

**BILANS ENERGETIQUES  
EN MECANIQUE DES FLUIDES PARFAITS  
(III)**

**Luc DETTWILLER**  
**Lycée Blaise Pascal, 36 av. Carnot**  
**63037 Clermont-Ferrand Cedex**

### Résumé

On démontre, à partir des équations de la mécanique des fluides parfaits, les théorèmes de l'énergie cinétique et mécanique pour un fluide ; on en tire une expression du travail des actions intérieures à un fluide parfait, et on en déduit la possibilité de démontrer le théorème de Bernoulli pour un fluide homogène incompressible.

On s'intéresse ensuite à l'expression locale du premier principe de la thermodynamique, et à sa comparaison avec celle du théorème de l'énergie mécanique ; puis, après avoir démontré que l'évolution adiabatique d'un fluide en équilibre thermodynamique local mais en mouvement quelconque est réversible, on applique ces résultats à la démonstration du théorème de Bernoulli pour un fluide compressible.

Enfin, on exprime la conservation de l'énergie totale sous la forme d'un théorème de Poynting, et on examine son expression particulière en acoustique ; on montre qu'on ne retrouve les expressions usuelles que si la compressibilité du fluide est suffisamment faible.

Cet article s'inscrit dans une série de quatre, dont les titres sont les suivants :

- I. Création de chaleur et échanges énergétiques ; application à l'étude thermodynamique du contact de deux solides avec frottement et de l'effet Joule.
- II. Création de chaleur et échanges énergétiques : application à l'analyse entropique du contact de deux solides avec frottement et de l'effet Joule.
- III. Bilans énergétiques en mécanique des fluides parfaits.
- IV. Démonstration de l'équation de la chaleur dans un milieu réactionnel, avec diffusion des espèces chimiques et mouvement éventuels.

Le premier article de cette série est plutôt destiné aux professeurs de la classe de première S, car il s'intéresse à certains points subtils du nouveau programme ; les trois suivants prolongent le premier avec le formalisme utilisé dans l'enseignement supérieur.

## **Introduction**

L'enseignement traditionnel de la mécanique des fluides parfaits s'intéresse assez peu aux aspects énergétiques de cette discipline : en effet, ceux-ci se trouvent souvent réduits à l'exposé du théorème de Bernoulli en régime permanent. Or, si on veut démontrer ce théorème à partir du théorème de l'énergie cinétique, il faut tenir compte du travail des forces intérieures au fluide, dont l'expression n'est pas évidente ; ou encore, si on veut le démontrer pour un fluide incompressible à partir du premier principe de la thermodynamique, ce travail des forces intérieures n'intervient plus, mais il faut tenir compte de la variation d'énergie interne et de la chaleur reçue par le fluide ; et enfin, si on veut le démontrer pour un fluide compressible et introduire l'enthalpie, on se trouve amené à dire que l'évolution du fluide est isentropique, alors que l'écoulement du fluide peut être très rapide et donc sa transformation très éloignée d'une succession d'états d'équilibre !

Notre propos est de présenter les questions énergétiques de la mécanique des fluides en utilisant le formalisme mathématique de l'analyse vectorielle, dont on se sert déjà pour écrire l'équation de conservation de la masse ou d'évolution de la masse volumique, l'équation fondamentale de la dynamique (équation d'Euler pour les fluides parfaits), etc.. Ce formalisme a déjà été présenté dans un article précédent du B.U.P. pour exprimer différentes formes de création d'entropie [1].

Cela nous permettra de donner, dans une première partie, une expression locale du théorème de l'énergie mécanique, du travail des forces intérieures à un fluide parfait (les forces de pression) ; puis, dans une deuxième partie, nous donnerons une expression locale du premier principe de la thermodynamique, de l'évolution de l'énergie interne du fluide. Dans ces expressions locales, l'enthalpie apparaîtra tout naturellement ; on pourra aussi en déduire l'équation d'évolution de l'entropie, et montrer qu'elle reste constante pour l'écoulement adiabatique d'un fluide parfait en équilibre thermodynamique local, même si cet écoulement est rapide. Nous pourrons donc démontrer sur des bases sûres les diverses formes du théorème de Bernoulli.

Enfin, dans une troisième partie, nous mettrons les résultats précédents sous la forme d'un théorème de Poynting (c'est à dire, plus généralement, d'une équation de continuité). Cela nous permettra de préciser les expressions de la densité volumique d'énergie dans un fluide, et du vecteur courant de cette énergie - ce qui est moins évident. Nous appliquerons cette forme générale du théorème de Poynting au cas des petits ébranlements (qui font l'objet de l'acoustique) ; nous verrons alors que les résultats des raisonnements simplifiés que l'on présente usuellement en acoustique, ne sont valables que si la compressibilité du fluide est assez faible.

## 1. Démonstration du théorème de l'énergie cinétique macroscopique avec le formalisme de la mécanique des fluides ; hypothèses du théorème de Bernoulli pour un fluide homogène incompressible

### 1.1. Lemme I : dérivée convective d'une grandeur liée à un système matériel fermé

Soit une grandeur de densité massique  $g_m$ , liée à la matière (de masse volumique  $\rho$ ) qui se meut, selon un champ de vitesse (macroscopique)  $\mathbf{v}$ . Soit un système matériel fermé, qui se déplace en occupant le volume  $(V)(t)$  ; pour ce système, cette grandeur s'écrit  $G(t) = \iiint_{(V)(t)} \rho g_m d\tau$ , où  $d\tau$  représente l'élément de volume infinitésimal, et elle n'est fonction que du temps. La dérivée de cette fonction de l'unique variable  $t$  est notée  $dG/dt$  ; en physique, on l'appelle parfois dérivée convective de  $G$ , pour insister sur le fait que la variation de  $G$  avec  $t$  tient compte du déplacement du système matériel. On a

$$\frac{dG}{dt} = \iiint_{(V)(t)} \rho \frac{dg_m}{dt} d\tau \quad (1)$$

En effet, le théorème de dérivation sous le signe « somme », connu sous le nom de théorème de Reynolds, donne

$$\frac{dG}{dt} = \iiint_{(V)(t)} \frac{\partial(\rho g_m)}{\partial t} d\tau + \iint_{(S)(t)} (\rho g_m) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2)$$

où  $(S)(t)$  désigne la surface fermée mobile limitant le volume  $(V)(t)$ , et  $\mathbf{n}$  sa normale extérieure. En vertu du théorème d'Ostrogradski et des propriétés de la divergence, il vient

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \iiint_{(V)(t)} \frac{\partial(\rho g_m)}{\partial t} d\tau + \iiint_{(V)(t)} \text{div}(\rho g_m \mathbf{v}) d\tau \\ &= \iiint_{(V)(t)} \left[ g_m \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} \right) + \rho \left( \frac{\partial g_m}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} g_m \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (3);$$

or l'équation de continuité traduisant la conservation de la masse s'écrit

$$\text{div} \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

ce qui donne finalement

$$\frac{dG}{dt} = \iiint_{(V)(t)} \rho \frac{dg_m}{dt} d\tau \quad (5)$$

où  $\frac{dg_m}{dt}$  désigne la dérivée convective de la densité massique  $g_m$ .

### 1.2. Application à l'étude de l'énergie cinétique d'un fluide parfait

Pour un fluide non visqueux, appliquons ce lemme à l'énergie cinétique macroscopique  $E_c$ , de densité massique  $\frac{\mathbf{v}^2}{2}$  :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{(V)(t)} \rho \left( \frac{v^2}{2} \right) d\tau = \iiint_{(V)(t)} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) d\tau = \iiint_{(V)(t)} \rho \frac{dv}{dt} \cdot \mathbf{v} d\tau \quad (6)$$

Or l'équation fondamentale de la dynamique d'un fluide non visqueux, dite équation d'Euler, s'écrit

$$\rho \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}_v - \text{grad} p \quad (7)$$

où  $\mathbf{F}_v$  désigne la densité de force exercée en volume sur le fluide, et  $p$  la pression dans le fluide.

L'équation (6) devient alors, grâce à (7)

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \iiint_{(V)(t)} (\mathbf{F}_v - \text{grad} p) \cdot \mathbf{v} d\tau \\ &= \iiint_{(V)(t)} \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} d\tau + \iiint_{(V)(t)} [-\text{div}(p\mathbf{v}) + p \text{div} \mathbf{v}] d\tau \\ \boxed{\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{(V)(t)} \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} d\tau + \iint_{(S)(t)} (-p n dS) \cdot \mathbf{v} + \iiint_{(V)(t)} p \text{div} \mathbf{v} d\tau} & \quad (8) \end{aligned}$$

On voit que la puissance cinétique est égale à la puissance des forces volumiques  $\mathbf{F}_v$  (extérieures et intérieures), augmentée de la puissance des forces de pression extérieures qui s'exercent sur sa surface  $(S)(t)$ , et aussi de la puissance des forces de pression intérieures.

### 1.3. Expression de la puissance des actions intérieures au fluide dans le cas d'un fluide parfait, et incompressible

Celle-ci peut être mise sous une forme plus familière : comme la divergence de la vitesse macroscopique est liée à l'évolution de la masse volumique  $\rho$  ou du volume massique

$u = 1/\rho$  (9) par  $\text{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{u} \frac{du}{dt}$  (10), la puissance des forces de pression intérieure

s'écrit  $\iiint_{(V)(t)} p \frac{du}{dt} \rho d\tau$  ; on retrouve le fait que pour tout élément de fluide fermé, de masse  $\rho d\tau$  donnée, elle est positive pour une augmentation de son volume  $u \rho d\tau$  sous l'effet des forces de pression qui poussent à l'intérieur de sa surface.

### 1.4. Application à la démonstration du théorème de Bernoulli pour l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible en régime permanent

Dans le cas d'un fluide incompressible non visqueux, la puissance des forces surfaciques intérieures au fluide est donc nulle : c'est la raison pour laquelle la démonstration, par le théorème de l'énergie cinétique, du théorème de Bernoulli pour un fluide homogène incompressible, ne fait intervenir que la puissance des actions extérieures. Et, toujours pour un fluide incompressible non visqueux, s'il ne reçoit pas de travaux non mécaniques, la relation (28) de l'article I de cette série [2] prouve (alors que ce fait est trop souvent admis sans démonstration) que sa variation d'énergie interne est simplement égale à la chaleur qu'il reçoit de l'extérieur. C'est pourquoi on peut aussi démontrer, à partir du premier principe de la

thermodynamique mais sans devoir supposer l'adiabaticité ni la réversibilité (cf. § 2.3. et 2.5. du présent l'article), le théorème de Bernoulli pour un fluide homogène incompressible : la variation d'énergie interne et la chaleur reçue disparaissent de la relation obtenue.

### 1.5. Etude de l'énergie mécanique d'un fluide parfait

On admet dorénavant que, hormis le travail des forces de pression, les seuls travaux extérieurs s'expriment à l'aide de l'énergie potentielle macroscopique  $W$ , explicitement indépendante du temps, *extérieure* au système du fluide (par exemple celle de pesanteur) ; alors l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad}p - \rho \mathbf{grad}w_m \quad (11)$$

où  $w_m$  est la densité massique de  $W$ .

On obtient le théorème de l'énergie mécanique en multipliant cette équation d'Euler scalairement par  $\mathbf{v}$  ; comme  $w_m$  est explicitement indépendant du temps, il s'ensuit

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w_m \right) = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}p \quad (12)$$

#### Remarque

Le terme  $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}p$  est la puissance volumique des forces de pression, qu'il est naturel de retrouver à cette place puisque les forces de pression ne dérivent pas, en général, d'une énergie potentielle. Cependant nous savons (§ 2.3., équation (23), conformément à la relation  $dU = \delta W_{\text{non mé ca}}^{\text{ext}} - \delta W_{\text{mé ca}}^{\text{int}} + \delta Q^{\text{ext}}$  (28) de l'article I de cette série), que la variation d'énergie interne  $dU$  est égale au travail non mécanique  $\delta W_{\text{non mé ca}}^{\text{ext}}$  (travail d'un générateur électrique par exemple) plus la chaleur  $\delta Q^{\text{ext}}$  reçus de l'extérieur, moins le travail mécanique intérieur  $\delta W_{\text{mé ca}}^{\text{int}}$  ne dérivant pas de l'énergie potentielle macroscopique  $W$  ; donc la puissance des forces de pression est égale à l'opposé de la dérivée de l'énergie interne pour un écoulement adiabatique, le fluide ne recevant pas usuellement de travail non mécanique (à moins qu'il soit conducteur et puisse recevoir un travail électrique...).

## 2. Premier principe de la thermodynamique

### 2.1. Lemme II : causes de la variation convective d'une densité massique

Au préalable, démontrons un second lemme. Le premier lemme donne la variation de la grandeur  $G$  liée à la matière d'un système fermé en mouvement macroscopique ; le second exprime localement les causes physiques de cette variation sous forme d'un bilan (c'est ce qu'on appelle une relation de continuité).

Ces causes sont les suivantes :

- transports de  $G$  par convection et par diffusion (ou conduction), décrits respectivement par les vecteurs courant convectif  $\rho g_m \mathbf{v}$  et non convectif  $\mathbf{j}_G^*$ , donnant le vecteur courant global  $\mathbf{j}_G = \rho g_m \mathbf{v} + \mathbf{j}_G^*$  (13) ;
- création de  $G$  décrite par  $s_G$ , appelée « fonction source de  $G$  », indiquant la quantité (algébrique) de  $G$  créée localement par unité de volume et de temps.

On sait donc que

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \iint_{(S)(t)} (\mathbf{j}_G - \rho g_m \mathbf{v}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \iiint_{(V)(t)} s_G d\tau \\ &= \iiint_{(V)(t)} (-\text{div } \mathbf{j}_G^* + s_G) d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

Puisque cette relation (14) est valable quel que soit le volume  $(V)(t)$ , on obtient, par combinaison avec (3) et (5), les équations de continuité

$$\boxed{\text{div } \mathbf{j}_G^* + \rho \frac{dg_m}{dt} = s_G = \text{div } \mathbf{j}_G + \frac{\partial(\rho g_m)}{\partial t}} \quad (15)$$

## 2.2. Formulations du premier principe de la thermodynamique

Pour commencer, on applique le lemme I (5) à l'énergie totale  $U + E_c + E_p$  d'un système fermé occupant le volume  $(V)(t)$ . Dès maintenant, nous négligerons cette énergie potentielle macroscopique  $E_p$  intérieure au système ; cette approximation est souvent légitime, mais pas si l'on veut étudier le fonctionnement d'une étoile...

En notant donc  $u_m + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2$  la densité massique de l'énergie totale, le lemme I donne :

$$\frac{d}{dt}(U + E_c) = \iiint_{(V)(t)} \rho \frac{d}{dt} \left( u_m + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) d\tau \quad (16)$$

Alors, pour ce système fermé, le premier principe de la thermodynamique (équation (2) de l'article I de cette série [2]) donne

$$\frac{d}{dt}(U + E_c) = \iint_{(S)(t)} -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS - \frac{dW}{dt} + \iint_{(S)(t)} \mathbf{j}^* \cdot (-\mathbf{n}) dS \quad (17)$$

en admettant que, hormis le travail des forces de pression, les seuls travaux extérieurs s'expriment à l'aide de l'énergie potentielle macroscopique  $W$ , explicitement indépendante du temps, *extérieure* au système (par exemple celle de pesanteur) ; on ne considère ainsi que des fluides non visqueux. Rappelons ici que  $\mathbf{j}$  désigne le vecteur courant *non convectif* de chaleur ; il exprime le flux de chaleur au travers d'une surface qui se déplace *avec* le fluide, alors que le flux de chaleur au travers d'une surface mobile *par rapport* au fluide devrait tenir compte de sa convection.

En appliquant la relation (5) à  $W$ , de densité massique  $w_m$ , et en se servant du théorème d'Ostrogradski, il vient

$$\text{div}(\mathbf{j}^* + p\mathbf{v}) + \rho \frac{d}{dt} \left( u_m + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w_m \right) = 0 \quad (18)$$

puisque la relation (17) est valable quel que soit le volume  $(V)(t)$ .

Or, en introduisant le volume massique  $u = 1/\rho$  (comme on l'a fait pour exprimer la puissance des forces de pression intérieures), on trouve

$$\operatorname{div}(p\mathbf{v}) = p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p = \rho \left( p \frac{du}{dt} + u \frac{dp}{dt} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (19).$$

Mais l'enthalpie massique est définie par  $h_m = u_m + pu$  (20), ce qui permet d'écrire la relation (18) sous la forme

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^* + \rho \frac{d}{dt} \left( h_m + \frac{1}{2} v^2 + w_m \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (21).$$

### 2.3. Comparaison avec le théorème de l'énergie mécanique macroscopique

On a déjà vu, dans l'article I de cette série [2], qu'il est fructueux de comparer le théorème de l'énergie mécanique macroscopique et le premier principe ; ici, en soustrayant membre à membre les équations (21) et (12), on trouve

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^* + \rho \frac{dh_m}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (22).$$

Cette relation paraît naturelle : sur la surface d'un élément de fluide, la pression est localement uniforme ; donc, si elle reste constante, la variation d'enthalpie de l'élément est égale à la chaleur qu'il reçoit. C'est bien une relation analogue à l'équation (28) de l'article I de cette série [2], dont la fécondité se trouve illustrée au § 3.2. de [2] : car (22) se met aussi sous la forme

$$\boxed{\frac{du_m}{dt} = -p \frac{du}{dt} + \left( -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{j}^* \right)} \quad (23)$$

où, conformément cette relation (28) de [2], et par unité de masse d'un élément de fluide,  $p \frac{du}{dt}$  est le travail mécanique *intérieur* des forces de pression, et  $-\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{j}^*$  la chaleur reçue par l'élément. Ainsi, pour un fluide incompressible  $p \frac{du}{dt}$  est nul, donc la variation d'énergie interne est égale à la chaleur reçue.

### Remarque sur la comparaison entre le premier principe de la thermodynamique et le théorème de l'énergie mécanique macroscopique

On sait bien que ce qui est communément appelé le « premier principe de la thermodynamique » (ou parfois plus précisément le « théorème de l'état initial et de l'état final » pour notre propos) résulte du théorème de l'énergie mécanique appliqué à un système au niveau microscopique, avec en plus le postulat qu'à ce niveau toutes les interactions dérivent d'une énergie potentielle. Tout le travail microscopique fourni au système par son extérieur est compté dans le premier principe ; au niveau macroscopique, il se présente soit sous la forme d'une chaleur reçue, soit sous la forme d'un travail, qu'il soit de nature mécanique, électrique, etc..

Mais il est possible aussi d'utiliser un théorème de l'énergie mécanique macroscopique, tel qu'on l'a démontré au § 1.5. Il fournit une information valide, quoique différente du premier principe, puisqu'il se démontre sans référence à la structure microscopique du système.

Les informations qu'on en tire sont complémentaires, et leur confrontation s'avère souvent instructive - comme on l'a vu ci dessus, et au § 3.2. de [2]. Dans le théorème de l'énergie mécanique il n'apparaît pas l'énergie interne, ni la chaleur ni les travaux non mécaniques fournis au système par son extérieur ; par contre, il apparaît les travaux mécaniques intérieurs qui ne dérivent pas de l'énergie potentielle macroscopique (par exemple, les travaux des frottements solides ou visqueux intérieurs au système).

#### 2.4. Démonstration de l'équation de Laplace et de l'isentropisme pour chaque élément d'un fluide parfait en mouvement mais en équilibre thermodynamique local

i) Pour un gaz parfait dont le rapport  $\gamma = c_p/c_v$  des chaleurs massiques, à pression et à volume constant, est constant, on démontre alors que la formule de Laplace pour une transformation adiabatique est toujours valable, même si le fluide est en mouvement, du moment que son équation d'état reste valable pour tout élément (conséquence de l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local). En effet, pour ce gaz, l'enthalpie massique s'écrit encore

$$h_m = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pu \quad (24)$$

donc l'équation (22) donne

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \gamma \frac{1}{u} \frac{du}{dt} = 0 \quad (25)$$

et on en déduit que, pour tout élément de fluide,  $pu^\gamma$  reste constant au cours de son déplacement.

ii) Ainsi, avec l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local, l'hypothèse d'adiabaticité (liée à celle d'absence de viscosité) suffit pour que l'entropie créée soit nulle, et donc que la transformation soit réversible. C'est ainsi qu'en acoustique on considère la transformation subie par chaque élément comme isentropique, quel que soit le fluide envisagé (sans changement de composition). Car pour un tel milieu, l'équilibre thermodynamique local permet de donner une forme différentielle de son enthalpie massique

$$dh_m = T dS_m + u dp \quad (26)$$

et donc de relier l'évolution de son enthalpie massique  $h_m$  à celle de son entropie massique  $S_m$  par

$$\frac{dh_m}{dt} = T \frac{dS_m}{dt} + u \frac{dp}{dt} \quad (27)$$

sans supposer la réversibilité a priori ; alors pour un écoulement adiabatique, en utilisant l'équation (22) on obtient

$$T \frac{dS_m}{dt} = \frac{dh_m}{dt} - u \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dt} - \frac{dp}{dt} \right) = 0 \quad (28),$$

et cela prouve bien le caractère réversible de la transformation. Ce résultat se retrouve aussi de façon plus générale, en calculant la fonction source d'entropie.

## 2.5. Application à la démonstration du théorème de Bernoulli pour l'écoulement permanent d'un fluide parfait compressible

De la relation (21) on tire, en régime permanent et s'il n'y a pas de conduction thermique, le théorème de Bernoulli :  $h_m + \frac{1}{2}v^2 + w_m$  est une constante sur une trajectoire, qui est aussi une ligne de courant en régime permanent ; mais en plus, la remarque *ii* du § 2.4. nous a prouvé que la variation de  $h_m$  est isentropique, ce qui lui donne une expression particulière qu'il est important de retenir.

Conformément à cette remarque, il n'est donc pas nécessaire de *supposer* la réversibilité, mais seulement l'adiabaticité et l'équilibre thermodynamique local, pour préciser que

$$h_m = \int \frac{dp}{\rho(p, S_m)} \quad (29)$$

et

$$\frac{dh_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int \frac{dp}{\rho(p, S_m)} \right) = \frac{1}{\rho(p, S_m)} \frac{dp}{dt} = u(p, S_m) \frac{dp}{dt} \quad (30)$$

où l'intégrale est calculée à  $S_m$  constant (cette expression étant surtout utile lorsque le fluide n'obéit pas à la deuxième loi de Joule). Evidemment, pour un fluide incompressible on trouve que  $h_m$  s'écrit  $p/\rho$  (à une constante additive près).

## 3. Théorèmes de Poynting en mécanique des fluides et en acoustique

### 3.1. Ecoulement quelconque

En réunissant les équations (15), (18), (9) et (20), on arrive à un premier théorème de Poynting en mécanique des fluides, exprimant la conservation de l'énergie totale et son transport dans le fluide :

$$\boxed{\operatorname{div} \left[ \mathbf{j}^* + \rho \left( h_m + \frac{1}{2}v^2 + w_m \right) \mathbf{v} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( u_m + \frac{1}{2}v^2 + w_m \right) = 0} \quad (31)$$

### 3.2. Ecoulement adiabatique d'un fluide parfait

Par ailleurs, pour l'écoulement d'un fluide parfait, (12) s'écrit encore

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}v^2 + w_m \right) = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho p \frac{du}{dt} \quad (32) \quad \text{grâce à (10) ;}$$

le terme  $p \frac{du}{dt}$  représente, comme on l'a vu au § 1.3., la puissance massique des forces de pression intérieure. Or nous avons prouvé que l'écoulement adiabatique d'un fluide parfait en équilibre thermodynamique local est isentropique, c'est à dire qu'il s'effectue à entropie massique constante ; de même que la forme différentielle de l'enthalpie (26) nous a permis

d'écrire l'équation d'évolution de l'enthalpie massique  $h_m$ , celle de l'énergie interne nous permet d'écrire l'équation d'évolution de sa densité massique  $u_m$

$$\frac{du_m}{dt} = T \frac{dS_m}{dt} - p \frac{dv}{dt} = -p \frac{dv}{dt} \quad (33) \quad \text{- voir la remarque du § 1.5..}$$

Ainsi, la relation (32) devient

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{d}{dt} \left( u_m + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w_m \right) = 0 \quad (34);$$

on retrouve bien (grâce à (15)) le théorème de Poynting précédent, puisqu'on a considéré ici un écoulement adiabatique (où  $\mathbf{j}^*$  est donc nul).

### 3.3. Petits mouvements adiabatiques d'un fluide parfait : cas de l'acoustique

L'acoustique étant l'étude des petits ébranlements d'un fluide au voisinage de son état d'équilibre mécanique et thermodynamique, on introduit les grandeurs caractérisant cet état d'équilibre (pression  $p_0$ , température  $T_0$ , masse volumique  $\rho_0$  et volume massique  $u_0 = 1/\rho_0$ , énergie interne massique  $u_{m0}$ , enthalpie massique  $h_{m0} = u_{m0} + p_0 u_0$ , coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_{s0}$ , etc.) ; l'usage étant de négliger, dans une première approche, les effets de la pesanteur,  $p_0$  est uniforme, or  $T_0$  l'est aussi, donc  $\rho_0$  aussi, et on prend  $w_m = 0$ . On néglige aussi la conductivité thermique dans cette approche. On introduit alors les écarts à ces grandeurs thermodynamiques d'équilibre ; comme l'évolution du fluide se fait à entropie massique  $S_m$  constante (voir § 2.4.), ces écarts peuvent tous s'exprimer en fonction de l'un d'entre eux seulement, par exemple l'écart de pression  $p'$  - que l'on considérera comme un infiniment petit d'ordre un. Enfin, la vitesse  $\mathbf{v}$  est aussi un infiniment petit d'ordre un.

Comme souvent pour l'énergie, nous allons exprimer le développement à l'ordre deux (en  $p'$  et  $\mathbf{v}$ ) du vecteur de Poynting

$$\mathbf{R} = \rho \left( h_m + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v} \quad (35)$$

et de la densité volumique d'énergie

$$e = \rho \left( u_m + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \quad (36).$$

Dans ces expressions, les termes d'ordre zéro sont

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \quad (37)$$

et

$$e_0 = \rho_0 u_{m0} \quad (38).$$

Les termes d'ordre un sont

$$\mathbf{R}_1 = \rho_0 h_{m0} \mathbf{v} \quad (39)$$

et

$$e_1 = \left( \frac{\partial}{\partial p} \rho u_m \right)_S p' \quad (40);$$

l'indice  $S$  rappelle que la dérivée est calculée à  $S_m$  constant, et on sous-entend qu'il s'agit des dérivées prises pour l'état d'équilibre que perturbe l'onde acoustique. On exprime cette dérivée de la façon suivante :

$$\left( \frac{\partial}{\partial p} \rho u_m \right)_S = \left( \frac{\partial}{\partial p} \rho u_m \right)_S \left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_S = \left[ u_{m0} + \rho_0 \left( \frac{\partial u_m}{\partial p} \right)_S \right] \rho_0 \chi_{S0} \quad (41)$$

car la définition du coefficient de compressibilité isentropique peut s'écrire

$$\chi_S = -\frac{1}{u} \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_S = -\left( \frac{\partial}{\partial p} \ln u / u_0 \right)_S = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \quad (42);$$

on remarque aussi qu'une forme différentielle de l'énergie interne massique est

$$du_m = T dS_m - p du = T dS_m + p \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (43)$$

donc l'expression (41) devient

$$\left( \frac{\partial}{\partial p} \rho u_m \right)_S = \left[ u_{m0} + \rho_0 \frac{p_0}{\rho_0^2} \right] \rho_0 \chi_{S0} = h_{m0} \rho_0 \chi_{S0} \quad (44)$$

et finalement

$$e_1 = \rho_0 h_{m0} \chi_{S0} p' \quad (45).$$

La théorème de Poynting doit être vérifié par chaque couple de termes d'un ordre donné du développement de  $(\mathbf{R}, e)$ . A l'ordre zéro c'est trivial puisque c'est le théorème de Poynting à l'équilibre : la densité volumique d'énergie est stationnaire et il n'y a pas de transport d'énergie. A l'ordre un, il est très facile de vérifier, à partir des équations de base de l'acoustique (qui sont justement les équations de la mécanique des fluides, linéarisées), que

$$\operatorname{div} \mathbf{R}_1 + \frac{\partial e_1}{\partial t} = 0 \quad (46).$$

Il est donc intéressant, en effet, d'exprimer les termes d'ordre deux afin d'obtenir une information moins triviale. Ces termes s'écrivent de la façon suivante :

$$\mathbf{R}_2 = \left( \frac{\partial}{\partial p} \rho h_m \right)_S p' \mathbf{v} \quad (47)$$

et

$$e_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial p^2} \rho u_m \right)_S p'^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^2 \quad (48)$$

Or, grâce à (42), (26) et (9)

$$\left( \frac{\partial}{\partial p} \rho h_m \right)_S = \left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_S h_{m0} + \rho_0 \left( \frac{\partial h_m}{\partial p} \right)_S = \rho_0 \chi_{S0} h_{m0} + \rho_0 u_0 = 1 + \rho_0 h_{m0} \chi_{S0} \quad (49).$$

Comme on a déjà calculé la dérivée première de  $\rho u_m$  (44), il est aisé d'en déduire la dérivée seconde - en s'aidant de la forme différentielle (26) de l'enthalpie massique comme on l'a fait pour (49) :

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial^2}{\partial p^2} \rho u_m \right)_s &= \left( \frac{\partial}{\partial p} \rho h_m \chi_s \right)_s = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s h_{m0} \chi_{s0} + \rho_0 \left( \frac{\partial h_m}{\partial p} \right)_s \chi_{s0} + \rho_0 h_{m0} \left( \frac{\partial \chi_s}{\partial p} \right)_s \\
 &= \rho_0 \chi_s h_{m0} \chi_{s0} + \rho_0 u_0 \chi_{s0} + \rho_0 h_{m0} \left( \frac{\partial \chi_s}{\partial p} \right)_s \\
 &= \chi_{s0} (\rho_0 h_{m0} \chi_{s0} + 1) + \rho_0 h_{m0} \left( \frac{\partial \chi_s}{\partial p} \right)_s
 \end{aligned} \tag{50}$$

Le deuxième ordre du vecteur de Poynting s'écrit donc

$$\mathbf{R}_2 = (1 + \rho_0 h_{m0} \chi_{s0}) p' \mathbf{v} \tag{51},$$

tandis que le deuxième ordre de l'énergie volumique se décompose naturellement en somme d'une énergie cinétique volumique acoustique

$$e_{c2} = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}^2 \tag{52}$$

et d'une énergie potentielle élastique volumique

$$e_{p2} = \frac{1}{2} \left[ \chi_{s0} (1 + \rho_0 h_{m0} \chi_{s0}) + \rho_0 h_{m0} \left( \frac{\partial \chi_s}{\partial p} \right)_s \right] p'^2 \tag{53}.$$

On retrouve le résultat classique  $\frac{1}{2} \chi_{s0} p'^2$  pour cette énergie, quel que soit l'état d'équilibre que perturbe l'onde acoustique, si et seulement si

$$-\frac{1}{\chi_s^2} \left( \frac{\partial \chi_s}{\partial p} \right)_s = 1 \tag{54},$$

ce qui donne la condition (non vérifiée par les gaz parfaits)

$$\frac{1}{\chi_s} = p + f(S_m) \tag{55}$$

puis encore

$$\left( \frac{\partial}{\partial p} \ln u/u_0 \right)_s = -\frac{1}{p + f(S_m)} \tag{56}$$

et finalement s'intègre en

$$u(p, S_m) = \frac{g(S_m)}{p + f(S_m)} \tag{57}.$$

Plus sommairement, on peut considérer que l'on retrouve, simultanément, le résultat classique  $p' \mathbf{v}$  pour  $\mathbf{R}_2$  ainsi que  $\frac{1}{2} \chi_s p'^2$  pour  $e_{p2}$ , quel que soit l'état d'équilibre que perturbe l'onde acoustique, lorsque la compressibilité isentropique du fluide est suffisamment faible : car les raisonnements simplifiés qui conduisent aux résultats classiques négligent implicitement la variation de volume de l'élément de fluide considéré, pour lequel ils calculent la densité volumique d'énergie potentielle élastique !

## Conclusion

Les résultats obtenus dans cet article, consacré aux fluides parfaits, peuvent facilement s'étendre au cas des fluides visqueux.

Dans les seconds membres des théorèmes de l'énergie cinétique ou mécanique (8) et (12), il apparaîtrait la puissance volumique des forces extérieures *et intérieures* de frottement visqueux. De même, dans le premier principe de la thermodynamique formulé par (17), il apparaîtrait une intégrale de surface exprimant la puissance des forces *extérieures* de viscosité exercées sur la surface  $(S)(t)$  limitant le volume de fluide considéré ; les seconds membres des équations (18) et (21-23) s'en trouveraient affectés, ainsi que le théorème de Poynting (31).

Même pour un écoulement adiabatique, on ne retrouvera plus la formule de Laplace (25) ni - plus généralement - la réversibilité de l'écoulement (28) ; ceci est bien évident, car la présence des termes de viscosité rend les équations de la mécanique des fluides non invariantes par inversion du temps...

## RÉFÉRENCES :

- [1] H. GIÉ, Entropie et chaleur, B.U.P. n° 734, mai 1991
- [2] L. DETTWILLER, I. Création de chaleur et échanges énergétiques ; application à l'étude thermodynamique du contact de deux solides avec frottement et de l'effet Joule, B.U.P. n° 775, juin 1995

## REMERCIEMENTS :

à Michel RENARD, professeur en CPGE au lycée Blaise Pascal (Clermont-Ferrand), qui a éveillé mon intérêt pour les questions énergétiques de la mécanique des fluides, et a relu le manuscrit de cet article.