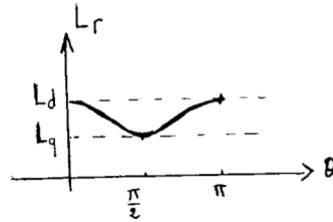


figure 16: variation de l'inductance propre rotorique

L'axe q est confondu avec l'axe des balais qui frottent sur le collecteur.

On constate sur la figure 15, que le moment magnétique M_o , fixe, de la bobine rotorique est dirigé en sens inverse de q et que le couple $\vec{C}_{em} = \vec{M}_o \wedge \vec{B}$ est dirigé suivant l'axe Oz, dont le sens est lui même lié au sens positif d'orientation d'un plan de coupe de la machine. Ce couple moteur entraîne la machine dans le sens positif.

Il n'y a pas d'effet d'induction électromagnétique au stator du à la rotation du rotor en raison de la présence du collecteur et de la pseudo-stationnarité de l'enroulement rotorique.

Le rotor est stationnaire pour ses propriétés magnétiques et en mouvement pour ses propriétés électromécaniques. En conséquence, on appelle q_r , l'enroulement rotorique (mobile) lorsqu'on doit s'intéresser à ses propriétés mécaniques.

Les enroulements pseudostationnaires, dans le même sens hélicoïdal, sont parcourus par des courants i_s et i_r .

Ces courants ne sont pas nécessairement constants; la théorie permet d'étudier les régimes transitoires.

La loi d'Ohm généralisée appliquée aux deux enroulements donne:

$$u_{ds} = R_{ds}i_s - e_{ds} = R_{ds}i_s + \frac{d\psi_{ds}}{dt}$$

$$u_{qr} = R_{qr}i_r - e_{qr} = R_{qr}i_r + \frac{d\psi_{qr}}{dt}$$

Les fem comprennent une partie transformation et une partie rotation.

$$d\psi_{ds} = \frac{\partial\psi_{ds}}{\partial t} dt + \frac{\partial\psi_{ds}}{\partial\theta} \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{d\psi_{ds}}{dt} dt$$

De même, au rotor, en appelant ω_m la vitesse angulaire du rotor.

$$d\psi_{qr} = \frac{\partial\psi_{qr}}{\partial t} dt + \frac{\partial\psi_{qr}}{\partial\theta} \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{\partial\psi_{qr}}{\partial t} dt + \frac{\partial\psi_{qr}}{\partial\theta} \omega_m dt$$

Exprimons le flux rotorique par ses composantes propre et mutuelle.

$$\psi_{qr} = L_r i_r + M i_s$$

$$M i_s = \pm M_{max} \cos(\theta) i_s$$

$$\left(\frac{\partial\psi_{qr}}{\partial\theta}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \mp M_{max} i_s + \left(\frac{\partial L_r}{\partial\theta}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} i_r \tag{29}$$

M_{max} est appelée l'inductance mutuelle de rotation.

La dérivation du flux a été faite à courant constant et

$$\left(\frac{\partial L_r}{\partial\theta}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ (figure 16)}$$

Afin de lever l'indétermination concernant le signe, calculons la coénergie et le couple.

$$u_{qr} = R_{qr}i_r + \frac{\partial\psi_{qr}}{\partial t} \mp M_{max}i_s\omega_m$$

Le couple est obtenu par dérivation de la coénergie: (expressions (21) et (29))

$$F = \frac{1}{2} L_{ds} i_s^2 + \frac{1}{2} L_r i_r^2 + M i_s i_r = \frac{1}{2} L_{ds} i_s^2 + \frac{1}{2} L_r i_r^2 \pm M_{\max} \cos(\theta) i_s i_r$$

$$\frac{\partial L_{ds}}{\partial \theta} = 0 \quad \left(\frac{\partial L_r}{\partial \theta} \right)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 0$$

$$C_{em} = \left(\frac{\partial F'}{\partial \theta} \right)_{i_s i_r} = \left(\frac{\partial M_{(\theta = \pi/2)}}{\partial \theta} \right) i_s i_r = \mp M_{\max} i_s i_r$$

Le couple est positif; il faut choisir le signe + dans la relation précédente. En remontant le fil des calculs,

$$M_{i_s} = -M_{\max} \cos(\theta) i_s \quad (\text{figure 17})$$

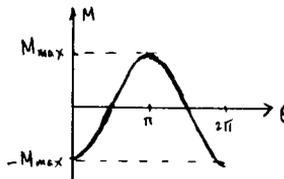


figure 17: variation de la mutuelle stator rotor avec l'angle de rotation

2 - La machine généralisée de Kron

C'est une machine à quatre enroulements, d'axes magnétiques ds, qs, dr, qr pseudo-stationnaires en quadrature. Le rotor à collecteur possède deux jeux de balais, calés sur les axes ds et qs. On considère un axe référentiel fixe \mathcal{R} . Pour pouvoir ramener une machine réelle à cette machine généralisée, il ne faut qu'une seule saillance de pôles au plus, au stator ou au rotor.

Le rotor, à p paires de pôles, tourne à la vitesse angulaire mécanique Ω_m . La pulsation électrique correspondante est ω_m ($\omega_m = p\Omega_m$).

On considère la machine bipolaire équivalente (figure 18)

On définit deux axes d et q mathématiques, confondus avec les axes des enroulements pseudostationnaires équivalents, liés à la structure magnétiquement isotrope.

Les axes d et q tournent à la vitesse ω_d par rapport à \mathcal{R} . (figure 19)

$$\left(\frac{d\vec{\psi}}{dt}\right)_{\text{absolu}} = \left(\frac{d\vec{\psi}}{dt}\right)_{\text{relatif}} + \vec{\omega}_e \wedge \vec{\psi} \quad (30)$$

$$\left(\frac{d\vec{\psi}_s}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{\psi}_s}{dt}\right)_{d,q} + \vec{\omega}_e \wedge \vec{\psi}_s$$

$$\text{avec } \vec{\omega}_e = \vec{\omega}_{d,q/\text{stator}} = \vec{\omega}_a \quad (31)$$

$$\left(\frac{d\vec{\psi}_r}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{\psi}_r}{dt}\right)_{d,q} + \vec{\omega}_e \wedge \vec{\psi}_r$$

$$\text{avec } \vec{\omega}_e = \vec{\omega}_{dq/\text{rotor}} = \vec{\omega}_{d,q/\mathfrak{R}} + \vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\text{rotor}} = \vec{\omega}_a - \vec{\omega}_m \quad (32)$$

En raison de la pseudostationnarité, les dérivées des flux dans le référentiel d,q sont nulles.

$$\frac{d\vec{\psi}_s}{dt} = \vec{\omega}_a \wedge \vec{\psi}_s$$

$$\frac{d\vec{\psi}_r}{dt} = (\vec{\omega}_a - \vec{\omega}_m) \wedge \vec{\psi}_r$$

$$\vec{\omega}_a \wedge \vec{\psi}_s = \begin{vmatrix} 0 & \psi_{sd} \\ \omega_a & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \psi_{sq} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega_a \psi_{sq} \\ +\omega_a \psi_{sd} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (d,q)$$

On obtient alors les f.e.m. de rotation:

$$-e_{sd} = \frac{d\psi_{sd}}{dt} = -\omega_a \psi_{sq}$$

$$-e_{sq} = \frac{d\psi_{sq}}{dt} = +\omega_a \psi_{sd} \quad (33), (34), (35), (36)$$

$$-e_{rd} = \frac{d\psi_{rd}}{dt} = -(\omega_a - \omega_m) \psi_{rq}$$

$$-e_{rq} = \frac{d\psi_{rq}}{dt} = +(\omega_a - \omega_m) \psi_{rd}$$

et les relations tensions courants:

Les lois d'Ohm généralisées appliquées aux quatre enroulements sont écrites en séparant les f.e.m. de transformation et de rotation:

$$u_{ds} = R_{ds} i_{ds} + \frac{\partial \psi_{ds}}{\partial t} - e_{ds \text{ rotation}}$$

$$u_{qs} = R_{qs} i_{qs} + \frac{\partial \psi_{qs}}{\partial t} - e_{qs \text{ rotation}}$$

$$u_{dr} = R_{dr} i_{dr} + \frac{\partial \psi_{dr}}{\partial t} - e_{dr \text{ rotation}}$$

$$u_{qr} = R_{qr} i_{qr} + \frac{\partial \psi_{qr}}{\partial t} - e_{qr \text{ rotation}}$$

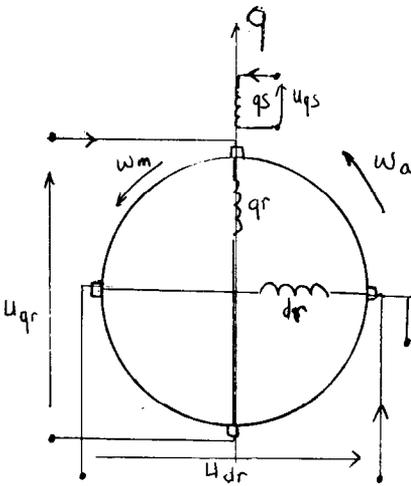


figure 18: machine de Kron

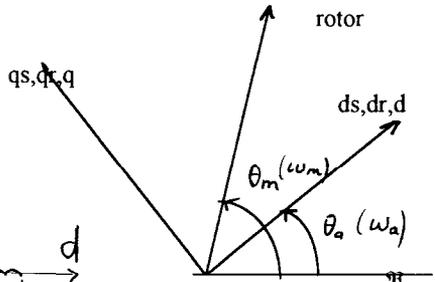


figure 19: position relative des axes

On doit maintenant évaluer les quatre f.e.m. de rotation.

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{\text{rot}} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Soient $\vec{\psi}_s$ et $\vec{\psi}_r$ les vecteurs flux statoriques et rotoriques dont les coordonnées dans les axes d et q sont respectivement $\psi_{sd} \ \psi_{sq} \ \psi_{rd} \ \psi_{rq}$.

On est donc amené à dériver des vecteurs dans des référentiels tournants. Dans un changement de référentiel,

$$\begin{aligned}
 u_{ds} &= R_{ds}i_{ds} + \frac{\partial \psi_{ds}}{\partial t} - \omega_a \psi_{qs} \\
 u_{qs} &= R_{qs}i_{qs} + \frac{\partial \psi_{qs}}{\partial t} + \omega_a \psi_{ds} \\
 u_{dr} &= R_{dr}i_{dr} + \frac{\partial \psi_{dr}}{\partial t} - (\omega_a - \omega_m) \psi_{qr} \\
 u_{qr} &= R_{qr}i_{qr} + \frac{\partial \psi_{qr}}{\partial t} + (\omega_a - \omega_m) \psi_{dr}
 \end{aligned}
 \tag{37), (38), (39), (40)}$$

Nous écrivons aussi les relations flux-courants de la machine généralisée:

$$\begin{bmatrix} \psi_{ds} \\ \psi_{qs} \\ \psi_{dr} \\ \psi_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ds} & 0 & M_{dsdr} & 0 \\ 0 & L_{qs} & 0 & M_{qsqr} \\ M_{dsdr} & 0 & L_{dr} & 0 \\ 0 & M_{qsqr} & 0 & L_{qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix}
 \tag{41}$$

En utilisant le formalisme de Laplace, on obtient les équations de la machine généralisée ainsi que la matrice *impédance opérationnelle* qui relie les matrices des courants et des tensions:

$$\begin{bmatrix} u_{ds} \\ u_{qs} \\ u_{dr} \\ u_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ds} + L_{ds}p & -\omega_a L_{qs} & M_{dsdr}p & -\omega_a M_{qsqr} \\ \omega_a L_{ds} & R_{qs} + L_{qs}p & \omega_a M_{dsdr} & M_{qsqr}p \\ M_{dsdr}p & -(\omega_a - \omega_m)M_{qsqr} & R_{dr} + L_{dr}p & -(\omega_a - \omega_m)L_{qr} \\ (\omega_a - \omega_m)M_{dsdr} & M_{qsqr}p & (\omega_a - \omega_m)L_{dr} & R_{qr} + L_{qr}p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix}$$

Où $L_{ds}, L_{qs}, L_{dr}, L_{qr}$ désignent les inductances propres des enroulements.

Où M_{dsdr}, M_{qsqr} désignent les mutuelles entre les enroulements pseudo-stationnaires coaxiaux.

La puissance de la machine est donnée par:

$$\begin{aligned}
 p &= u_{ds}i_{ds} + u_{qs}i_{qs} + u_{dr}i_{dr} + u_{qr}i_{qr} \\
 dW_{el} &= pdt = R_{ds}i_{ds}^2 + R_{qs}i_{qs}^2 + R_{dr}i_{dr}^2 + R_{qr}i_{qr}^2 \\
 &\quad + i_{ds}d\psi_{ds} + i_{qs}d\psi_{qs} + i_{dr}d\psi_{dr} + i_{qr}d\psi_{qr} \\
 &\quad + (\psi_{ds}i_{qs} - \psi_{qs}i_{ds})\omega_a dt + (\psi_{dr}i_{qr} - \psi_{qr}i_{dr})(\omega_a - \omega_m) dt
 \end{aligned}$$

$$dW_{el} = dW_{joule} + dW_{magn} + dW_{méca}$$

$$C_{em} \omega_m = \frac{dW_{méca}}{dt}$$

$$C_{em} = (\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds}) \frac{\omega_a}{\omega_m} + (\psi_{dr} i_{qr} - \psi_{qr} i_{dr}) \left(\frac{\omega_a}{\omega_m} - 1 \right) \quad (42)$$

Revenons à la machine à collecteur, pour laquelle $\omega_a = 0$ et pour laquelle les axes d et q correspondent réellement aux axes magnétiques du stator et du rotor.

Les équations de la machine à collecteur, obtenues à partir des équations de la machine généralisée sont:

$$\begin{aligned} u_{ds} &= R_{ds} i_{ds} + \frac{\partial \psi_{ds}}{\partial t} \\ u_{qs} &= R_{qs} i_{qs} + \frac{\partial \psi_{qs}}{\partial t} \\ u_{dr} &= R_{dr} i_{dr} + \frac{\partial \psi_{dr}}{\partial t} - (-\omega_m) \psi_{qr} \\ u_{qr} &= R_{qr} i_{qr} + \frac{\partial \psi_{qr}}{\partial t} + (-\omega_m) \psi_{dr} \end{aligned} \quad (43), (44), (44), (45)$$

$$\begin{aligned} C_{em} &= (\psi_{dr} i_{qr} - \psi_{qr} i_{dr}) (-1) \\ \vec{C}_{em} &= \vec{i}_r \wedge \vec{\psi}_r \end{aligned} \quad (46), (47)$$

Les composantes du vecteur \vec{i}_r sont i_{rd} et i_{rq} dans les axes d et q

La machine à collecteur, dont le couple apparaît comme un produit vectoriel est une machine dite à **commande vectorielle**. Le couple peut être commandé séparément par le courant dans le rotor (l'induit) et par le flux. Le couple est indépendant de la vitesse.

3) - Exemple d'application des équations de la machine généralisée: machine à courant continu bipolaire à enroulement de compensation.

On considère une machine à courant continu à 3 enroulements (figure 20). Les circuits électriques et magnétiques statoriques sont anisotropes. Les axes d et q sont liés au stator; ($\omega_a = 0$).

L'enroulement inducteur ds agit selon l'axe d fixe. Le stator comporte aussi un enroulement de compensation de réaction d'induit qs, agissant selon l'axe q.

Le rotor comporte un enroulement qr pseudostationnaire.

Les équations de tension de la machine issues des équations de la machine généralisée donnent:

$$\begin{aligned}u_{qs} &= R_{qs}i_{qs} + \frac{d\psi_{qs}}{dt} \\u_{ds} &= R_{ds}i_{ds} + \frac{d\psi_{ds}}{dt} \\u_{qr} &= R_{qr}i_{qr} + \frac{d\psi_{qr}}{dt} - \omega_m\psi_{dr}\end{aligned}$$

Remarquons que i_{dr} et u_{dr} ne sont pas définis, au contraire de ψ_{dr} .

$$\psi_{ds} = L_{ds}i_{ds}$$

$$\psi_{qs} = L_{qs}i_{qs} + M_{qsqr}i_{qr}$$

$$\psi_{qr} = L_{qr}i_{qr} + M_{qsqr}i_{qs}$$

$$\psi_{dr} = M_{dsdr}i_{ds}$$

M_{dsdr} est l'inductance mutuelle de rotation.

L'enroulement qs en série avec qr compense la réaction d'induit par son sens de bobinage.

$$u_r = u_{qs} - u_{qr}$$

$$i_r = i_{qs} = -i_{qr}$$

$$u_{ds} = R_{ds}i_{ds} + L_{ds}\frac{di_{ds}}{dt}$$

$$u_r = (R_{qs} + R_{qr})i_r + (L_{qs} + L_{qr} - 2M_{qsqr})\frac{di_r}{dt} + \omega_m M_{dsdr}i_{ds}$$

$$u_r = (R_r)i_r + (L_r)\frac{di_r}{dt} + \omega_m M_{dsdr}i_{ds}$$

$L_r = L_{qs} + L_{qr} - 2M_{qsqr}$ est l'inductance propre du rotor accessible à la mesure.

$$C_{em} = -\psi_{dr}i_{qr} = M_{dsdr}i_{ds}i_r$$

La matrice impédance opérationnelle de la machine [Z] est

$$\begin{bmatrix} u_{ds} \\ u_r \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_r \end{bmatrix} \quad \text{où } [Z] = \begin{bmatrix} R_{ds} + L_{ds}p & 0 \\ M_{dsdr}\omega_m & R_r + L_{dr}p \end{bmatrix}$$

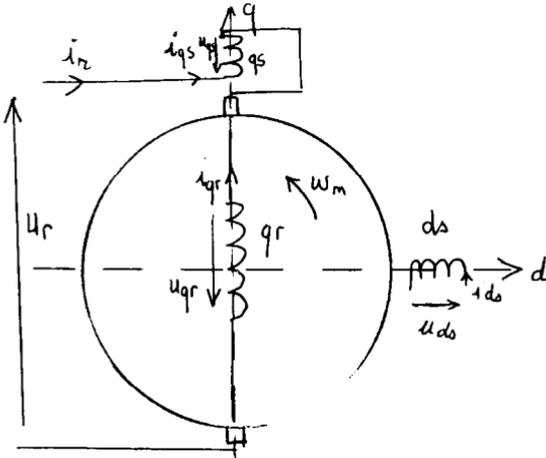


figure 20: machine à courant continu à trois enroulements

La machine à collecteur a longtemps été la machine idéale pour réaliser des entraînements à vitesse variable, notamment en traction électrique. La présence du collecteur et des balais entraîne un surcoût de la machine et une limite des performances en vitesse.

Le T.G.V.Sud-Est, déjà ancien, est équipé de telles machines. Il est relativement plus lent que les nouveaux T.G.V. équipés de moteurs asynchrones, moins coûteux et plus fiables.

Jusqu'à une époque récente, le moteur asynchrone triphasé à cage n'était pas adapté aux entraînements à vitesse variable dans de grandes plages. En lui adaptant une commande vectorielle, on a pu récemment lui ajouter cette propriété et il a fait son entrée dans le domaine de la traction électrique, notamment.

Il nous reste donc à montrer comment on peut passer d'un moteur asynchrone triphasé à une machine à enroulements pseudo-stationnaires dans deux axes d et q orthogonaux.

V - La machine asynchrone triphasée

1 - On considère une machine asynchrone (bipolaire équivalente) triphasée au stator et au rotor. Le stator est constitué de trois enroulements identiques a,b,c décalés de 120° , d'inductances propres $L_{aa}=L_{bb}=L_{cc}$ identiques. Les inductances mutuelles entre phases sont égales $L_{ab}=L_{ac}=L_{bc}$.

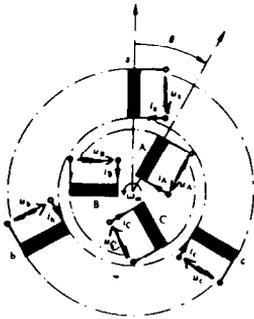


figure 21: modèle de moteur asynchrone triphasé

Le rotor est constitué de trois enroulements identiques A,B,C décalés de 120° , d'inductances propres égales $L_{AA}=L_{BB}=L_{CC}$.

Les mutuelles entre enroulements rotoriques sont égales:

$$L_{AB}=L_{AC}=L_{BC}$$

Toutes ces inductances sont supposées constantes au cours de la rotation et au cours du temps.

Seules dépendent de l'angle de rotation les mutuelles entre phases statoriques et phases rotoriques.

En raison de la symétrie, toutes ces dernières mutuelles dépendent de l'angle et d'un coefficient M qui est la mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor lorsque les enroulements respectifs sont coaxiaux.

Les relations flux-courant prennent des expressions du type:

$$\psi_a = L_{aa} i_a + L_{ab} (i_b + i_c) + M(i_A \cos(\theta) + i_B \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + i_C \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})) \quad (48)$$

Il existe 6 relations de ce type.

De plus la machine est supposée fonctionner en régime équilibré:

$$\begin{aligned} i_a + i_b + i_c &= 0 \\ i_A + i_B + i_C &= 0 \end{aligned}$$

Les relations flux courant font apparaître des coefficients tels que:

$$\begin{aligned} L_S &= L_{aa} - L_{ab} \\ L_r &= L_{AA} - L_{AB} \end{aligned} \quad (49)$$

appelés inductances propres cycliques statoriques et rotoriques, et tenant compte de la dépendance des phases entre elles par les relation entre les courants.

A partir des relations flux-courants, on exprime la coénergie et le couple:

$$F' = \frac{1}{2} \sum_k \Psi_k i_k$$

$$i_a = \hat{I}_s \cos(\omega_s t + \alpha)$$

$$i_b = \hat{I}_s \cos(\omega_s t + \alpha - 2\pi/3)$$

$$i_c = \hat{I}_s \cos(\omega_s t + \alpha + 2\pi/3)$$

$$i_A = \hat{I}_r \cos(\omega_r t + \beta)$$

$$i_B = \hat{I}_r \cos(\omega_r t + \beta - 2\pi/3)$$

.....

$$\theta = \omega_m t$$

$$C_{em} = -\frac{9}{4} \hat{I}_s \hat{I}_r M \sin((\omega_m - \omega_s + \omega_r)t + \beta - \alpha)$$

Dans le cas d'une machine polyphasée au rotor (m phases).

$$C_{em} = -\frac{3}{4} m \hat{I}_s \hat{I}_r M \sin((\omega_m - \omega_s + \omega_r)t + \beta - \alpha) \quad (50)$$

Equations matricielles:

$$[u_s] = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \quad [u_r] = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

Sur le même principe, on construit des matrices 3x1 pour chacune des grandeurs statoriques et rotoriques: flux, courants et des matrices 3x3 regroupant les inductances:

$$[u_s] = R_s [i_s] + \frac{d}{dt} [\psi_s]$$

$$[u_r] = R_r [i_r] + \frac{d}{dt} [\psi_r]$$

$$[\psi_s] = [L_s][i_s] + [L_{sr}][i_r]$$

$$[\psi_r] = [L_{sr}][i_s] + [L_r][i_r]$$

$$\begin{aligned}
 [L_s] &= \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ab} \\ L_{ab} & L_{aa} & L_{ab} \\ L_{ab} & L_{ab} & L_{aa} \end{bmatrix} \\
 [L_r] &= \begin{bmatrix} L_{AA} & L_{AB} & L_{AB} \\ L_{AB} & L_{AA} & L_{AB} \\ L_{AB} & L_{AB} & L_{AA} \end{bmatrix} \\
 [L_{sr}] &= M \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\
 [u_s] &= R_s [i_s] + L_s \frac{d}{dt} [i_s] + \frac{d}{dt} [L_{sr}] [i_r] \\
 [u_r] &= R_r [i_r] + L_r \frac{d}{dt} [i_r] + \frac{d}{dt} [L_{sr}]^t [i_s]
 \end{aligned} \tag{51}$$

Le système est fort complexe, car les matrices contiennent des éléments variables avec l'angle de rotation. On doit donc appliquer une transformation mathématique au système permettant d'obtenir des coefficients constants.

Cette transformation est la transformation de Park.

2 - Transformation des équations de la machine

L'idée de base est de transformer les systèmes d'axes a,b,c et A,B,C en un système d'axe d et q fictif, en conservant les f.m.m. et les puissances.

ω_a est la vitesse angulaire du système d'axe d,q par rapport au repère fixe \mathcal{R} .

La transformée de Park sera représentée ici par une matrice A 2x3:

$$[A] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

on introduit aussi la matrice B telle que

$$[B] = \frac{3}{2}[A]'$$

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En fait, on rencontre dans la littérature spécialisée une matrice de Park différente (carrée). La transformation, ci-dessus, suffit pour ce qui est exposé ici; En revanche, elle ne conserve pas la puissance instantanée.

On applique à chaque matrice "tension", "courant", "flux", la transformation, en faisant (voir figure 22):

$$\text{au stator } \theta = \theta_s \quad [A] = [A_s] \quad \omega_a = \frac{d\theta_s}{dt}$$

$$\text{au rotor } \theta = \theta_r \quad [A] = [A_r] \quad \omega_a - \omega_m = \frac{d\theta_r}{dt}$$

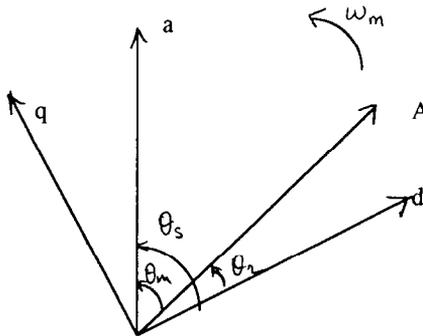


figure 22: définitions des axes et angles

On retrouve les équations relatives à la machine de Kron:

$$u_{ds} = R_{ds}i_{ds} + \frac{\partial \psi_{ds}}{\partial t} - \omega_a \psi_{qs}$$

$$u_{qs} = R_{qs}i_{qs} + \frac{\partial \psi_{qs}}{\partial t} + \omega_a \psi_{ds}$$

$$u_{dr} = R_{dr}i_{dr} + \frac{\partial \psi_{dr}}{\partial t} - (\omega_a - \omega_m) \psi_{qr}$$

$$u_{qr} = R_{qr}i_{qr} + \frac{\partial \psi_{qr}}{\partial t} + (\omega_a - \omega_m) \psi_{dr}$$

On applique la transformée de Park aux équations de flux et on retrouve les équations de la machine de Kron, après un petit calcul matriciel.

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ds} \\ \Psi_{qs} \\ \Psi_{dr} \\ \Psi_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_{sr} & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_{sr} \\ L_{sr} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_{sr} & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix}$$

L_s et L_r sont les inductances cycliques du stator et du rotor.

L_{sr} est la mutuelle cyclique stator rotor qui vaut $\frac{3}{2}M$.

La transformation ne conservant pas la puissance instantanée. La puissance absorbée par le moteur est (présence du facteur 3/2):

$$p(t) = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c = \frac{3}{2}(u_{ds} i_{ds} + u_{qs} i_{qs})$$

3 - Equations de la machine asynchrone dans différents référentiels:

Selon les applications, on considère le repère d,q lié au stator, au rotor ou bien au champ tournant.

Dans un référentiel lié au stator, $\omega_a = 0$.

Dans un référentiel lié au rotor, $\omega_a = \omega_m$

Dans un référentiel lié au champ tournant, $\omega_a = \omega_{\text{synchronisme}} = \omega_s$

C'est dans ce dernier référentiel que l'on élabore la commande vectorielle.

4 - Equations de la machine asynchrone dans le référentiel d,q lié au champ tournant .

$$\begin{aligned} u_{ds} &= R_{ds} i_{ds} + \frac{\partial \Psi_{ds}}{\partial t} - \omega_s \Psi_{qs} \\ u_{qs} &= R_{qs} i_{qs} + \frac{\partial \Psi_{qs}}{\partial t} + \omega_s \Psi_{ds} \\ u_{dr} &= R_{dr} i_{dr} + \frac{\partial \Psi_{dr}}{\partial t} - (\omega_s - \omega_m) \Psi_{qr} \\ u_{qr} &= R_{qr} i_{qr} + \frac{\partial \Psi_{qr}}{\partial t} + (\omega_s - \omega_m) \Psi_{dr} \\ (\omega_s - \omega_m) &= g \omega_s \end{aligned}$$

Dans la dernière relation, g désigne le glissement du moteur par rapport à sa vitesse de synchronisme.

On retrouve une expression comparable à celle de la machine à collecteur.

Puissance et couple calculés dans ce référentiel.

$$p(t) = \frac{3}{2}(u_{ds}i_{ds} + u_{ds}i_{ds})$$

$$dW_{es} = \frac{3}{2}(R_s(i_{ds}^2 + i_{qs}^2)dt + i_{ds}d\psi_{ds} + i_{qs}d\psi_{qs} + \omega_s(i_{qs}\psi_{ds} - i_{ds}\psi_{qs})dt)$$

$$dW_{es} = dW_{joule} + dW_{ems} + dW_{s \rightarrow r}$$

Le facteur $3/2$ introduit l'expression correcte de la puissance instantanée.

dW_{es} est l'énergie absorbée au stator pendant dt , dW_{joule} est l'énergie perdue par effet Joule pendant le même temps, dW_{ems} est l'énergie magnétique emmagasinée au stator, $dW_{s \rightarrow r}$ l'énergie transférée au rotor.

De même au rotor, en appelant dW_{er} , l'énergie électrique échangée par le rotor:

$$dW_{er} = p_{er}dt = \frac{3}{2}(u_{dr}i_{dr} + u_{qr}i_{qr})$$

$$dW_{er} = \frac{3}{2}(R_r(i_{dr}^2 + i_{qr}^2)dt + i_{dr}d\psi_{dr} + i_{qr}d\psi_{qr} + (\omega_s - \omega_m)(i_{qr}\psi_{dr} - i_{ds}\psi_{qr})dt)$$

or

$$\psi_{ds}i_{qs} - \psi_{qs}i_{ds} = L_{sr}(i_{dr}i_{qs} - i_{qr}i_{ds})$$

$$\psi_{dr}i_{qr} - \psi_{qr}i_{dr} = -L_{sr}(i_{dr}i_{qs} - i_{qr}i_{ds})$$

Le rotor est en court-circuit; $dW_{er} = 0$; en effet les tensions rotoriques sont nulles

$$dW_{s \rightarrow r} = \frac{3}{2}\omega_s(i_{qs}\psi_{ds} - i_{ds}\psi_{qs})dt$$

$$dW_{s \rightarrow r} = \frac{3}{2}(R_r(i_{dr}^2 + i_{qr}^2)dt + i_{dr}d\psi_{dr} + i_{qr}d\psi_{qr} + (\omega_m)(i_{qs}\psi_{ds} - i_{qs}\psi_{ds})dt)$$

$$C_{em} = \frac{3}{2}(\psi_{ds}i_{qs} - \psi_{qs}i_{ds}) = -\frac{3}{2}(\psi_{dr}i_{qr} - \psi_{qr}i_{dr})$$

$$C_{em} = \frac{3}{2}\|\vec{i}_r \wedge \vec{\psi}_r\|$$

Dans un référentiel lié au champ tournant, le couple d'un moteur asynchrone triphasé s'exprime comme un produit vectoriel entre le courant rotorique et le flux rotorique, comme dans une machine à courant continu. On peut donc commander ce moteur dans ce référentiel; comme l'on commande une machine à courant continu dans des axes lié à son stator; c'est la commande vectorielle ou commande à orientation de flux.

5 - Commande à orientation de flux

En imposant la direction du flux sur un des deux axes d par exemple;

$$\psi_{qr} = 0 = L_r i_{qr} + L_{rs} i_{qs}$$

$$i_{qr} = -\frac{L_{rs}}{L_r} i_{qs}$$

$$\psi_{dr} = L_r i_{dr} + L_{rs} i_{ds}$$

$$i_{dr} = \frac{\psi_{dr} - L_{rs} i_{ds}}{L_r}$$

$$C_{em} = \frac{3}{2} \frac{L_{rs}}{L_r} i_{qs} \psi_{dr}$$

Le couple est fonction du flux rotorique et du courant i_{sq} .

Le rotor est en court-circuit :

$$u_{dr} = 0 = R_r i_{dr} + \frac{d\psi_{dr}}{dt}$$

$$i_{dr} = -\frac{1}{R_r} \frac{d\psi_{dr}}{dt}$$

$$\psi_{dr} + \frac{L_r}{R_r} \frac{d\psi_{dr}}{dt} - L_{sr} i_{ds} = 0$$

Le flux est fonction du courant statorique i_{ds} seulement.

Il y a découplage des variables :

i_{ds} gère le flux et i_{qs} gère le couple.

De plus dans ce référentiel lié au champ tournant les courants sont des constantes.

Avec i_{ds} maintenu constant, ψ_{dr} est constant, le couple est fonction du courant i_{qs} comme dans une machine à courant continu à excitation séparée .

La réalisation pratique de la commande vectorielle fait appel à l'Electronique numérique et l'Automatique des systèmes échantillonnés.

Deux capteurs de flux en quadrature près du rotor de la machine définissent les deux axes d et q lié au champ tournant.

Cette information insérée dans une boucle de retour est comparée à deux valeurs constantes de référence des courants i_d^* et i_q^* et sert à piloter l'onduleur de courant qui alimente la machine.

Bibliographie

1--Traité d'électronique et d'électrotechnique. Vol X Machines Electriques
(J. Chatelain)
Institut Polytechnique de Lausanne

Le dixième tome de ce traité , en français, vient d'être réédité en septembre 1994

2--Electrotechnique Industrielle de M Notellet et M Séguier
Tec doc. Collection Ingénieurs praticiens

3--Introduction à l'Electrotechnique Approfondie de M. Lesenne, M. Notelet
et M. Séguier.
Tec doc

4--Documents concernant le variateur vectoriel de CEGELEC, équipant certains
laboratoire de Génie Electrique, en particulier dans certains lycées.

5-- Régimes transitoires des machines tournantes électriques de M. P Barret.
Direction des études et recherches E.D.F.
Eyrolles

6--Machines électriques à courant alternatif. J.L. Dalmasso
Belin

7-- Unified theory of electrical machines de M.Ch.V.Jones
London Butterworths