

**DEMONSTRATION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR  
DANS UN MILIEU REACTIONNEL**  
**avec diffusion des espèces chimiques et mouvement éventuel**  
**(IV)**

**Luc DETTWILLER**

**Lycée Blaise Pascal, 36 av. Carnot  
63037 Clermont-Ferrand Cedex**

### **Résumé**

On démontre, par application stricte du premier principe de la thermodynamique, l'équation de la chaleur dans un milieu siège d'une réaction chimique ou nucléaire. On envisage d'abord le cas simple d'un milieu réactionnel immobile et sans diffusion des espèces chimiques ou nucléaires, puis le cas plus général d'un milieu mobile (sans viscosité) avec diffusion. Cela permet de comprendre que, de toute façon, la « chaleur créée » n'est (en partie) que de l'énergie chimique ou nucléaire convertie en énergie thermique.

Cet article s'inscrit dans une série de quatre, dont les titres sont les suivants :

- I. Création de chaleur et échanges énergétiques ; application à l'étude thermodynamique du contact de deux solides avec frottement et de l'effet Joule.
- II. Création de chaleur et échanges énergétiques : application à l'analyse entropique du contact de deux solides avec frottement et de l'effet Joule.
- III. Bilans énergétiques en mécanique des fluides parfaits.
- IV. Démonstration de l'équation de la chaleur dans un milieu réactionnel, avec diffusion des espèces chimiques et mouvement éventuels.

Le premier article de cette série est plutôt destiné aux professeurs de la classe de première S, car il s'intéresse à certains points subtils du nouveau programme ; les trois suivants prolongent le premier avec le formalisme utilisé dans l'enseignement supérieur.

### **Introduction**

Dans l'article I de cette série [1], nous avons mis l'accent sur l'inconsistance de la notion de « chaleur créée », qui semble d'ailleurs véhiculer des réminiscences de l'ancienne théorie du calorique... Nous avons cependant montré, en particulier dans le cas des frottements entre solides et de l'effet Joule, qu'on peut donner à ce vocable (« chaleur créée ») une signification intéressante ; bien sûr, ce n'est pas la signification suggérée par le sens littéral des termes de ce vocable, mais en quelque sorte un abus de langage.

Il nous reste à envisager maintenant une dernière situation où l'on parle couramment de « chaleur créée » : celle d'un milieu siège d'une réaction chimique ou nucléaire. Dans ce cas, il s'avère pédagogiquement intéressant de faire comme s'il y avait effectivement création de chaleur dans le milieu réactionnel : cela simplifie la première présentation que l'on peut donner de l'équation de la chaleur avec terme source. Mais, une fois passé le cap de cette première présentation, le professeur peut bien se demander avec ses étudiants quelle est la signification de ce terme « source de chaleur », puisque par définition la chaleur n'est qu'une grandeur d'échange entre deux systèmes matériels : autrement dit, comment comprendre ce terme, si le milieu réactionnel ne reçoit pas de chaleur, et qu'on ne peut pas parler de chaleur créée ? Dans l'article I de cette série [1], nous avons proposé de remplacer l'usage du vocable « création de chaleur » par celui de « conversion de l'énergie chimique en énergie thermique ». Nous nous exprimions ainsi : **« Il faut bien comprendre que, si on parle de « chaleur créée (par les réactions chimiques ou nucléaires) dans ce système réactionnel », celle-ci n'est pas la chaleur donnée au système par son extérieur, et donc elle ne figurerait pas dans le premier principe appliqué à ce système ; par contre, on peut dire que l'élévation de température qui accompagne une réaction exothermique résulte de la conversion de l'énergie de liaison chimique ou nucléaire en énergie d'agitation thermique, sans que le milieu réactionnel reçoive de chaleur »** ([1], § 1.3.).

Dans ce dernier article de notre série, nous nous proposons de démontrer plus correctement l'équation de la chaleur avec terme source, sans faire appel à la notion inconsistante de chaleur créée, mais en utilisant strictement le premier principe de la thermodynamique.

D'abord, pour éviter quelques difficultés techniques masquant le fond du problème, nous envisagerons le cas d'un milieu réactionnel immobile, donc indilatable ; nous considérerons aussi qu'il n'y a pas de diffusion notable des espèces chimiques ou nucléaires présentes dans le milieu. Dans ce cas simplifié, il est assez facile d'écrire directement un bilan local d'énergie interne, et de donner ainsi, de l'équation de la chaleur avec source, une démonstration conforme à l'interprétation annoncée ci-dessus en caractères gras.

Enfin, dans une seconde partie, nous nous servirons du formalisme plus rigoureux élaboré dans l'article III de cette série [2] pour trouver la forme générale de l'équation de la chaleur dans un milieu réactionnel en mouvement où les espèces peuvent aussi diffuser.

### Rappels de l'article I de cette série [1]

Sur le plan des principes fondamentaux, l'inconsistance de la notion de « chaleur créée » est manifeste quand on explique comment le premier principe de la thermodynamique dérive du théorème de l'énergie mécanique appliqué à un système au niveau microscopique, en précisant qu'à ce niveau toutes les interactions qui travaillent entre les particules constituant le système dérivent d'une énergie potentielle (les forces de Lorentz dépendent de la vitesse des particules, et donc ne dérivent pas d'une énergie potentielle, mais elles ne travaillent pas) [1]. Ce que l'on appelle « travail » en thermodynamique n'est qu'une partie du travail total (c'est-à-dire calculé au niveau microscopique) : ce n'est que l'intégrale de la puissance des forces macroscopiques *extérieures* sur la vitesse *d'ensemble* de chaque élément du système.

Quant à la chaleur, c'est le reste du travail total, qui n'est donc pas perçu comme travail au niveau macroscopique : l'intégrale de la puissance des *fluctuations* des forces extérieures sur la vitesse *d'agitation*. La chaleur est toujours une grandeur « d'échange » entre deux systèmes, jamais une grandeur associée à un système ; on ne peut donc pas parler de « chaleur créée par un système ». *Mais il faut bien noter que si on appelle, pour une transformation élémentaire,  $\delta Q_{1,2}$  la chaleur donnée par un premier système à un second, et  $\delta Q_{2,1}$  la chaleur donnée par le second système au premier, comme les vitesses d'agitation des particules de ces deux systèmes ne sont pas opposées, on doit dire en général que pour cette grandeur « d'échange »  $\delta Q_{1,2} + \delta Q_{2,1} \neq 0$  pourtant, même si la réunion des deux systèmes est thermiquement isolée !*

Par abus de langage, on appelle alors « chaleur créée » entre ces deux systèmes cette quantité (qui n'est pas forcément positive a priori contrairement à ce que son appellation pourrait laisser croire)

$$\delta Q_{1,2}^{crée} = \delta Q_{1,2} + \delta Q_{2,1} \quad (1)$$

#### Condition de nullité de la « chaleur créée » entre deux systèmes

Pendant une transformation élémentaire de deux systèmes dans le cas le plus général, le premier système reçoit du second le travail  $\delta W_{2,1}$  et la chaleur  $\delta Q_{2,1}$ , et du reste de l'univers le travail  $\delta W_1$  et la chaleur  $\delta Q_1$  ; réciproquement, le second système reçoit du premier le travail  $\delta W_{1,2}$  et la chaleur  $\delta Q_{1,2}$ , et du reste de l'univers le travail  $\delta W_2$  et la chaleur  $\delta Q_2$ . Attention : de même que  $\delta Q_{2,1} \neq -\delta Q_{1,2}$ , en général  $\delta W_{2,1} \neq -\delta W_{1,2}$  car les vitesses d'ensemble des éléments de matière des deux systèmes subissant leurs actions réciproques sont différentes a priori !

La clef de ce problème est le premier principe de la thermodynamique appliqué à chaque système séparément, puis à leur réunion. Rappelons à ce propos qu'il est avantageux de formuler ce principe sous la forme

$$d(U + E_c + E_p) = \delta W^{ext} + \delta Q^{ext} \quad (2)$$

où on met dans le premier membre la variation élémentaire de l'énergie totale du système, i.e. de la somme des énergies interne  $U$ , cinétique macroscopique  $E_c$ , et potentielle macroscopique  $E_p$  *intérieure* au système, car il apparaît dans le second membre *tout* le travail  $\delta W^{ext}$  et la chaleur  $\delta Q^{ext}$  fournis *uniquement par l'extérieur* au système.

Ainsi, le premier principe appliqué au premier système s'écrit

$$d(U_1 + E_{c1} + E_{p1}) = \delta W_{2,1} + \delta W_1 + \delta Q_{2,1} + \delta Q_1 \quad (3)$$

et pour le second système de la même façon

$$d(U_2 + E_{c2} + E_{p2}) = \delta W_{1,2} + \delta W_2 + \delta Q_{1,2} + \delta Q_2 \quad (4)$$

Quant à leur réunion, il vient

$$d(U_1 + U_2 + E_{c1} + E_{c2} + E_{p1} + E_{p2} + E_{p1,2}) = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta Q_1 + \delta Q_2 \quad (5)$$

en effet, l'énergie cinétique de leur réunion est bien la somme  $E_{c1} + E_{c2}$  de leurs énergies cinétiques, mais ce n'est pas le cas pour l'énergie potentielle de leur réunion qui est égale à la somme  $E_{p1} + E_{p2}$  de leurs énergies potentielles propres augmentée de leur énergie potentielle mutuelle  $E_{p1,2}$ , tandis que le postulat d'extensivité de

l'énergie interne revient à dire qu'il n'y a pas d'énergie interne mutuelle des deux systèmes en plus de la somme  $U_1 + U_2$  de leurs énergies internes ; enfin les travaux et les chaleurs échangées entre les deux systèmes sont intérieurs à leur réunion, et n'apparaissent donc pas dans la dernière expression (5) du premier principe.

La comparaison des trois expressions (3), (4) et (5) donne immédiatement

$$\boxed{\delta Q_{1,2}^{créé} = \delta Q_{1 \rightarrow 2} + \delta Q_{2 \rightarrow 1} = -(\delta W_{1 \rightarrow 2} + \delta W_{2 \rightarrow 1}) - dE_{p,1,2}} \quad (6)$$

**Il est donc aisé de savoir quand la « chaleur créée » entre deux systèmes est nulle : lorsque la somme des travaux exercés réciproquement par un système sur l'autre et l'autre sur l'un ne dérive pas complètement d'une énergie potentielle macroscopique mutuelle.**

### **1. Equation de diffusion de la chaleur avec « création » par une réaction chimique ou nucléaire, dans un milieu réactionnel immobile et sans diffusion des espèces**

On sait bien que « l'équation de continuité de la chaleur » (au sens large, car on ne peut définir une densité volumique de chaleur) dans un système immobile (et donc indilatable), la chaleur n'y étant donc transportée que par diffusion, s'écrit

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = s \quad (7)$$

$\mathbf{j}$  représentant le vecteur densité de courant de chaleur,  $\rho$  la masse volumique,  $c_v$  la chaleur massique à volume constant, et  $T$  la température thermodynamique ; compte tenu des remarques précédentes, quel est le statut de la fonction source de chaleur  $s$  (dans un système en réaction chimique ou nucléaire exothermique par exemple), c'est à dire la quantité de chaleur « créée » localement par unité de volume et de temps ?

La réponse à cette question se trouve dans la démonstration de la relation (7), par application stricte du premier principe de la thermodynamique à un élément de volume  $\delta V$  du système, supposé immobile. Lors d'une transformation élémentaire de durée  $dt$ , la variation  $d(\delta U)$  de l'énergie interne  $\delta U$  de cet élément est égale à la quantité de chaleur  $-\operatorname{div} \mathbf{j} \delta V dt$  qu'il a reçue de l'extérieur, plus le travail fourni par l'extérieur ; dans le cas d'un système ne pouvant recevoir d'autre travail que celui des forces de pression, on peut conclure que le travail est nul puisque tout élément est indilatable, ce qui donne  $d(\delta U) = -\operatorname{div} \mathbf{j} \delta V dt$  (8).

**On note que dans cette équation, il n'y a pas de place pour la « chaleur créée (par les réactions chimiques ou nucléaires) dans l'élément de volume », car celle-ci n'est pas la chaleur donnée à l'élément par son extérieur.** Mais, en appelant  $\delta N_i$  les nombres de moles de tous les constituants de l'élément, indicés par  $i$ , la fonction énergie interne  $U$  donne pour l'élément  $\delta U = U(T, \delta V, \delta N_i)$ , et sa variation à volume constant s'écrit donc

$$d(\delta U) = (\rho c_v \delta V) dT + \sum_i \bar{U}_i d(\delta N_i) \quad (9)$$

où  $\bar{U}_i$  désigne l'énergie interne molaire partielle du constituant  $i$  (ce n'est pas le potentiel chimique, car on considère ici l'énergie interne en fonction de la température, et pas de l'entropie). Notons  $\delta m = \rho \delta V$  la masse de cet élément, et supposons qu'il n'y a pas de diffusion

des espèces chimiques ; cet élément constitue alors un système *fermé*, pour lequel on pose  $x_i = \delta N_i / \delta m$  dont la variation s'exprime, en fonction des degrés d'avancement massiques  $\xi_{m\alpha}$  et des coefficients stoechiométriques algébriques  $v_{i,\alpha}$  du constituant  $i$  pour chaque réaction chimique  $\alpha$ , par

$$dx_i = \sum_{\alpha} v_{i,\alpha} d\xi_{m\alpha} \quad (10).$$

Il s'ensuit

$$d(\delta N_i) = \delta m dx_i = \rho \delta V \sum_{\alpha} v_{i,\alpha} d\xi_{m\alpha} \quad (11)$$

puis, avec les relations (8) et (9),

$$-div \mathbf{j} \delta V dt = (\rho c_v \delta V) dT + \sum_i \left( \rho \delta V \sum_{\alpha} v_{i,\alpha} d\xi_{m\alpha} \right) \bar{U}_i \quad (12).$$

En posant

$$s = - \sum_i \left( \rho \sum_{\alpha} v_{i,\alpha} \frac{\partial \xi_{m\alpha}}{\partial t} \right) \bar{U}_i = - \rho \sum_{\alpha} \left( \sum_i v_{i,\alpha} \bar{U}_i \right) \frac{\partial \xi_{m\alpha}}{\partial t} = - \rho \sum_{\alpha} \Delta_i U_{i\alpha} \frac{\partial \xi_{m\alpha}}{\partial t} \quad (13)$$

où  $\Delta_i U_{i\alpha}$  est l'énergie interne (à volume constant, et non pas à pression constante) de la réaction chimique  $\alpha$ , on retrouve la relation (7) de diffusion de la chaleur (en n'oubliant pas que les variations de température et de degré d'avancement dans (12) sont considérées en un point fixé de l'espace). La définition (13) nous livre donc la signification exacte de la fonction source de chaleur  $s$ .

Pédagogiquement, pour donner une première présentation simplifiée de la diffusion de la chaleur, il paraît normal d'omettre le changement de composition dû à la réaction chimique ou nucléaire, et de faire comme si la dérivée partielle de la densité d'énergie interne volumique par rapport au temps était simplement  $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}$  ; c'est pour obtenir le résultat correct (7) que

l'on invoque la notion, non rigoureuse compte tenu de cette omission, de chaleur créée décrite par la fonction source de chaleur  $s$ . Mais il serait plus correct (et pas plus difficile même pour une première approche), de dire que **l'élévation de température qui accompagne une réaction exothermique résulte de la conversion de l'énergie de liaison chimique ou nucléaire en énergie d'agitation thermique, sans que le milieu réactionnel reçoive de chaleur.**

Remarquons qu'en définissant le vecteur densité de courant de chaleur  $\mathbf{j}$ , on admet implicitement que la puissance thermique donnée par l'élément  $\delta V$  à son extérieur est l'opposée de celle fournie à cet élément par son extérieur, donc on a exclu a priori la « chaleur créée » entre l'élément et son extérieur ; c'est bien le cas, puisque l'élément est fixe par rapport à son extérieur,  $\delta W_{1 \rightarrow 2} + \delta W_{2 \rightarrow 1}$  est nul, et la variation  $dE_{p,1,2}$  aussi (ou est négligeable).

## 2. « Equations de continuité énergétiques » en présence de réactions chimiques, de diffusion des espèces chimiques et de convection dans un fluide parfait

Nous reprenons ici l'étude du § 1., mais sans les hypothèses simplificatrices (faites dans le seul but d'illustrer sur un exemple simple la signification réelle du terme de « création de chaleur »). Donc nous ne supposons plus que le système réactionnel est immobile et indilatable (mais nous admettons pour simplifier que c'est un fluide parfait) ; nous admettons aussi qu'il peut se produire une diffusion des espèces chimiques. Comment écrire alors l'équation de continuité de la chaleur ?

### Rappel de l'article III de cette série [2]

Dans cet article, nous avons démontré deux lemmes.

Le lemme I donne la variation de la grandeur  $G(t) = \iiint_{V(t)} \rho g_m d\tau$  liée à la matière d'un système fermé en mouvement macroscopique occupant le volume  $(V)(t)$ , la densité massique étant  $g_m$ , la masse volumique  $\rho$  et le champ de vitesse (macroscopique)  $\mathbf{v}$  :

$$\frac{dG}{dt} = \iiint_{V(t)} \rho \frac{dg_m}{dt} d\tau \quad (14)$$

Le lemme II exprime localement les causes physiques de cette variation sous forme d'un bilan (c'est ce qu'on appelle une relation de continuité).

Ces causes sont les suivantes :

- transports de  $G$  par convection et par diffusion (ou conduction), décrits respectivement par les vecteurs courant convectif  $\rho g_m \mathbf{v}$  et non convectif  $\mathbf{j}_G^*$ , donnant le vecteur courant global  $\mathbf{j}_G = \rho g_m \mathbf{v} + \mathbf{j}_G^*$  (15) ;
- création de  $G$  décrite par  $s_G$ , appelée « fonction source de  $G$  », indiquant la quantité (algébrique) de  $G$  créée localement par unité de volume et de temps.

Le bilan s'exprime par

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_G + \rho \frac{dg_m}{dt} = s_G = \operatorname{div} \mathbf{j}_G + \frac{\partial(\rho g_m)}{\partial t} \quad (16).$$

Le lemme I permet d'exprimer sous forme locale le premier principe de la thermodynamique pour un fluide parfait. Par ailleurs, on obtient le théorème de l'énergie mécanique macroscopique, sous forme locale pour ce fluide parfait, en considérant l'équation d'Euler et en la multipliant scalairement par  $\mathbf{v}$ . On a déjà vu qu'il est fructueux de comparer le théorème de l'énergie mécanique macroscopique et le premier principe ; alors on trouve ici, pour ce fluide parfait,

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^* + \rho \frac{dh_m}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (17),$$

$\mathbf{j}^*$  désignant le vecteur courant non convectif de chaleur

Remarquons qu'en définissant  $\mathbf{j}^*$ , on admet implicitement que la puissance thermique donnée par l'élément de fluide à son extérieur est l'opposée de celle fournie à cet élément par son extérieur, donc on a exclu a priori la « chaleur créée » entre l'élément et son extérieur.

C'est bien le cas, puisque dans un fluide réel le champ des vitesses est continu, donc entre tout élément et son extérieur  $\delta W_{1 \rightarrow 2} + \delta W_{2 \rightarrow 1}$  est nul ; la variation  $dE_{p1,2}$  est nulle aussi (négligeable), donc la condition (6) de nullité de la « chaleur créée » est bien satisfaite.

Il convient maintenant d'exprimer la variation temporelle de  $h_m$  apparue dans (17) ; on utilise pour cela une méthode analogue à celle du § 1. de cet article. L'enthalpie massique peut être donnée par une fonction de la température, de la pression, et du nombre de moles  $x_i = \delta N_i / \delta m$  du constituant  $i$  par unité de masse :  $h_m(T, p, x_i)$ . On en déduit

$$\frac{dh_m}{dt} = \frac{\partial h_m}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial h_m}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \sum_i \frac{\partial h_m}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (18).$$

Dans cette expression,

$\frac{\partial h_m}{\partial T}$  est égale à la chaleur massique  $c_p$  à pression constante,

$\frac{\partial h_m}{\partial p} = h + u$  (19), où  $h$  désigne la chaleur latente massique d'augmentation de pression et  $u$  le volume massique ( $h + u$  étant nul pour un gaz parfait),

et on pose  $\frac{\partial h_m}{\partial x_i} = \bar{H}_i$  (20) (qui n'est pas le potentiel chimique du constituant  $i$ ,

pour la même raison qu'avec  $\bar{U}_i$  au § 1.).

Cela permet d'écrire

$$\frac{dh_m}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} + (h + u) \frac{dp}{dt} + \sum_i \bar{H}_i \frac{dx_i}{dt} \quad (21).$$

Il ne reste plus qu'à exprimer la dérivée convective du nombre massique de moles du constituant  $i$ . Pour cela, on applique le lemme II à  $x_i$ , ce qui donne

$$\rho \frac{dx_i}{dt} = s_i - \text{div } \mathbf{j}_i^* \quad (22)$$

où  $\mathbf{j}_i^*$  est le vecteur courant non convectif du constituant  $i$ , et  $s_i$  la fonction source du constituant  $i$ ; de la même manière qu'au § 1., elle est donnée par

$$s_i = \sum_\alpha v_{i,\alpha} \frac{d\xi_{m\alpha}}{dt} \quad (23).$$

En combinant les relations (17) et (21) à (23), on obtient

$$\text{div } \mathbf{j}^* + \rho c_p \frac{dT}{dt} = -\rho h \frac{dp}{dt} - \sum_i \bar{H}_i \left( \sum_\alpha v_{i,\alpha} \frac{d\xi_{m\alpha}}{dt} - \text{div } \mathbf{j}_i^* \right) \quad (24).$$

En introduisant l'enthalpie  $\Delta_r H_\alpha$  de la réaction chimique  $\alpha$ , on arrive à une équation de continuité pour la chaleur

$$\boxed{\text{div } \mathbf{j}^* + \rho c_p \frac{dT}{dt} = s} \quad (25)$$

avec une fonction source de « chaleur créée »

$$s = -\rho \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} H_{\alpha} \frac{d\xi_{m\alpha}}{dt} + \sum_i \bar{H}_i \operatorname{div} \mathbf{j}_i^* - \rho h \frac{dp}{dt} \quad (26)$$

Dans  $s$  on reconnaît l'influence des différents phénomènes considérés : au cours du mouvement, il y a « création » de chaleur par réaction chimique, par diffusion, et par variation de pression. On vérifie qu'on retrouve le cas particulier du § 1., en considérant que le milieu réactionnel est un solide immobile indilatable et qu'il n'y a pas de diffusion : car, dans ce cas,  $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}$ ,  $u$  est constant,  $\mathbf{j}_i^*$  et  $h$  sont nuls, donc

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} U_{\alpha} \frac{\partial \xi_{m\alpha}}{\partial t} = \frac{du_m}{dt} = \frac{d}{dt} (h_m - pu) = c_p \frac{dT}{dt} + \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} H_{\alpha} \frac{d\xi_{m\alpha}}{dt} - u \frac{dp}{dt} \quad (27)$$

En supposant que sont vérifiées les lois phénoménologiques de Fourier  $\mathbf{j}^* = -\lambda \operatorname{grad} T$  (28) avec la conductivité thermique  $\lambda$ , et de Fick  $\mathbf{j}_i^* = -D_i \operatorname{grad} x_i$  (29) avec la « diffusivité »  $D_i$  du constituant  $i$ , les relations (25) et (26) font apparaître l'opérateur laplacien  $\Delta$  (à ne pas confondre avec « l'opérateur de Lewis »  $\Delta_{\alpha}$ , qui intervient dans l'écriture de l'enthalpie de réaction) :

$$-\lambda \Delta T + \rho c_p \frac{dT}{dt} = -\rho \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} H_{\alpha} \frac{d\xi_{m\alpha}}{dt} - \sum_i \bar{H}_i D_i \Delta x_i - \rho h \frac{dp}{dt} \quad (30)$$

(en considérant que, malgré les inhomogénéités de composition du milieu,  $\lambda$  et  $D_i$  sont indépendants du point).

## Conclusion

Concluons l'article final IV de cette série en examinant qualitativement l'influence de la viscosité sur les résultats obtenus.

Ici, au second membre de (17) et dans l'expression générale (26) qui en résulte, il faut ajouter l'opposé de la puissance volumique des forces de viscosité *intérieures* à l'élément. Ce terme supplémentaire apparaît alors comme une contribution à la « chaleur créée » (décrite par  $s$ ), responsable d'une partie du flux de chaleur et de l'élévation de température conformément à (25) et (30).

## RÉFÉRENCES :

- [1] L. DETTWILLER, I. Création de chaleur et échanges énergétiques ; application à l'étude thermodynamique du contact de deux solides avec frottement et de l'effet Joule, B.U.P. n° 775, juin 1995
- [2] L. DETTWILLER, III. Bilans énergétiques en mécanique des fluides parfaits, B.U.P. spécial enseignement supérieur, juin 1995