

**ONDAMANIA**  
ou  
**LE BOUDIN DU PROFESSEUR TOURNESOL**

**Jean MURAT,**  
Lycée Louis Vincent,  
57000, METZ

**Résumé :** L'affaire débute comme un gag : un peu comme l'achat de Guimoo dans le film des Gremlins . Un gadget , un vulgaire ressort à boudin qui se fait appeler Ondamania, fascine les badauds avec ses contorsions de chenille et surtout sa propension à dévaler les escaliers pour peu que la géométrie des marches soit adéquate et qu'on l'ait amorcé . Par désœuvrement , par jeu , par défi j'acquiers la chose ( 30 F ) afin de la démythifier et de mettre en évidence les grands principes physiques dont elle ne se réclame pas .

L'avenir semble prometteur et les risques encourus parfaitement connus et balisés : une étude statique aboutissant à la détermination du module d'Young, la propagation et sa double périodicité , l'obtention d'ondes stationnaires et des modes normaux , la classique histoire d'oscillations couplées et de battements , la dispersion , l'analogie traditionnelle entre les schémas électriques et les situations mécaniques , la notion de filtrage , le comportement d'une onde aux limites de deux milieux de propagation , etc ...

La lune de miel est splendide : la chose m'entraîne dans des contrées auxquelles ma formation d'autodidacte m'avait peu habitué : la notion généralisée d'impédance , l'élasticité des solides , les oscillations de relaxation et Van der Pol , la résonance paramétrique , les diagrammes de phase , les guides et paquets d'ondes et autre chose aussi que je ne dis pas ici .

Naïf mais généreux et volontaire , j'ai l'impression de redécouvrir le monde. Ensuite la chose devient exigeante , tyrannique , dévore mes loisirs et mes nuits , se donne dans une manipulation mais se refuse dans d'autres après pourtant une cour assidue , risque de ruiner ma réputation .

Le pourquoi ne suffit plus , une quête obsessionnelle me pousse à la recherche du pourquoi du pourquoi .

Un jour , excédé et réaliste je décide de rompre : la chose rejoindra sa destination originelle : celle d'amuser les enfants .

**ETUDE STATIQUE**

**1 - RESSORT HORIZONTAL**

**a - Etude théorique** : L'équilibre mécanique est caractérisé par une tension uniforme tout au long du ressort . La mise en série de deux ressorts donne une ressort équivalent de raideur  $k$  telle que  $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$  et pour un ressort constitué de  $N$  spires identiques

$$k_{\text{ressort}} = k = k_{\text{spire}} / N$$

$$k_{\text{ressort}} = k_{\text{unité de longueur}} / L = K / L$$

$K$  porte le nom de raideur linéique et s'exprime en  $N$  .  $L$  représente la longueur du ressort à un instant donné . La valeur de  $K$  varie donc suivant  $L$  .

Soit un état d'équilibre mécanique initial caractérisé par une certaine longueur du ressort ( $L_i$ ) et une tension correspondante ( $T_i$ ) et soit un nouvel état d'équilibre ( $L, T$ ) on peut toujours écrire :

$$T = T_i + k\Delta L = T_i + K \Delta L / L \quad \text{avec } \Delta L \text{ algébrique} = L - L_i$$

Ces égalités restent vraies quelque soit le type du ressort ( à spires jointives ou non jointives ) tant que la réponse reste linéaire ( ce qui sera toujours le cas si  $\Delta L \ll L$  ) . Un des avantages de l'utilisation de K réside dans l'apparition de l'allongement relatif  $\Delta L / L$  .

**b - Etude expérimentale**

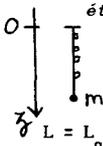
*résultats* : Caractéristiques du ressort utilisé  
 $M = 96.4 \text{ g}$  ;  $L_o = 8.6 \text{ cm}$  ;  $N = 56 + 1/2 + 1/2$

Au cours des essais  $L$  a varié de 85 cm à 3.40 m . La réponse reste linéaire et on obtient  $0.151 < k < 0.175 \text{ N/m}$  .

**2 - RESSORT VERTICAL**

**a - Etude théorique**

*étude en mode discret* :  
 $z_i = z_{oi} + \Delta l_i$      $z_i$  et  $z_{oi}$  : cotes de la  $i^{\text{ème}}$  spire au repos et à l'équilibre ;  $m$  est la masse suspendue .  
 $\Delta l_i = (N-i)Mg / Nk_{\text{spire}} + mg / k_{\text{spire}}$



$L = L_o + \Sigma \Delta l_i \approx L_o + mg / k + Mg / 2k$  ( en confondant N-1 et N )

*étude en mode continu* : on modifie l'origine et l'orientation de l'axe  
 $T(z+dz) = T(z) + \mu(z)gdz \Rightarrow \partial T / \partial z = \mu(z)g = (M/M)gn(z)$   
 $\mu$  :masse linéique ;  $n$  :nombre de spires par unité de longueur  
 Une tranche de longueur  $dz$  au repos contient  $n_o dz$  spires et prend une longueur  $dz + \Delta L(z) = dz(1 + T(z)n_o / k_{\text{spire}})$  . Le nombre de spires est bien sûr inchangé  $\Rightarrow$   
 $n(z) = n_o / ( 1 + n_o T(z) / k_{\text{spire}} ) \Rightarrow \int dT(z)(...) = \int dz \Rightarrow$



$$L = L_o + Mg / 2k + mg / k$$

**b - Résultats expérimentaux** :  $0.154 < k < 0.16 \text{ N/m}$

**c - Remarque 1**

La masse propre du ressort intervient pour moitié ( $Mg / 2k$ ) . On peut calculer

$$T(z) = kL_o \left( \sqrt{1 + 2Mgz / kL_o^2 + 2mg / kL_o + (mg / kL_o)^2} - 1 \right)$$

$T(z=L) = ( M + m ) g$

**d - Remarque 2** : Un ressort hélicoïdal a pour équation polaire  $r = R ; z = h\theta$   
 $R$  étant le rayon et  $h$  le pas. L'abscisse curviligne reste invariante lors d'un  
 allongement  $s = \theta \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow R dR + h dh = 0 \Rightarrow$

$$R = R_0 \sqrt{1 - (L^2 - L_0^2) / 4\pi^2 N^2 R_0^2} \quad \text{avec } R_0 = 4.225 \text{ cm}$$

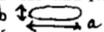
On peut vérifier qu'une spire totalement déroulée voit bien le rayon de l'hélice passer de  $R = R_0$  à  $R = 0$ . Dans les utilisations habituelles la variation de  $R$  est tout à fait négligeable ; ce n'est pas le cas dans l'emploi de l'Ondamania. La relation  $R = f(L)$  est bien vérifiée sauf pour des allongements très conséquents où  $R_{\text{expérimental}} < R_{\text{calculé}}$ . Un essai avec 12 spires de  $L_0 = 1.9$  cm étiré à  $L = 1.25$  m donne  $R_{\text{expérimental}} = 3.65$  cm alors que  $R_{\text{calculé}} = 3.85$  cm. Dans un classique ressort à boudin les spires extrêmes sont ramenées au centre pour donner deux boucles d'attache situées sur l'axe de l'hélice. L'Ondamania garde les extrémités orthoradiales ; il en résulte une déformation accrue des spires correspondantes dont la géométrie n'est plus hélicoïdale. Même en les éliminant de la mesure on trouve un écart entre  $R_{\text{expérimental}}$  et  $R_{\text{calculé}}$  difficile à imputer aux incertitudes opératoires.

**3 - DETERMINATION DU MODULE D'YOUNG**

**a - Constante de torsion**

La torsion résulte de forces tangentielles ; le couple exercé ( $M_{\Delta}$ ) est proportionnel à l'angle de torsion ( $\theta$ ) et le coefficient de proportionnalité appelé constante de torsion ( $C$ ) est relié à la géométrie et à la nature du matériau. Pour un fil cylindrique

$$C = \pi G r^4 / 2l$$

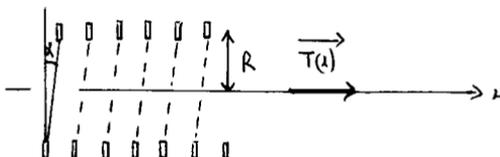
$G$  est le module de cisaillement ou module de rigidité.  $r$  est le rayon du fil et  $l$  sa longueur. Le calcul est classique et développé dans les références 1 et 2. La section du fil de l'Ondamania n'est pas un disque et on l'assimilera à un rectangle avec  $a = 4.8$  mm et  $b = 1.526$  mm . Un examen plus attentif montre d'ailleurs que l'épaisseur  $b$  varie légèrement. Pour un fil de section rectangulaire la référence 1 propose

$$C \approx 0.3 G a^3 b^3 / l(a^2 + b^2)$$

On considère que  $C$  s'écrit d'une façon générale  $0.025 G S^4 / l I_G$  ;  $I_G$  étant le moment d'inertie surfacique  $\int dS r^2$  et  $S$  la section

**b - Relation entre constante de torsion et raideur**

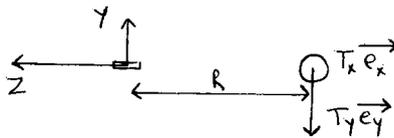
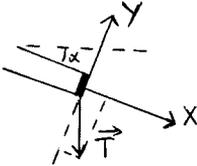
étude théorique :



L'action de la partie aval sur une section droite peut être représentée par  $T(x)$ . Celle-ci est soumise à des couples de torsion et de flexion dus à  $T(x)$  et à des couples de rappel (dus à la partie amont).

L'équilibre mécanique impose :  $TR \cos \alpha = C\theta$

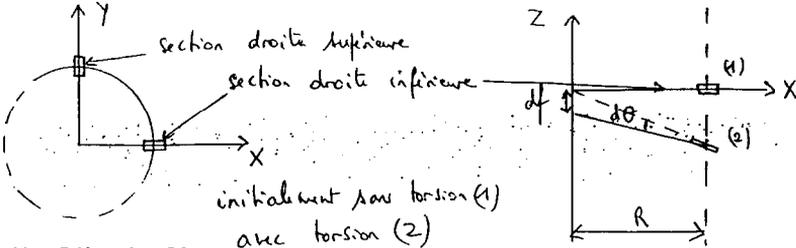
$TR \sin \alpha = lM$  rappel dû à la flexion



On peut calculer la déformation axiale appelée allongement ou flèche.

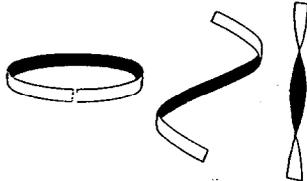
Soit une longueur de 1/4 de spire. L'angle de torsion  $d\theta$  entre les deux sections extrêmes est  $d\theta = (\partial\theta/\partial l)dl$  avec  $\partial\theta/\partial l = \theta/l$ ;  $\theta$  et  $l$  étant respectivement l'angle de torsion et la longueur totale du fil constituant le ressort.

Les déformations suivant  $Oz$  sont exagérées; en réalité il n'y a que torsion et  $d\theta$  reste faible.



$df = Rd\theta \Rightarrow f = R\theta$

On obtient souvent la relation entre la flèche et l'angle de torsion d'une manière plus intuitive: en tirant sur l'anneau de papier pour l'étendre il se trouve tordu d'un angle de  $2\pi$ .



Dans la mesure où on ne considère que la torsion ( $\alpha$  faible) la relation entre  $k$  et  $C$  est immédiate:

$C\theta = TR$  avec  $T = kf \Rightarrow$

$C = kR^2$

**c - Application**

On peut déterminer le module de rigidité  $G$

$G \approx 9.3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ .  $G$  et le module d'Young sont liés  $E = 2G(1+\sigma)$ ,  $\sigma$  appelé coefficient de Poisson et estimé à 0.3 pour les métaux usuels. En conservant cette valeur faute de mieux ( $\sigma < 1/2$ ) on obtient  $E \approx 2.4 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

remarque: Le matériau employé, la géométrie de la section et le rayon de chaque spire expliquent la faible valeur de  $k$ .

**EQUATION D'ONDE - ONDE PROGRESSIVE**

**I - RESSORT HORIZONTAL : Etude théorique**

**a - Ondes transversales**

On a une situation identique à celle d'ondes transversales se propageant le long d'une corde . L'étude permet d'obtenir une équation caractéristique de propagation

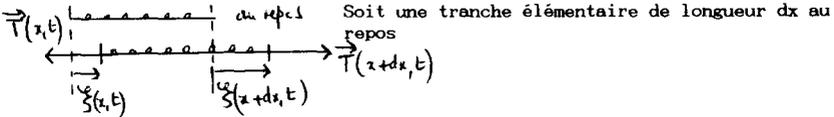
$$\partial^2 \zeta / \partial x^2 - (\mu_0 / T_0) \partial^2 \zeta / \partial t^2 = 0$$

et la célérité de propagation

$$c = \sqrt{T_0 / \mu_0}$$

$T_0$  et  $\mu_0$  étant la tension et la masse linéique à l'équilibre .

**b - Ondes longitudinales**



$\Delta L / L = (\zeta(x+dx, t) - \zeta(x, t)) / dx = \partial \zeta / \partial x$  ; l'allongement relatif correspond à la dérivée spatiale de la fonction élongation

$T(x, t) = T_0 + K \partial \zeta / \partial x(x, t)$  . Le principe fondamental appliqué au tronçon donne

( en supposant  $\zeta$  petit et  $\partial \zeta / \partial x \ll 1$  )  $\mu \approx \mu_0$  et

$\mu_0 dx (d^2 \zeta / dt^2) \approx \mu dx (\partial^2 \zeta / \partial t^2) = T(x+dx, t) - T(x, t) = K (\partial^2 \zeta / \partial x^2) dx$  soit

$$\partial^2 \zeta / \partial x^2 - (\mu_0 / K) \partial^2 \zeta / \partial t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$c = v_\varphi = \sqrt{K / \mu_0}$$

**c - Remarque 1**

$K = kL$  et  $T_0 = k(L - L_0)$  si  $L_0 \ll L$  ce qui est le cas de

l'Ondamania :  $T_0 \approx K \Rightarrow$  oscillations longitudinales et transversales se propagent à la même célérité . L'étude expérimentale confirme toutes ces relations sans poser de problème particulier .

**d - remarque 2 ou constante du temps de parcours**

$v_\varphi = \sqrt{K / \mu_0}$  (ou  $\sqrt{T_0 / \mu_0} \approx \sqrt{kL / (M / L)}$  ) =  $L \sqrt{k / M}$  La célérité est proportionnelle à la longueur et le temps que met la perturbation pour parcourir une longueur de ressort soit  $t_{aller} = L / c = \sqrt{M / k}$  est constante

$t_{aller}$  théorique  $\approx 0.80$  s ;  $t_{aller}$  expérimental pour des longueurs allant de 1.50 m à 2.60 m varie effectivement peu de 0.80 s à 0.86 s .

**e - Remarque 3**

$t_{aller}$  à peu près stable pour les longueurs citées décroît ensuite . Pour une longueur de 3.93 m j'obtiens un  $t_{aller}$  de 0.67 s . Le ressort est passablement étiré et je pense qu'à la torsion s'ajoute de la flexion : le modèle adopté n'est plus valable .

## 2 - RESSORT HORIZONTAL : Etude de la dispersion

### a - Dispositif d'étude



Quel que soit la fréquence un phénomène d'ondes stationnaires s'établit faisant apparaître 1+ε fuseau



Les mesures de fréquence ont été effectuées avec tachymètre ( par méthode optique ou par contact )

La mesure de  $L_{\text{fuseau}}$  et de  $f$  permettent de déterminer  $c$

### b - Résultats

fréquence (en Hz)	0.867	1.25	1.39
$L_{\text{fuseau}}$ (m)	2.45...	1.55	1.41
$c_{\text{expérimental}} = 2fL$	4.26	3.875	3.92

### c - Remarques et conclusion

L'écart de fréquence , la précision des mesures sont trop limitées pour pouvoir en tirer une conclusion solide . Cette expérience avait en fait un autre but et je ne la mentionne que parce qu'on obtient un phénomène d'ondes stationnaires avec un nombre non entier de fuseaux , que l'influence de l'excitateur y est évidente (voir problème résolu dans la référence 8)

## 3 - RESSORT VERTICAL (sans négliger la masse propre du ressort)

a- calcul de la durée de propagation d'un bout à l'autre :

$$c(z) = dz/dt = \sqrt{T(z)/\mu(z)} = f(z) \text{ avec } \mu(z) = n(z)M/N = M/(L_0 + T(z)/k) \rightarrow$$

$$t_{\text{aller}} = \int dt = \int (dz/f(z)) . \text{ Une intégration calculée selon la méthode de Simpson donne pour } m = 0 \text{ } t_{\text{aller}} = 0.79 \text{ s} .$$

b- étude expérimentale :

Sur 10 chronométrages aller-retour effectués "manuellement" , 5 sont compris entre 1.61 et 1.63 s , les autres étant peu différents .

## 4 - CONCLUSION

Ondamania est caractérisée par un temps de parcours de 0.8 s

**IMPEDANCE DE L'ONDAMANIA**

**1 - INTERET DE LA NOTION D'IMPEDANCE**

Que ce soit en électronique , en mécanique , en acoustique l'impédance quantifie le comportement du système sans se préoccuper de sa constitution .

**2 - IMPEDANCE DU RESSORT**

Soit un point M ∈ au milieu de propagation ; ce point M est sollicité par une onde progressive

$$\zeta(M, t) = \zeta(0, t - OM/c) \rightarrow \zeta_0 e^{j(\omega t - \omega x/c)}$$
 si on admet un ébranlement sinusoïdal

$$T(M, t) = T_i + K(\partial\zeta / \partial x)(M, t) \Rightarrow T(M, t) = T_i - (K/c)v(M, t)$$
 Si on applique le

principe fondamental au point M  $\vec{F}$  du à l'amont +  $\vec{F}_{aval} = \vec{0}$  on obtient

$\vec{F}_{amont} = -\vec{T}_i + (K/c)v(M, t) = \vec{F}_0 + \vec{f}$  . Le ressort se comporte comme un récepteur de f.c.é.m constante  $T_i$  et d'impédance Z ; la surtension responsable de la propagation s'écrit  $\vec{f} = Z\vec{v}$

$$Z = \sqrt{K\mu} = \sqrt{kM}$$

$Z \approx 0.124 \text{ N.s.m}^{-1}$  . Le ressort à boudin métallique commercialisé par Jeulin a une impédance de  $0.27 \text{ N.s.m}^{-1}$  . Si l'onde est progressive l'impédance est réelle et indépendante de x et de t .

**3 - REMARQUE 1**

coefficients de réflexion et de transmission :

Un calcul classique donne les formules de passage d'un dioptré mécanique :

$$r = A_r / A_i = (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2) \quad ; \quad t = A_t / A_i = 2Z_1 / (Z_1 + Z_2) \quad ; \quad A_i, A_r, A_t$$

étant les amplitudes complexes des ondes incidente, réfléchié et transmise au point O situé sur le dioptré .

d- bouclage sur l'impédance itérative :

étude théorique :

Le milieu 2 doit se comporter comme un récepteur de f.c.é.m  $T_i$  et d'impédance réelle  $Z_2$  telle que  $Z_2 = Z_1 = kM$  . Le montage suivant peut dans certaines conditions convenir :

si la poulie est sans masse et sans frottement

$$T(t, t) = T(m, t)$$

si le fil est inextensible et reste tendu

$$v(t, t) = v(m, t)$$

si la masse est soumise à une force de frottement fluide

$$\vec{f}_r = -h\vec{v}$$

si enfin la source impose une vibration sinusoïdale

$$T(m, t) = -mg + jm\omega\vec{v} + h\vec{v}$$

$mg$  est la f.c.é.m  $T_i$  et  $Z_2 = h + jm\omega$  ; en travaillant à basse fréquence  $\omega \ll Z/m$  alors  $Z_2 \approx h$  .

étude expérimentale : La faiblesse de la raideur du ressort impose l'utilisation de petites masses et les frottements au niveau de la poulie interdisent pratiquement ce montage . Une solution consiste à disposer verticalement un ressort raccourci ( k supérieur ,  $M \ll m$  suspendue ) auquel on attache une plaque d'Al oscillant dans l'entrefer d'un aimant ( voir référence 6 )

e- remarque 1 ; ambigüité du mot impédance :

$Z = \sqrt{kM} = \sqrt{k_{\text{spire}} m_{\text{spire}}}$  ; le même mot impédance recouvre en fait deux concepts différents :

- l'une grandeur intensive  $\sqrt{k_{\text{spire}} m_{\text{spire}}}$  , caractéristique du milieu dans lequel s'effectue la propagation .C'est ainsi qu'on parlera d'impédance du vide

- l'autre décrivant le comportement global d'un système : impédance d'un dipôle .

Dans le cas d'ondes stationnaires Z n'est plus uniforme et s'écrit Z(x)

f- remarque 2 ; couplage raideur - masse propre :

Si le ressort était sans raideur (k = 0) il se comporterait comme un poids mort de masse M , l'impédance serait  $Z = jM\omega$  et après une phase très brève d'établissement du champ d'énergie cinétique (énergie récupérable à la fin de la manipulation) la puissance développée par l'excitateur serait nulle . Pour un ressort de raideur k et de masse nulle  $Z = k/j\omega$  . l'impédance est imaginaire et la consommation énergétique en régime établi est nulle .

Dans le cas de l'Ondamania (comme dans le cas d'une ligne) chaque spire devient tour à tour masse puis ressort , l'un transformant l'énergie cinétique de l'autre en énergie potentielle et vice-versa . Il y a propagation d'énergie assurée de la même façon qu'en électromagnétisme par le couplage E,B .On constate encore que le couplage intime de deux manifestations différentes d'une

même réalité traduit une propagation d'énergie , un peu comme ces produits binaires que l'on doit réunir pour qu'il y ait une action efficace .

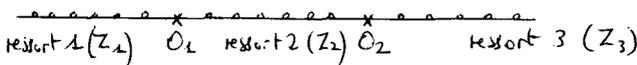
g- vecteur de Poynting :

Appliquons le premier principe à une tranche de longueur dx au repos , comprise entre les points  $P_{\text{amont}}$  et  $P_{\text{aval}}$  . Les échanges énergétiques avec l'amont seront quantifiés sous la forme d'un travail :  $W(\vec{T}_{\text{amont}})$  alors qu'on exprimera les échanges avec l'aval par l'intermédiaire d'un débit d'énergie correspondant au flux du vecteur de Poynting . Les échanges avec l'air ambiant (acoustiques) et les phénomènes dissipatifs seront négligés .

$$d/dt( U + E_c + E_p ) = \delta W(\vec{T}_{\text{amont}}) / dt - \iint_{S_{\text{aval}}} \vec{R}_P \cdot d\vec{S}$$

$\delta W(\vec{T}_{\text{amont}}) / dt = F_o v_p + Z v_p^2$  avec  $v_p = -w \zeta_{\text{omax}} \sin ( \omega t - \omega x / c )$  . En régime établi et en calculant sur un temps  $\Delta t \gg T$   $\Delta( U + E_c + E_p ) = 0$  et  $Z w^2 \zeta_{\text{omax}}^2 / 2 = \langle R \rangle \pi R^2 \Rightarrow \langle R \rangle = Z w^2 \zeta_{\text{omax}}^2 / 2 \pi R^2$

h- traitement anti-reflet :



Un calcul classique ( références 7 et 8 ) montre que l'absence de réflexion en  $O_1$  peut être obtenue de deux manières :

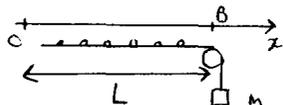
$L = nc_2 / 2f$  et  $Z_1 = Z_3$  ( ressorts extrêmes identiques ,  $O_1$  et  $O_2$  sont des noeuds de vibration )

$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$  et  $L = (n + 1/2) c_2 / 2f$  ( le ressort 2 joue le rôle d'adaptateur d'impédance ) . Les analogies habituelles suggèrent l'emploi de tels dispositifs en électronique ,optique et acoustique ( on ne m'a pas attendu ) .

**ONDES STATIONNAIRES ET MODES NORMAUX**

**1 - RESSORT HORIZONTAL**

**a - Etude théorique : première version**



La propagation et les conditions aux limites imposent un phénomène d'ondes stationnaires dont l'étude vise à déterminer les fréquences propres. Chaque spire subit une élongation  $\zeta(x,t) = f(x)g(t)$ ;  $g(t)$  pouvant être de la forme  $\cos(\omega t + \varphi)$ . Le mouvement étant périodique  $g(t)$  pourra toujours être exprimé en série de Fourier. Le phénomène n'étant qu'un cas particulier de la propagation vérifie  $1/c^2 \{\partial^2 \zeta / \partial t^2\} = \partial^2 \zeta / \partial x^2 \Rightarrow f''(x) + \omega^2/c^2 f(x) = 0$ . Les conditions en O impliquent  $f(x) = B \sin \omega x/c$  et le principe fondamental appliqué à la masse m (avec les précautions d'usage concernant le fil, la poulie) donne  $m d^2 \zeta(L,t) / dt^2 = -m \omega^2 \zeta(L,t) = -k \partial \zeta / \partial x(L,t) = mg$  compensant  $T_i$ . Le calcul aboutit à

$m\omega / k = \cotg \omega L / c$	ou encore	$m\omega / Z = \cotg M\omega / Z$
------------------------------------	-----------	-----------------------------------

**b - Etude théorique : deuxième version**

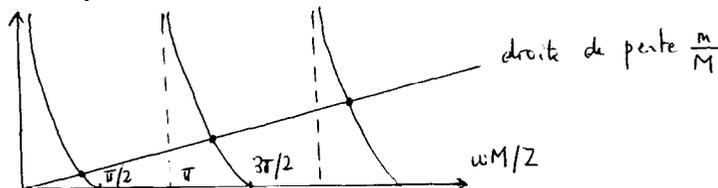
La corde est le siège d'un phénomène d'ondes stationnaires correspondant à la superposition d'une onde incidente  $\zeta_i(M,t)$  et d'une onde réfléchie  $\zeta_r(M,t)$

$$\zeta_i(M,t) = \zeta_i(B,t + MB/c) \rightarrow A_i e^{j(\omega t + \omega(L-x)/c)}$$

$$\zeta_r(M,t) = \zeta_r(B,t - MB/c) \rightarrow A_r e^{j(\omega t - \omega(L-x)/c)}$$

avec  $A_r/A_i = (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2) = (Z - j\omega m) / (Z + j\omega m)$ . La réflexion est totale mais s'effectue avec un déphasage. Les conditions aux limites imposent  $\zeta(0,t) = \zeta_i(0,t) + \zeta_r(M,t) = 0$  quelque soit  $t \Rightarrow m\omega / Z = \cotg \omega L / c$

**c - Remarque 1 solutions graphiques :**



Ne sont présents que les harmoniques impairs dont la fréquence n'est pas un multiple entier de la fréquence fondamentale. Une augmentation de m entraîne une augmentation de la période d'oscillation. Pour  $m = \infty$  "l'avant premier mode" correspond à  $\omega = 0$  tandis que le premier mode ou mode fondamental a une fréquence telle que  $L = \lambda / 2$ ; on obtient tous les harmoniques dont la fréquence est un multiple entier du fondamental.

**d - Cas particuliers**

$m \rightarrow 0$

$f \rightarrow (2n+1)c / 4L$  et  $L \rightarrow (2n+1)\lambda / 4$  .L'extrémité est un ventre de vibration et un noeud de tension .

$m \rightarrow \infty$

$L \rightarrow n\lambda / 2$  et  $f \rightarrow nc / 2L$  .L'extrémité est un noeud d'élongation et un ventre de tension .

$\mu \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow \infty$  . La vitesse de propagation devient infinie ; toutes les spires sont dans le même état vibratoire :  $w \rightarrow \sqrt{k/m}$  . C'est le résultat classique d'un ressort sans masse .

**e - Remarque 2**

$\zeta_i(M,t) \rightarrow A_i e^{-j(\omega t + w(L-x)/c)}$  et  $\zeta_r(M,t) \rightarrow A_r e^{j(\omega t - w(L-x)/c)}$  . Il n'y aura noeud d'élongation que si  $|A_i| = |A_r| \Rightarrow |Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2| \Rightarrow Z_2$  est un imaginaire pur ( ressort sans masse ou masse sans raideur ) .

**f - Remarque 3**

rapport entre élongation et surtension :

Soit le cas d'un ressort fixé aux deux extrémités  $\Rightarrow Z_2 = \infty \Rightarrow A_r = -A_i \Rightarrow$

$\zeta(M,t) = \zeta_i(M,t) + \zeta_r(M,t) \rightarrow 2(A_i \sin w(L-x)/c) e^{j(\omega t + \pi/2)}$   
 $T(M,t) = T_e + K\partial\zeta / \partial x(M,t) \rightarrow T_e - 2(A_i Zw \cos w(L-x)/c) e^{j(\omega t + \pi/2)}$

Il y a phénomène d'ondes stationnaires pour la tension . A tous les noeuds d'élongation obtenus pour  $L-x = n\lambda / 2$  correspondent simultanément des ventres de surtension avec  $|t| = 2A_i Zw$  . Tous les points compris entre deux noeuds d'élongation  $N_1(x_1)$  et  $N_2(x_2)$  sont tels que  $\sin w(L-x)/c$  conserve son signe  $\Rightarrow$  tous ces points vibrent en phase et bien sur en opposition de phase avec les points du fuseau contigu .

**g - Manipulation n° 1**

conditions opératoires :

Travail avec extrémités fixes ; excitation par corde entraînée par un excentrique ( lieu d'excitation variable ) ou excitation à la main puis oscillations libres .

résultats obtenus :

L	2.64 m	2.95 m
Ti	0.38 N	0.43 N
K	0.4 N	0.44 N
$v_{\phi}$ transversal	3.25 m/s	3.63 m/s
$v_{\phi}$ longitudinal	3.3 m/s	3.69 m/s
fréquences trans théor	$n \times 0.615$ Hz	$n \times 0.615$ Hz
fréquences long théor	$n \times 0.625$ Hz	$n \times 0.63$ Hz
résultats expérimentaux	ondes trans 0.71 Hz (1 fuseau)	1 fus à 0.76 Hz
	1.28 Hz (2 fus)	2 fus trans à 1.28
	1.32 Hz (2 fus)	1 fus long à 0.75 2 fus long à 1.465

remarques :

Les fréquences transversales sont toujours un peu inférieures aux fréquences longitudinales ainsi que le veut  $v_{\phi \text{ transversal}} \leq v_{\phi \text{ longitudinal}}$

La manipulation est sommaire et de précision médiocre mais reste fascinante qualitativement : dès que l'excitateur approche d'une des fréquences propres (transversales ou longitudinales) du système , le ressort se met à onduler



**ONDES STATIONNAIRES DE TORSION**
**1 - EQUATION DE PROPAGATION**

Soit  $\theta_0(z)$  l'angle de torsion à l'équilibre.  $\theta_0(z)$  peut être égal à 0 ou non nul. Soit  $\zeta(z,t)$  l'écart angulaire par rapport à cette position d'équilibre et soit  $\mathbb{C}$  la constante de torsion par unité de longueur.  $\mathbb{C} = Cl$ . Soit  $\Gamma(z,t)$  le couple de torsion.  $\Gamma(z,t) = \Gamma_0$  (couple à l'équilibre) +  $r(z,t)$  (moment de surtorsion dû à la propagation d'un ébranlement)

$$\Gamma(z,t) = C\theta_0(z) + C\partial\zeta/\partial z(z,t) = C\theta_0(z) + C\partial\theta/\partial z(z,t)$$

Appliquons le théorème du moment cinétique à la portion de longueur  $dz$

$$Jdz \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \Gamma(z+dz,t) - \Gamma(z,t) = \mathbb{C}(\partial\theta/\partial z(z+dz,t) - \partial\theta/\partial z(z,t))$$

$J$  : moment d'inertie par unité de longueur

$J/C (\partial^2\theta/\partial t^2) = \partial^2\theta/\partial z^2$ . On reconnaît une équation de propagation avec la vitesse de phase

$$v_\varphi = c = \sqrt{\mathbb{C} / J}$$

**2 - ETUDE EXPERIMENTALE**

vitesse de propagation :  $l = 2\pi RN \approx 15.1 \text{ m}$  ;  $t_{\text{aller}} \approx 0.8 \text{ s} \Rightarrow c \approx 18.9 \text{ m/s}$  ( le long du fil constituant le ressort )

**3 - REMARQUE** comment modifier la vitesse de propagation du signal :

Lors d'oscillations longitudinales le ressort travaille par torsion.

$\mathbb{C} = kR^2 = k_{\text{ressort}} L_{\text{ressort}} R^2$ . L'axe instantané de rotation passe par l'axe de l'hélice et

$J_\Delta = J_G + \mu R^2 \approx \mu R^2$  C'est donc le rayon du ressort important entraînant par conséquent un moment d'inertie élevé qui donne des vitesses de propagation perceptibles. Pour le même fil totalement déroulé la vitesse de propagation serait de :

$$\mathbb{C} = Cl_{\text{fil}} = kR^2 2\pi RN ; J = M(a^2+b^2)/12l_{\text{fil}} \Rightarrow c \approx 566.4 \text{ m/s}$$

**4 - ISOCHRONISME DES OSCILLATIONS OU COMPTE-RENDU D'UNE EVIDENCE**

$\mathbb{C} \approx \mu R^2 = MR^2/L_{(\text{ressort})}$  et  $c = \sqrt{\mathbb{C}/J} = L \sqrt{k/M}$  ce qui correspond à un  $t_{\text{aller}} = \sqrt{M/k}$ . On retrouve la même expression.

Les oscillations du ressort sont donc des ondes stationnaires de torsion dont on obtient le premier mode; l'extrémité est un ventre de torsion. Les périodes propres ont un rapport étroit avec le temps d'aller-retour total du signal ( aller-retour = excursion dans la masse + parcours fil. )

L'isochronisme relève d'un seul et même phénomène et il est

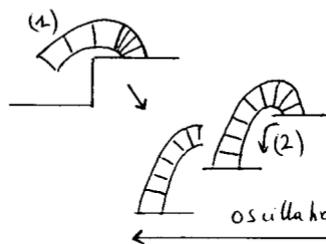
obligatoire ( tant qu'il n'y a pas flexion ); la durée de propagation du signal de torsion est identique puisque le chemin à parcourir n'est pas modifié.

**5 - SAUTS D'ESCALIER**

*explication :*

Décrivons rapidement : le ressort posé sur 2 escaliers successifs continue à descendre tout seul pour peu que la géométrie s'y prête ( hauteur et largeur des marches ). Les énergies potentielles de pesanteur et élastiques (torsion et flexion) initiales se transforment en énergie cinétique qui à son tour... Chaque ressort a sa période propre égale au temps que met l'ébranlement de

torsion pour parcourir la longueur aller-retour du fil . Le passage d'un escalier à un autre correspond à une 1/2 oscillation .



- (1) mouvement de jeter analogue au rebond lors d'un choc et pratiquement instantané  
 (2) oscillations qui débutent vraisemblablement pendant la phase (1)

$$\Delta t \approx t_{\text{oscillations}}$$

étude expérimentale :

	masse	impédance	$t_{AR}$	mesures
ressort métallique de Jeulin	149.2g	$\approx 0.27$ $Z = kM$	1.10 s $2M/Z$	de 1.03 à 1.12 s pour 2 intervalles soit T
ressort Ondamania	96.4g	$\approx 0.124$	1.55 s	de 3.40 à 3.48 s pour 4 intervalles soit $1.70 < T < 1.74$

## 6 - CALCULS DE LA DUREE D'ALLER-RETOUR dans le cas d'une extrémité fixée sur une impédance de type masse

### a- Préliminaires

Si l'extrémité du ressort est libre il y a réflexion sans déphasage et les fréquences de résonance sont telles que  $t_{AR} = T/2 + nT$  avec  $t_{AR} = 2L/c$ . Si l'extrémité est fixe il y a déphasage de  $\pi$ , l'onde a une élongation qui change de signe et les fréquences de résonance sont telles que  $t_{AR} = T + nT$  avec  $t_{AR} = 2L/c$ . J'ai émis l'hypothèse d'un signal de torsion dont la durée de propagation d'un bout à l'autre du fil est une constante. On peut donc se poser plusieurs questions :

- quand s'effectue le passage d'une situation d'impédance nulle ( $m=0$ ,  $\varphi_{\text{réflexion}}=0$ , retour sans changement de signe de l'élongation) à une situation d'impédance infinie ( $m=\infty$ ,  $\varphi_{\text{réflexion}}=\pi$ , retour avec changement de signe)? Il y a en général continuité.

- comment concilier une durée de parcours constante dans le fil constituant le ressort avec la présence d'ondes stationnaires de torsion dont les modes propres dépendent de la masse?

- L'impédance terminant le ressort introduit un déphasage; dans le cas d'une onde le problème est banal mais quelle en est la conséquence dans le cas d'un ébranlement unique?

### b - Etude expérimentale

ressort horizontal avec masse accrochée :

m	20 g	30 g	40 g	60 g
t de parcours dans le fil	1.48 s	1.59 s	1.59 s	$\approx 1.35$ s
$t_{AR}$	1.65 s	1.64 s	1.69 s	$\approx 1.55$ s

remarques :

On peut émettre quelques réserves . L'impédance due aux frottements au niveau de la poulie n'est pas négligeable ; cette impédance ,même si elle est réelle, entraîne un déphasage différent . Le couplage entre la masse et le ressort s'effectue par l'intermédiaire d'une ficelle et n'est pas direct : quelle en est l'incidence ?

Même dans le cas d'une réflexion sur une masse infinie  $t_{AR}$  est légèrement supérieur à  $2x_{aller}$  : je l'impute à la fixation un peu lâche du ressort au contrepoids le maintenant .

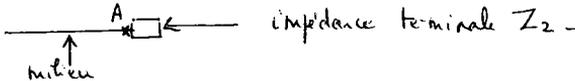
Les ébranlements sont difficilement reproductibles et si on les gère en tant que paquets d'ondes la distribution spectrale du paquet peut donc varier d'une mesure à l'autre et avoir pour conséquence un déphasage différent lors de la réflexion .

Physiquement le déphasage dû à la réflexion peut se concevoir assez facilement : le transfert d'énergie de l'onde progressive à la masse (Ec) puis le retour au milieu propagateur ne s'effectue pas instantanément . Si on applique la formule au ressort Ondamania on peut aller jusqu'à des  $t_{excursion}$  de 0.16 s (pour 10 g) .

c - traitement de l'ébranlement en terme de paquets d'onde

étude :

On peut considérer l'ébranlement comme un paquet d'ondes . Son extension spatiale est de l'ordre de 1 à 2 spires ; son spectre est donc a priori très riche .



On a vu que  $\zeta_r(A,t) = \zeta_i(A,t)(Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2) = H(j\omega)\zeta_i(A,t)$  avec  $Z_2 = j\omega m$  . Il s'en suit donc un déphasage de  $\zeta_r(A,t)$  par rapport à  $\zeta_i(A,t)$  ;  $\zeta_r(A,t)$  a un retard  $\varphi = \text{Arg} (Z_1 - j\omega m) / (Z_1 + j\omega m) = - 2 \text{Arctan } \omega m / Z$  et  $\varphi \in [0, \pi[$

Soit  $u_0(t)$  un signal émis en O dont le spectre est  $g(\omega) = |g(\omega)|e^{j\alpha(\omega)}$   
 $u_0(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|e^{j(\omega t + \alpha(\omega))} d\omega$ . Le milieu n'étant pas dispersif il n'y a pas déformation et étalement du paquet d'ondes  
 $u_i(A,t) = 1/2\pi \int |g(\omega)|e^{j(\omega(t-L/c) + \alpha(\omega))} d\omega$  . Soit  $\varphi(\omega)$  le déphasage dû à la réflexion :  $H(j\omega) = e^{j\varphi(\omega)}$  et  $u_r(A,t) = 1/2\pi \int |g(\omega)|e^{j(\omega(t-L/c) + \alpha(\omega) + \varphi(\omega))} d\omega$

Conformément au principe de la phase stationnaire les instants de localisation - du signal émis en O :  $t_0 = - d\alpha/d\omega$

- du signal incident en A :  $t_1 = - d\alpha/d\omega + L/c$
- du signal réfléchi en A :  $t_2 = - d\alpha/d\omega + L/c - d\varphi/d\omega = t_1 - d\varphi(\omega)/d\omega$

Le déphasage de chacune des composantes du paquet d'ondes correspond à un retard temporel et entraîne une déformation de l'ébranlement .

le retard est  $2d/d\omega( \text{Arctan } \omega m / Z ) = \boxed{ 2\omega Z / ( Z^2 + \omega^2 m^2 ) = t_{excursion} }$

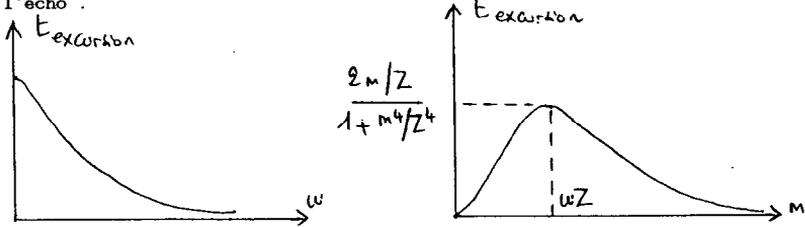
On a donc  $t_{AR} = t_{ARfil} + t_{excursion}$

J'imagine ( sans l'avoir vérifié ) que ce retard doit être utilisé dans les systèmes de leurres et la création d'images artificielles . On comprend aussi la signature radar de chaque appareil et la signature tout court de chaque objet réfléchissant des ondes qu'elles soient lumineuses ou acoustiques .

Il faut rester prudent cependant : un paquet d'ondes très regroupé autour d'un  $\omega_0$  est très étendu spatialement et la localisation de l'ébranlement est sans doute plus délicate .

remarques :

$m = 0$  (extrémité libre )  $t_{excursion} = 0$  et  $t_{AR} = t_{ARfil}$   
 $m = \infty$  (extrémité fixe )  $t_{excursion} = 0$  et  $t_{AR} = t_{ARfil}$  ; c'est le principe de l'écho .



$Z \rightarrow 0$  (ressort sans masse )  $t_{ARfil} = 0$  et  $t_{excursion} = 0$  . On aboutit à une incohérence : le signal nécessite un milieu matériel pour se propager et négliger la propagation est une vue de l'esprit .

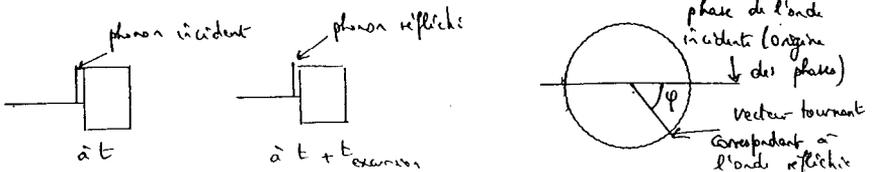
d - Traitement corpusculaire de la propagation et de la réflexion

Je tente un exercice périlleux et j'invite le lecteur à considérer les lignes qui suivent comme une bonne blague . Soit un phonon représentant l'ébranlement transversal se propageant le long d'une corde et d'énergie bien définie  $E = h\omega/2\pi$  (  $h = h_{gravitationnel}$  ) . La conservation du moment cinétique impose au phonon durant son parcours sur la corde 2 états propres  $|haut\rangle_y$  et  $|bas\rangle_y$  avec une valeur propre commune  $a$  (  $a$  étant l'amplitude de l'ébranlement et le phonon étant localisé au maximum de l'ébranlement ) Calculons  $t_{AR}$  du phonon .

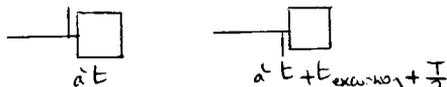
$$t_{AR} = t_{ARfil} + t_{excursion} ; t_{ARfil} = 2M/Z ;$$

$$t_{excursion} = |\phi| / \omega = 2 (Arctan m\omega / Z) / \omega$$

Deux cas se présentent :  
 comportement extrémité libre :



comportement extrémité fixe :



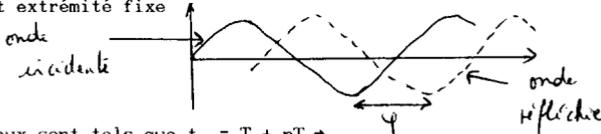
A l'intérieur de la masse le ket  $|\text{phonon}\rangle$  représentatif de l'état du phonon peut s'écrire  $|\text{phonon}\rangle = \alpha_{haut} |haut\rangle_y + \alpha_{bas} |bas\rangle_y$  . La sortie de l'impédance equivaut à une mesure , lève l'incertitude et oblige le phonon à prendre un état propre .

recherche des modes normaux :

si comportement extrémité libre  $t_{AR} = 2M/Z + 2 (\text{Arctan } mw/Z)/w$  et les modes normaux sont caractérisés par le fait que  $t_{AR} = T/2 + nT \Rightarrow$

$Mw/Z + \text{Arctan } mw/Z = \pi/2$  (à  $n\pi$  près)  $\Rightarrow Mw/Z$  et  $\text{Arctan } mw/Z$  sont complémentaires  $\Rightarrow \cotg Mw/Z = mw/Z$ . On retrouve la condition de quantification obtenue précédemment. Lorsque  $m$  augmente  $t_{excursion}$  est de plus en plus long et les périodes permises aussi. Pour un ressort de masse négligeable  $t_{ARfil} \ll t_{excursion}$  et les périodes propres sont données par  $2\pi\sqrt{m/k}$

Si comportement extrémité fixe



Les modes normaux sont tels que  $t_{AR} = T + nT \Rightarrow$

$$2M/Z + 2 (\text{Arctan } mw/Z)/w + T/2 = T + nT \Rightarrow$$

$2M/Z + 2 (\text{Arctan } mw/Z)/w = T/2 + nT$ . On obtient la même condition de quantification  $\Rightarrow \cotg Mw/Z = mw/Z$

remarque 1 : que se passe-t-il pour  $m \infty$  ?

L'analyse de la courbe donnant les pulsations propres  $w$  en fonction  $m$  donne un premier mode pour  $w = 0$  ( la corde est tendue ,  $E_{phonon} = 0$ , il n'y a pas de phonon ou celui-ci a une extension temporelle ou spatiale infinie ) . Le deuxième mode est obtenu pour  $Mw/Z = \pi$ .  $\zeta_r(A,t)$  et  $\zeta_i(A,t)$  sont en opposition de phase  $\Rightarrow$  lorsque  $\zeta_i(A,t)$  a son élongation maximale le phonon incident est représenté par le ket  $|a_{\text{haut}}\rangle$ , un phonon réfléchi est simultanément dans l'état propre  $|a_{\text{bas}}\rangle$  avec la valeur propre  $a$ .

La réflexion immédiate avec changement de signe s'explique facilement : le phonon qui s'est présenté en A n'était pas le bon et appartenait au précédent convoi mais comme les phonons sont indiscernables tout le monde n'y a vu que du feu .

remarque 2 :

Apparemment le retour s'effectue toujours sans changement de signe ( sauf pour  $m \infty$  ) : il y a toujours un phonon dans l'état propre  $|a_{\text{haut}}\rangle$  pour offrir ses services avant son concurrent , cette situation étant liée à l'irréversibilité du temps .

remarque 3 :

La terminaison du ressort sur un autre ressort sans masse ( $Z_2$  imaginaire pur ) donnerait une avance de phase , un aller-retour plus court et un retour avec changement de signe de l'élongation .

remarque 4 :

M. Allard (voir référence 3) étudie une ligne à retard à partir des fréquences des modes propres . La différence  $\Delta N$  entre 2 modes consécutifs est de 20 Hz et M. Allard en conclut que le signal parcourt la ligne en  $\approx 25$  ms . On peut reprendre le même problème ainsi : les deux extrémités étant non fixes on doit avoir  $t_{AR} = t_{ARfil} + t_{excursion} \approx t_{ARfil} + nT = (n+1)T_{n+1}$  ;  $T_n$  et  $T_{n+1}$  étant 2 périodes propres  $.1/T_n - 1/T_{n+1} = 20 \text{ Hz} \Rightarrow$  on obtient  $t_{ARfil} \approx 50 \text{ ms} \Rightarrow t_{aller} \approx 25 \text{ ms}$  . A partir de la détermination précise de  $t_{AR}$  effectuée par M.Allard on

pourrait calculer l'impédance mécanique des extrémités .A ce sujet M.Allard utilise des coefficients de réflexion  $r$  et  $r'$  réels ; il est vraisemblable que les impédances des extrémités présentent un terme supplémentaire d'inertie :  $r$  et  $r'$  sont donc complexes avec  $|r|$  et  $|r'| < 1$ .

remarque 5 :

$t_{AR} = (2n+1)T/2 \Rightarrow f_n = (2n+1)/2t_{AR} = f(w) \Rightarrow$  les harmoniques ne seront pas des multiples entiers du fondamental .

remarque 6 :

$t_{excursion}$  diminue avec la fréquence ; on peut l'expliquer par l'inertie de la masse mais on peut aussi évoquer un effet de peau gravitationnel .

## OSCILLATIONS DE RESSORT TRAITEMENT EN TERME DE PROPAGATION

### 1 - VALIDITE DE $T = - kx$

Les oscillations de ressort sont donc des ondes stationnaires de torsion ; l'élongation de chaque spire  $k$  est une combinaison linéaire :  $\zeta_k(x,t) = \sum_j a_j(x) \cos(\omega_j t + \phi_j)$  ;  $n$  étant le nombre de degrés de liberté et par conséquent de modes ,  $\omega_j$  étant une des pulsations propres du système .

En règle générale le premier mode écrase les autres (fréquence des harmoniques  $\approx$  multiples entiers de la fréquence du fondamental qui donne la note , conditions initiales adéquates , termes énergétiques en  $1/n$  ou  $1/n^2$  qui défavorisent les harmoniques supérieurs , divers ...) et on le prendra seul en compte .

L'étude dynamique fait écrire systématiquement  $T_x = - k(L - L_0)$  .  $L$  est l'abscisse de la dernière spire , l'origine de l'axe est confondue avec la position au repos de la première spire . Ceci est vrai en statique et vraisemblablement au moment du lâcher . Si on désigne par  $x$  les positions des spires dans la situation initiale d'équilibre  $\zeta$  est une fonction affine de  $x$  :  $\zeta(x,t) = ax + b$  , avec  $b = 0$  et  $a = (L - L_i)/L_i \Rightarrow$

$T(x,t) = T_i + K\partial\zeta/\partial x(x,t) = T_i + Ka = cte(x) = T_i + K(L - L_i)/L_i = T_i + k(L - L_i)$  (rappelons que  $K = kL_i$ ) . En particulier si la situation initiale était la situation de repos :  $T_i = 0$  ,  $L_i = L_0$  et on a bien  $T = k(L - L_0)$  .

Mais qu'en est-il lors du mouvement ? Dans un phénomène d'ondes stationnaires sinusoïdales  $\zeta(x,t)$  s'écrit  $A_0 \sin 2\pi x/\lambda \cos(\omega t + \phi)$  et on ne pourra confondre  $\sin 2\pi x/\lambda$  avec  $ax$  que si  $x \ll \lambda$  .

Effectuons un calcul précis pour un ressort usuel :

$M =$  masse du ressort = 10.5 g ;  $k =$  raideur = 105.3 N/m ;

$L_0 = 6.6$  cm ;  $L_e = 8.5$  cm ;  $m_{suspendue} = 204$  g ;

$K = 8.95$  N ; période propre  $T \approx 2\pi \sqrt{m/k} = 0.28$  s ;  $c = L \sqrt{k/M} = 8.5$  m/s

$\lambda = 2.35$  m ;  $L/\lambda \approx 0.036$  ;  $2\pi L/\lambda = 0.227$  rad ;  $\sin(2\pi L/\lambda) = 0.225$

On constate donc que  $T_x = -kx$  n'est vérifié que si les phénomènes de propagation peuvent être négligés ( c'est l'approximation ARQS en mécanique ) . L'impression d'un même état vibrationnel pour toutes les spires est facile à comprendre : elles vibrent en phase , appartenant au même fuseau .En outre il faut souligner la précision toute relative des mesures mécaniques .

Il est vraisemblable que le passage d'une situation  $\zeta(x) = ax$  à une situation  $\zeta(x) = A_0 \sin 2\pi x/\lambda$  est progressif .

Cas des oscillations amorties ; prise en compte des phénomènes de propagation : J'ai exprimé les oscillations comme des ondes stationnaires de torsion dont seul le premier mode était apparent ; les périodes propres en considérant le point d'attache du ressort comme fixe satisfont la relation  $t_{AR} =$

$t_{ARfil}$  (souvent négligeable) +  $t_{excursion} = (2n+1)T/2 = T/2$  ( $n = 0$ ) .  $t_{excursion}$  est dû à la partie imaginaire de l'impédance terminant le ressort . Dans le cas d'oscillations amorties apparaît un terme réel qui apparemment n'a aucune influence sur  $t_{excursion}$  ; comment se fait-il alors que la pseudo-période puisse être affectée par le coefficient d'amortissement ? Les apparences sont trompeuses ; reprenons le calcul de  $t_{excursion}$ .

$t_{excursion} = |\varphi|/w$  . L'impédance  $Z_2$  s'écrit  $Z_2 = h + jmw$  ( $h$  tel que  $\vec{F}_{frottementfluide} = -h\vec{v}$ ) .  $A_r/A_i = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2) = ((Z-h) - jmw)/((Z+h) + jmw)$   
 $\Rightarrow |\varphi| = \text{Arctan } mw/(Z-h) + \text{Arctan } mw/(Z+h)$   
 soit  $f(h) = |\varphi_{avec amortissement} - \varphi_{sans amortissement}| =$   
 $\text{Arctan } mw/(Z-h) + \text{Arctan } mw/(Z+h) - 2\text{Arctan } mw/Z$  ;  
 $df/dh = mw(1/((Z-h)^2 + m^2w^2) - 1/((Z+h)^2 + m^2w^2)) > 0 \Rightarrow f$  est une fonction croissante de  $h$ , d'autre part  $f(h) > 0$  quelque soit  $h \in 0, Z \Rightarrow$

$t_{excursion avec amort.} > t_{excursion sans} \Rightarrow T \geq T_0$  avec un écart qui augmente avec  $h$  . Il faudrait reprendre l'étude des oscillations amorties à partir de ce modèle ; je me contenterai d'un calcul rapide dans le cas d'un  $h$  petit .

$\varphi(h \text{ petit}) = \varphi(h=0) + h \partial\varphi/\partial h(h=0) + (h^2/2) \partial^2\varphi/\partial h^2(h=0) + \dots$   
 $\partial\varphi/\partial h(h=0) = 0$  et  $\partial^2\varphi/\partial h^2(h=0) = 4Zmw/(Z^2 + m^2w^2)^2 \Rightarrow$   
 $t_{excursion avec amort.} - t_{excursion sans} = (T - T_0)/z \approx 2Zmh^2/(Z^2 + m^2w^2)^2$   
 $2mZ/(Z^2 + m^2w^2)$  représente pratiquement  $t_{excursion sans avec amort.} \approx T_0/2$  et si on néglige la propagation c'est-à-dire  $Z$  on a  $Z^2 + m^2w^2 \approx m^2w_0^2 \Rightarrow$

$T - T_0 \approx T h^2/m^2w_0^2$  . Rappelons que le résultat classique donne  $T - T_0 \approx T h^2/8m^2w_0^2$  . Les expressions diffèrent (je l'impute à un calcul trop sommaire) mais la cohérence de l'ensemble ne m'en paraît pas affectée ; je m'en satisferais donc momentanément et de d'autant plus que l'intérêt didactique de ce modèle avoisine zéro .

On pourrait remarquer que  $|A_r| \neq |A_i| \Rightarrow$  on a un taux d'ondes stationnaires non égal à 1 ; les noeuds ne sont pas de vrais noeuds , ce dont on se moque éperdument vu qu'on n'observe qu'un 1/2 fuseau .

**2 - MANIPULATION DE RESONANCE MECANIQUE OU PERENNITE D'UNE IMPOSTURE**

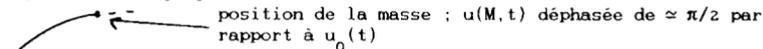
Un moteur entraîne par l'intermédiaire d'un excentrique un système vibratoire constitué par un ressort et une masse accrochée . La masse est immergée dans l'eau et des palettes de différents diamètres figurent l'amortissement . On a une courbe de résonance d'amplitude classique .

Cette manipulation repose sur la même imposture fondamentale (sans compter la poussée d'Archimède qu'on oublie purement et simplement) : à savoir celle de négliger la propagation et de considérer le système dans le même état vibratoire . S'il en est ainsi comment expliquer les différents déphasages entre l'excitateur et le résonateur ? comment expliquer en particulier ce déphasage de  $\pi$  pour des fréquences supérieures à  $f_0$  ? (certains étudiants s'en émeuvent d'ailleurs) , comment expliquer les différentes élongations des spires du ressort ?

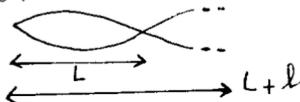
On a toujours le même phénomène d'ondes stationnaires dont le premier mode normal correspond à la prétendue résonance d'amplitude .  
 $t_{AR} = t_{ARfil} + t_{excursion} = 2M/Z + 2(\text{Arctan } mw/Z)/w \rightarrow$  tout se passe comme si le signal devait parcourir la longueur supplémentaire  $l$  telle que  $l = c(\text{Arctan } mw/Z)/w$  ,  $l/\lambda$  variant de 0 (pour  $w = 0$ ) à  $1/4$  quand  $w \rightarrow \infty$  .  
 L'extrémité du ressort ne correspond donc plus à un ventre mais occupe une position intermédiaire qui se rapproche d'un noeud à haute fréquence ( l'inertie de la masse à haute fréquence l'empêche pratiquement de se déplacer) Le rôle de l'impédance revient donc à allonger ou à raccourcir le milieu dans l'intervalle  $-\lambda/4, \lambda/4$  .

En outre , le point entraîné par la ficelle n'est plus fixe : on doit donc tenir compte de l'impédance de cette extrémité qui comporte sans doute tous les ingrédients : des termes complexes (raideur , inertie ) , réels (forces de frottement fluide ) , une f.c.é.m (frottements statiques ,autres ... ) .

premier mode propre :



deuxième mode propre :



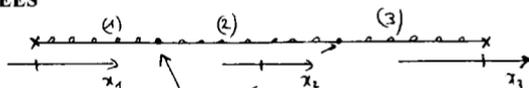
conclusion :

Il y a d'autres fréquences propres mais la position de l'extrémité coïncidant de moins en moins avec celle d'un ventre , les oscillations de la masse seront de moins en moins perçues comme une résonance .

**OSCILLATIONS COUPLÉES - BATTEMENTS**

**1 - OSCILLATIONS COUPLÉES**

**a - Dispositif**



(1) (2) (3) : ressort identiques de masse  $M$

masses identiques :  $m$

**b - Etude théorique**

Elle vise à déterminer les fréquences des modes normaux . Les masses suspendues et chaque spire oscillent à la même fréquence ; pour chacune de ces fréquences on a un système d'ondes stationnaires .

L'élongation d'une spire  $\zeta(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \phi)$  est une solution particulière de l'équation de propagation  $\partial^2 \zeta / \partial x^2 = (1/c^2) \partial^2 \zeta / \partial t^2 \rightarrow f''(x) + (\omega^2/c^2)f(x) = 0$   $f(x)$  peut donc s'écrire sous la forme  $A \cos wx/c + B \sin wx/c$  avec  $c_1 = c_2 = c_3$

conditions aux limites :

$$f_1(0) = 0, f_3(0) = 0 \Rightarrow B_1 = B_3 = 0$$

les masses sont indéformables  $\Rightarrow$

$f_1(L) = f_2(-L/2)$  et  $f_2(L/2) = f_3(-L)$  et il y a continuité des vitesses ( les deux informations sont redondantes )  $\Rightarrow$

$$A_1 \sin \omega L / c = - A_2 \sin \omega L / 2c + B_2 \cos \omega L / 2c \text{ et}$$

$$- A_3 \sin \omega L / c = A_2 \sin \omega L / 2c + B_2 \cos \omega L / 2c \quad (1)$$

principe fondamental appliqué aux masses suspendues :

Rappelons que  $T(x,t) = T_e + K \partial \zeta / \partial x(x,t)$  ; le principe appliqué à la masse 1 donne  $m d^2 \zeta_1(L) / dt^2 = - T_1 + T_2$ . On aboutit aux relations (2) :

$$m \omega A_1 \sin \omega L / c = (K A_1 / c) \cos \omega L / c - (K A_2 / c) \cos \omega L / 2c - (K B_2 / c) \sin \omega L / 2c \text{ et}$$

$$m \omega A_3 \sin \omega L / c = (K A_3 / c) \cos \omega L / c - (K A_2 / c) \cos \omega L / 2c + (K B_2 / c) \sin \omega L / 2c$$

oscillations symétriques :  $\zeta_1(L) = - \zeta_3(-L)$

$B_2 = 0$  ( le point milieu est un noeud ) et  $A_1 = A_3$  ; (1) et (2)  $\Rightarrow$

$$\boxed{m \omega / K = (1 + 2 \cos \omega L / c) / \sin \omega L / c} \quad \text{ou} \quad \boxed{m \omega / Z = (1 + 2 \cos \omega M / Z) / \sin \omega M / Z}$$

solutions auxquelles il faut rajouter le cas particulier :  $\omega L / c = 2n\pi$  ( les masses sont placées en des noeuds de vibration )

si  $\mu \rightarrow 0$  (ressort sans masse et vitesse de propagation  $\omega$  ) alors  $\omega^2 \rightarrow 3k/m$  : on retrouve un résultat classique .

oscillations antisymétriques :  $\zeta_1(L) = \zeta_3(-L)$

$A_1 = - A_3$  et  $A_2 = 0$  on obtient :

$$\boxed{m \omega / K = (2 \cos \omega L / c - 1) / \sin \omega L / c} \quad \text{ou} \quad \boxed{m \omega / Z = (2 \cos \omega M / Z - 1) / \sin \omega M / Z}$$

sans oublier le cas particulier  $\omega L / c = (2n+1)\pi$  soit encore  $L = (2n+1)\lambda/2$  ( les masses sont placées en des noeuds de vibration )

si  $\mu \rightarrow 0 \Rightarrow \omega^2 \rightarrow k/m$  : résultat bien connu .

remarque 1 :

Si  $m = 0$  le calcul donne  $3L = (0,2,4,6)\lambda/2$  (nombre pair de fuseaux ) en oscillations symétriques et  $3L = (1,3,5)\lambda/2$  en oscillations anti (nombre impair de fuseaux ). On retrouve le phénomène d'ondes stationnaires d'un ressort de longueur  $L' = 3L$  fixé aux deux extrémités .

remarque 2 :

Notre système comporte  $N + 2$  degrés de liberté et donc autant de modes normaux

**c - Etude expérimentale**

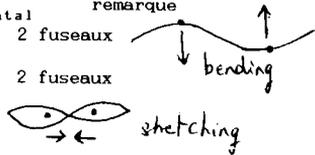
données :

$$L = 1.34 \text{ m} ; m = 20.6 \text{ g} ;$$

masses situées en des noeuds de vibration :		
oscillations transversales	transversales	longitudinales
valeurs théoriques	$\approx 0.61 \text{ Hz}$	$\approx 0.625 \text{ Hz}$
valeurs expérimentales	$\approx 0.71 \text{ Hz}$	$\approx 0.75 \text{ Hz}$

oscillations symétriques :

	$f$ théorique	$f$ expérimental	remarque
oscillations transversales	0.36	0.54	2 fuseaux
	1.47	1.39	
oscillations longitudinales	0.37	0.575	2 fuseaux
	0.76	0.85	

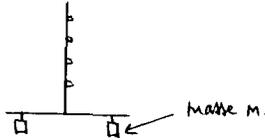


*oscillations antisymétriques :*valeurs théoriques  $\approx 0.17 ; 0.93 ; 1.3$  ;

Je n'ai pas obtenu d'ondes stationnaires franches hormis un mode qui s'est révélé être dû au mouvement pendulaire .Le premier mode a une fréquence très basse qui se situe en dehors de la bande passante du moteur d'entraînement et je pense avoir raté les autres modes à cause et de la manière et du lieu d'excitation .

*remarque :*

On observe des oscillations anti-symétriques transversales à une fréquence de  $\approx 0.46$  Hz et longitudinales à une fréquence de  $\approx 0.49$  Hz , modes obtenus soit par entraînement soit par excitation à la main .Ces fréquences correspondent en fait au mouvement pendulaire : la longueur des fils de suspension est de  $\approx 1.35$  m et  $f = 1/2\pi\sqrt{g/L} = 0.43$  Hz .

**2 - BATTEMENTS****a - Dispositif****b - Résultats**

Les observations sont moins spectaculaires qu'avec un ressort à boudin ordinaire : la stabilité horizontale du système suspendu est difficile à avoir et dure peu : ceci est dû à l'absence d' attache centrale .

*caractéristiques du ressort :*

$L_0 = 1.9$  cm ;  $L = 1.28$  m ;  $k \approx 1.2$  N/m

*oscillations verticales dues à la torsion :*

$T_{\text{torsion}} \approx 1.63$  s masse suspendue = 80 g

*oscillations de rotation dues à la flexion :*

On observe par exemple :

masses :  $2 \times 40$  g ;

distance par rapport à l'axe : 7.2 cm 17 cm

période  $\approx 2.3$  s  $\approx 3.5$  s

*mouvement pendulaire :*

$L = 1.28$  m  $\Rightarrow T_{\text{pendulaire}} \approx 2.27$  s

*phénomène de battements :*

Les oscillations dues à la flexion sont plus lentes que celles dues à la torsion . Par tatonnement on peut observer plusieurs types de battements : battements torsion-flexion : si l'on tire verticalement sur la masse on provoque des oscillations verticales qui diminuent peu à peu d'amplitude tandis qu'apparaissent des oscillations de rotation ; celles-ci à leur tour disparaissent progressivement pour redonner naissance à des oscillations verticales et ainsi de suite . Ce type de battement est fugace et plus facile à obtenir par initiation rotatoire . battements flexion-mouvement pendulaire : ces battements sont très faciles à observer comme le laisse entrevoir la comparaison des périodes respectives .En règle générale quelque soit l'initiation le mouvement final est pendulaire .

<b>CONCLUSION</b>
-------------------

L'étude que j'ai effectuée est à bien des égards un mauvais exemple :

- elle ne répond à aucun besoin spécifique qu'il soit pédagogique , pratique ou industriel .
  - n'apporte rien de strictement novateur sur le fond .
  - reste sur le plan expérimental d'une pauvreté affligeante
- J'y ai pourtant trouvé plaisir ,ne serait-ce que pour 2 raisons fondamentales:
- elle montre que rien n'est jamais acquis , qu'une vérité d'aujourd'hui est une inexactitude de demain , que la plupart du temps on travaille par approximations (quelquefois clairement explicitées , le plus souvent ignorées avec la plus parfaite bonne foi ) , qu'une théorie est une fonction  $f(x,t)$  totalement tributaire de la précision des mesures et des besoins
  - qu'une étude expérimentale même sommaire est indispensable et peut aller très loin . J'ai l'impression parfois que l'enseignement de la physique dans le secondaire se fourvoie : on exige une précision de calcul et une standardisation de raisonnement mathématique donnant une fausse illusion de sérieux et de sécurité : n'oublions pas cependant que les situations idéales et aseptisées qu'on présente ne sont qu'une pâle parodie de la réalité .

On doit bien sûr maintenir une partie de ces exigences (une science est quantitative ) ; on doit aussi multiplier les approches concrètes, qualitatives et ce dès les premières années de scolarité ,c'est-à-dire à la maternelle (sous forme ludique bien sûr ) . Il faut se persuader que l'appréhension des phénomènes physiques doit être antérieure à leur résolution mathématique . Je me souviens que les meilleures observations du phénomène d'ondes stationnaires que j'ai entendues , ont été faites par des élèves luthiers , ignares en physique mais qui abordaient les choses avec des yeux tout neufs , sans à priori et avec beaucoup d'intérêt . Je me souviens aussi d'un vieux menuisier dont la compréhension des notions de géométrie dans l'espace me stupéfiait et qui avait réinventé pour ses besoins personnels la trigonométrie et Thalès . Combien de problèmes de mécanique ne sont compréhensibles que grâce à des jeux de la prime enfance ( cerceau qui revient sur ses pas , moment cinétique , bras de levier ,etc ... ) .

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 - BRUHAT - Mécanique
- 2- SOUTIF - Vibrations.propagation. diffusion (édition 82)
- 3- BUP n° 685- Allard (Etude d'un résonateur à fréquences multiples )
- 4- BUP n°742- Moreau (Propagation guidée des ondes acoustiques )
- 5- BUP n°744- GIE-SARMANT (Portrait de phase des oscillateurs )
- 6- BUP n°747- NOURTIER (Etude et réalisation d'un pendule élastique amorti)
- 7-DENEVE - Propagation d'ondes (exercices et problèmes 2<sup>ème</sup> édition )
- 8-GARING - Ondes (exercices et problèmes 1990 )
- 9- BERKELEY Tome 3 . Ondes (Franck S Crawford )