

FRACTALES ET CHAOS

Vincent BOURGES

I.P.E.S.T., BP 51, 2070 La Marsa, Tunisie

Cet article est une introduction aux divers comportements d'un système dynamique, pouvant passer d'un régime régulier à un régime chaotique; ce comportement est beaucoup plus fréquent qu'on ne le pense souvent. Qui dit chaos dit fractale, car ces deux notions sont intimement liées; partant donc des fractales ébauchées sur quelques exemples, on arrive au chaos et aux scénarios possibles pour y parvenir, en prenant pour exemple l'application quadratique.

Introduction

L'honnête homme, tout comme le physicien, associe le plus souvent déterminisme et "prédictibilité". Si un mouvement est régi par des équations déterministes, on a tendance à penser que le mouvement est régulier et peut être prédit jusqu'à une échéance lointaine. Or on sait depuis une trentaine d'années que cette idée est fautive: des systèmes, même très simples, régis par des équations déterministes, peuvent avoir des mouvements chaotiques, donc imprévisibles à une certaine échéance. Déterminisme et chaos peuvent très bien aller de pair.

D'ailleurs, le chaos est très fréquent autour de nous: citons le bruit (celui de la vie courante comme celui de l'électronique), le mouvement Brownien des particules, les difficultés de la météorologie à prévoir le changement chaotique du temps, les cours de la Bourse, le chemin suivi par une fourmi ou une mouche, pour ne pas parler du cours de l'histoire ou du comportement des individus ! Le comportement chaotique l'emporte très largement dans la nature sur le comportement régulier, et, si nous le remarquons si peu, c'est peut-être par déformation parce que notre esprit s'est habitué à associer physique et régularité.

Si le chaos domine le monde, c'est aussi parce qu'il possède des qualités qu'on lui attribue rarement. S'il existe en effet des chaos vraiment aléatoires dus au pur hasard (ce sont les *bruits blancs*), la façon chaotique dont une fourmi recherche sa nourriture, qui peut nous paraître absurde, est pourtant le moyen le plus efficace d'explorer les alentours de la fourmière, et si nous parvenons à résister aux virus qui nous assaillent, c'est que notre organisme produit des antivirus de façon chaotique; lorsque, par hasard, il fabrique le bon antivirus, un message lui parvient et il le fabrique en série. Le chaos fonctionne comme le boulanger qui a mis une goutte de colorant dans sa pâte: lorsqu'il a pétri une vingtaine de fois, la goutte s'est allongée d'un facteur 10^6 et le colorant s'est intimement lié à la pâte; le chaos introduit beaucoup de souplesse dans le fonctionnement et permet par essais successifs au système de s'adapter. Par contre, un comportement régulier est incapable de s'adapter: songeons à certaines inerties !

Le chaos est intimement lié aux structures *fractales*, qui sont les supports géométriques du chaos: les fractales, introduites par Mandelbrot également depuis une trentaine d'années, sont devenues un outil indispensable au physicien. Elles décrivent des structures hiérarchisées, une structure contenue dans une structure contenue elle-même dans une autre structure, et ceci

jusqu'à l'infini... Là encore, les exemples de la nature sont nombreux: un tronc d'arbre se divise en branches qui se divisent à leur tour de la même façon en branches plus petites, et ce jusqu'aux feuilles. La hiérarchie menant des galaxies aux amas, puis aux superamas etc... pourrait constituer un deuxième exemple. Les éclairs, les dépôts électrolytiques en forme de branches, les trous dans le gruyère ont une structure fractale, au moins jusqu'à une certaine échelle.

Il faut s'attendre dans les années à venir à un élargissement des demandes faites au physicien: devant les menaces pesant sur l'environnement, l'homme a besoin de comprendre les mécanismes de la nature; il va demander au physicien de démontrer ces mécanismes et de lui expliquer le "comment" plutôt que le "pourquoi", et ceci, non sur des modèles simples comme ceux que fabrique le physicien, mais sur les mécanismes naturels autrement compliqués car soumis à toutes sortes de rétroactions: ce sera le domaine de la physique *non linéaire* où les effets ne sont plus proportionnels aux causes. Le chaos en fait partie.

Le physicien généraliste aura alors affaire à des mécanismes chaotiques, mais qui n'en sont pas moins pourvus d'un certain ordre, et dont l'étude peut révéler toute sorte de résultats intéressants. Chaque chaos a sa signature et son intérêt propre. A ce titre, la connaissance de rudiments sur les fractales et le chaos fait partie de la "culture générale" du physicien.

L'autosimilarité

Parmi toutes les solutions aux problèmes non-linéaires, les solutions *autosimilaires* jouent un rôle essentiel.

Les invariances jouent un rôle fondamental en physique: l'invariance par translation dans l'espace (ou dans le temps) conduit à la conservation du vecteur quantité de mouvement (ou de l'énergie), l'invariance par rotation est liée à la conservation du moment cinétique, mais il y a une invariance dont on ne soupçonnait pas l'importance jusqu'à une époque pas très éloignée: c'est l'invariance par *changement d'échelle*.

Un phénomène indépendant d'échelle est dit *autosimilaire*. Cela signifie qu'il a le même aspect quelle que soit l'échelle. Photographions un morceau de rocher: si le marteau du géologue ou une boîte d'allumettes ne sont pas là pour indiquer l'échelle, on ne sait pas si l'on a affaire à un morceau de caillou ou à une montagne ! On peut dire encore que si l'on agrandit un morceau de l'objet de façon à faire apparaître des détails plus fins, on retrouve l'objet entier. Dans une partie du caillou, on retrouve en fait le caillou entier, mais à une échelle plus petite. La structure est irrégulière à toutes les échelles, et, en agrandissant, on fait apparaître des détails nouveaux qui reproduisent l'aspect antérieur de l'objet. C'est le cas du mouvement Brownien: le mouvement irrégulier d'une poussière observée au soleil a le même aspect que si on l'observait à la loupe ou au microscope.

La procédure qui consiste à faire apparaître de nouveaux détails lorsque l'on agrandit, ou au contraire, à les supprimer si l'on rapetisse, s'appelle "changement de grain" ou "aggrandissement" (coarse-graining), par référence au grain de la pellicule photographique qui limite la résolution des détails les plus fins. L'autosimilarité est donc l'*invariance par aggrandissement*. On peut retrouver la figure entière en "aggrandissant" une partie de celle-ci (mais pas n'importe quelle partie).

Pour une structure géométrique, l'autosimilarité est le propre d'une structure *fractale*, identique à toutes les échelles (par aggrandissement).

Fractales.

La notion de fractale est une notion essentiellement géométrique. On peut dire que c'est une structure géométrique autosimilaire. La géométrie euclidienne considère des points (de dimension topologique 0), des courbes (de dimension 1), des surfaces (de dimension 2) et des volumes (de dimension 3). La géométrie fractale élargit cette distribution en introduisant des objets de dimension non-entière, par exemple intermédiaires entre une courbe et une surface.

La physique est-elle concernée par les fractales ? Oui, et à plus d'un titre. Tout d'abord, elles interviennent dans nombre de phénomènes naturels où la structure fractale s'étend de la taille de l'objet élémentaire à la taille de l'objet entier. Les fractales naturelles ne sont en général pas déterministes, mais statistiques: la loi qui permet de changer d'échelle est une loi statistique. Citons les côtes tourmentées comme celle de la Bretagne, les nuages, les chaînes de montagne, les arbres, et, dans un autre ordre d'idée, les milieux poreux, les agrégats, les polymères et les membranes.

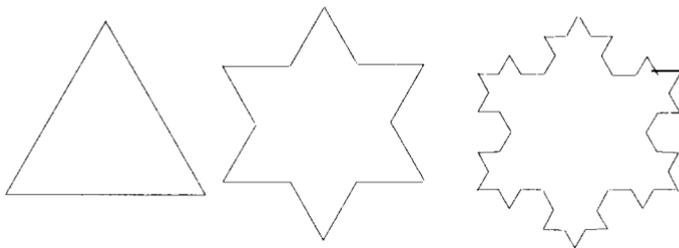
Elles interviennent aussi lors des transitions: changements d'état, passage isolant-métal, métal-supraconducteur, para-ferromagnétique. La fractale est alors une structure transitoire, passage obligé du changement de symétrie du système et d'apparition de propriétés macroscopiques, qui obéit à des lois d'échelle universelles.

Nous les retrouvons enfin dans le chaos. et nous verrons que *l'attracteur étrange*, vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases pour un système dissipatif (avec frottements) lors du passage au chaos (qui est en fait une transition de phase) est une fractale (ou plus exactement une préfractale, autosimilaire jusqu'à une certaine échelle).

La structure fractale est un type nouveau d'organisation de la matière qui lui procure des propriétés extrêmement intéressantes.

L'île de Koch.

Comme premier exemple de fractale, nous allons construire l'île de Koch.



On prend comme *initiateur* un triangle équilatéral, puis on obtient le *générateur* en appliquant un petit triangle équilatéral sur le tiers central

de chaque côté du triangle et en supprimant sa base. L'opération est ensuite renouvelée, et, au bout de quelques itérations, on obtient un beau flocon de neige qui est " l'île de Koch ".

Si la longueur du côté du triangle est la longueur unité, le périmètre du triangle est 3, celui du générateur $3 \times (4/3)$; à l'itération suivante, il devient $3 \times (4/3)^2$, et, à l'itération n , $3 \times (4/3)^n$. Lorsque $n \rightarrow \infty$, le périmètre de l'île de Koch devient infini. La côte de l'île est continue, sa longueur est infinie, et elle n'est dérivable nulle part car on ne peut pas tracer de tangente en un point. Jean Perrin écrivait déjà en 1906 que les courbes qui n'ont pas de tangente sont la règle, et que les courbes régulières, comme le cercle, sont intéressantes, mais tout à fait spéciales.

Reprenons le calcul en ne considérant que l'un des côtés du triangle, dont la longueur initiale est supposée égale à 1; la longueur du générateur est $4 \times (1/3)$, où $1/3$ est la nouvelle unité de longueur dans la nouvelle échelle; à la seconde itération, la longueur devient $16 \times (1/3^2)$, avec comme nouvelle unité $1/3^2$, et, à l'itération n , la longueur est 4^n , avec $1/3^n$ comme unité et l'on

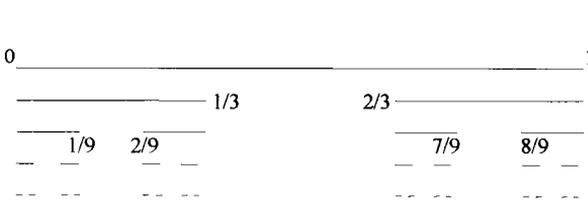
peut écrire, si l'on désigne par $N = 4^n$ la longueur à l'itération n avec l'unité $r = 1/3^n$, $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$,

soit $4^n = (3^n)^D$, où D est la dimension fractale de Hausdorff, ici, de $4^n = (3^n)^D$, on tire $n \ln 4 = nD \ln 3$ et $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,26$. Le périmètre de l'île de Koch est plus qu'une courbe et moins qu'une surface.

La formule générale de la dimension de Hausdorff, si l'on a mesuré N fois la longueur r dans

l'échelle donnée est $D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/r)}$. La dimension de Hausdorff coïncide avec la dimension euclidienne lorsque l'on a affaire à une courbe, une surface ou un volume.

L'ensemble triadique de Cantor.



Un second exemple de fractale est fourni par l'ensemble triadique de Cantor. Il consiste à prendre pour initiateur le segment $[0,1]$ et à en retirer le tiers central pour obtenir le générateur qui est donc constitué des deux

segments $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$. On procède ensuite de façon similaire à la deuxième itération sur les deux segments restants en retirant le tiers central, et ainsi de suite...

On obtient à la limite un ensemble fractal, l'ensemble triadique de Cantor ou poussière de Cantor, dont on peut calculer la dimension fractale de Hausdorff en remarquant que pour le générateur on a 2 segments de longueur $1/3$, et, à l'itération n , 2^n segments de longueur $1/3^n$,

$$\text{soit } D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/r)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63..$$

La poussière de Cantor est donc intermédiaire entre un point et une ligne.

Un jeu de chaos.

On se propose de jouer au jeu suivant: étant donné un point choisi au départ sur le segment $[0,1]$, on triple la distance de ce point à l'extrémité la plus proche du segment (0 ou 1). Puis on recommence; le but du jeu est de rester le plus longtemps possible à l'intérieur du segment sans en sortir.



Par exemple, sur la figure, le joueur perd au troisième coup.

De quel point faut-il partir pour que le point reste

indéfiniment sur le segment ? Il est évident qu'un point du segment $]1/3, 2/3[$ sort au coup suivant. Il ne faut donc pas choisir au départ un point sur ce segment, ni d'ailleurs un point qui, au coup suivant, arrivera sur ce segment, c'est-à-dire sur les segments $]1/9, 2/9[$ et $]7/9, 8/9[$ correspondant à la deuxième itération de l'ensemble de Cantor etc...L'ensemble des points gagnants est donc l'ensemble de Cantor.

Calcul en base 3

Il est pratique d'écrire les points de l'ensemble de Cantor en base 3. Par exemple, le nombre

0,202 en base 3 signifie $2 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3^2} + 2 \times \frac{1}{3^3} = \frac{20}{27} = 0,\overline{7407}$ (c'est-à-dire 0,7407407407...).

Un point de l'ensemble de Cantor ne doit pas avoir de 1, puisque le 1 correspond au tiers central de chacune des itérations; par exemple, 0,12 n'est pas un nombre de Cantor puisqu'il est compris entre $1/3$ et $2/3$; par convention, on conviendra que $1/3$, qui est un nombre de Cantor, s'écrit $0,\overline{02}$ et non $0,1$.

La multiplication par 3 d'un nombre de Cantor revient simplement à décaler tous les chiffres de une place à gauche; par exemple, en multipliant $0,0202$ par 3, on obtient $0,202$.

Soit par exemple $x_0 = 0,0202$ le nombre choisi initialement; il a un 0 juste après la virgule, et il est donc plus proche de 0 que de 1; par conséquent, $x_1 = 3x_0 = 0,202$.

x_1 est plus proche de 1; d'où la distance du point suivant à 1 est 3 ($1-x_1$) = $1-x_2$, et $x_2 = 1-(3-3x_1) = 3x_1-2$, ce qui revient à décaler d'une place vers la gauche en supprimant le 2 qui passe au dessus de la virgule. On peut résumer les deux cas par la formule $x_{n+1} = 3x_n \text{ mod } 1$ ou

$x_{n+1} = \langle 3x_n \rangle$, où les crochets signifient que l'on prend la partie fractionnaire de $3x_n$.

Si le nombre de Cantor termine par un 2 suivi par des 0, soit en fait par $\overline{0}$, il aboutira à 0 (exemple: $0,0202\overline{0} \rightarrow 0,202\overline{0} \rightarrow 0,02\overline{0} \rightarrow 0,2\overline{0} \rightarrow 0$)

Si le nombre de Cantor se termine par $\overline{2}$, il aboutira à 1 (car $1 = 0,\overline{2}$).

On dit que le *bassin d'attraction de l'attracteur 0* est l'ensemble des nombres de Cantor qui terminent par $\overline{0}$, et que le *bassin d'attraction de l'attracteur 1* est l'ensemble des nombres de Cantor qui terminent par $\overline{2}$.

Les orbites

Un nombre de Cantor rationnel présente une suite de 0 ou 2 qui se répète indéfiniment. Par exemple, $1/4$ s'écrit $0,\overline{02}$. Son *orbite* (c'est-à-dire la suite x_0, x_1, x_2, \dots) est périodique de période 2, car $0,\overline{02} \rightarrow 0,2\overline{0} \rightarrow 0,\overline{02}$ correspondant à $1/4 \rightarrow 3/4 \rightarrow 1/4$. Il existe aussi des orbites périodiques de période 3 (par exemple en partant de $0,\overline{0022}$), de période 4 etc...

On arrive enfin aux nombres irrationnels, qui présentent une suite illimitée de 0 ou 2 sans aucune périodicité. En déplaçant par la transformation tous les chiffres de une place à gauche, on obtient un nombre toujours différent.

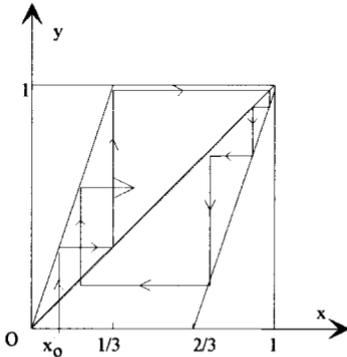
Physiquement, on ne connaît les conditions initiales, ici x_0 , qu'avec une certaine précision; partons par exemple de $x_0 = 0,0202$ par défaut: cela veut dire que le véritable point de départ est n'importe quel nombre compris entre $0,0202$ et $0,0202\bar{2}$, soit $0,0202\frac{000}{222}$, et, au bout de 4 itérations, on obtiendra n'importe quel nombre compris entre 0 et 1! Là réside l'essence du chaos : au bout de quelques itérations, on a perdu tout pouvoir de prédiction.

Partant d'un point de Cantor irrationnel, on va donc voir se dessiner l'ensemble de Cantor comme la *structure spatiale* du mouvement chaotique engendré par l'itération qui est, elle, parfaitement déterministe. Pour cette raison, on dit que l'on a affaire à un *chaos déterministe*. Déterminisme et chaos peuvent fort bien aller ensemble, c'est même le cas le plus fréquent.

Application de premier retour.

L'application étudiée précédemment qui, à x_n fait correspondre $x_{n+1} = \langle 3x_n \rangle$ s'appelle *application de premier retour*. Elle est susceptible d'une représentation graphique: traçons le graphe de la fonction $y = \langle 3x \rangle$ sur les intervalles $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$.

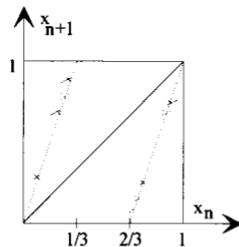
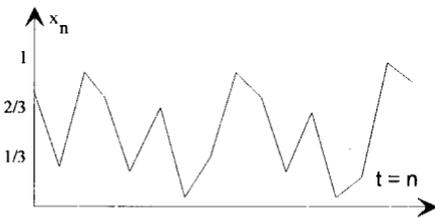
Partant de x_0 , x_1 se trouve à la verticale de x_0 ; on trace alors une horizontale qui coupe la première bissectrice en un point d'abscisse x_1 ; à partir de ce point, on trace à nouveau une verticale qui nous donne x_2 , etc...



Partant d'un point de l'ensemble de Cantor, les points successifs seront tous des points de l'ensemble de Cantor dans l'intervalle $[0, 1]$; on dit que l'ensemble de Cantor est un *ensemble invariant* de l'itération $x_{n+1} = \langle 3x_n \rangle$.

Si l'on désigne par L l'itéré qui se trouve à gauche et par R celui qui se trouve à droite, à un 0 après la virgule correspond L et à un 2 correspond R; comme chaque itération correspond à un déplacement de une place vers la gauche, à 0,0202 par exemple correspond LRLR; sur la figure, on a LLRRRL correspondant au nombre 0,002220... Un observateur qui suit le mouvement peut donc remonter au nombre initial, et, inversement, il peut suivre le mouvement s'il connaît (avec une

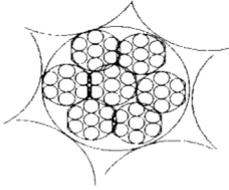
précision infinie!) le nombre initial. L'ordre LLRRRL... est la *dynamique symbolique* de l'itération.



On peut également considérer que x_0 correspond à la position initiale $t = 0$, x_1 à l'instant $t = 1$ et x_n à l'instant $t = n$, et tracer les positions successives au cours du temps. A première vue, le mouvement paraît chaotique et ne semble pas obéir à une loi déterministe. Pourtant, traçons l'application de premier retour x_{n+1} en fonction de x_n : on constate que les points sont alignés suivant deux segments de droite: le chaos a bien une structure parfaitement déterminée et l'on pourra agir sur lui.

Dimension fractale de masse.

Il est souvent plus facile pour une fractale de déterminer sa "dimension de masse". Voyons le sur l'exemple d'un empilement fractal de sphères.



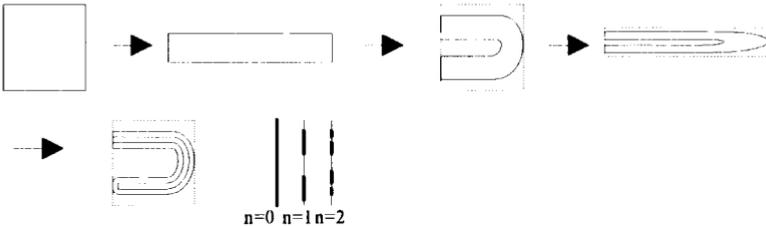
La petite sphère centrale de masse m est entourée de 6 sphères identiques de façon à former une sphère de rayon triple et de masse égale à 7 fois la masse de la sphère initiale. Cette sphère est à son tour entourée de 6 sphères identiques et ainsi de suite... En posant la dimension de masse D telle que la masse contenue dans la sphère de rayon R est proportionnelle à R^D , on a, puisque la masse est multipliée par 7 quand le rayon est multiplié par 3, $7 = 3^D$, soit $\ln 7 = D \ln 3$ et $D = \ln 7 / \ln 3 = 1,77$. S'il s'agit par exemple d'un empilement de poudres, on voit que la masse volumique de la poudre rangée suivant l'ordre fractal diminue lorsque le

rayon augmente, puisque M/R^3 varie comme R^{D-3} qui diminue avec R , en accord avec le fait qu'il existe des trous de plus en plus grands!

La dimension de masse coïncide souvent (mais pas toujours dans le cas des multifractales) avec la dimension de Hausdorff.

Etirement et repliement.

Engendrer une fractale fait souvent appel à deux mécanismes fondamentaux: *étirement* et *repliement*. Pour obtenir une fractale, il faut étirer et replier indéfiniment, un peu à la manière du boulanger qui pétrit sa pâte, mais, à la différence du boulanger, il faut que le volume de pâte diminue à chaque étirement. Prenons pour exemple la fractale appelée " fer à cheval".

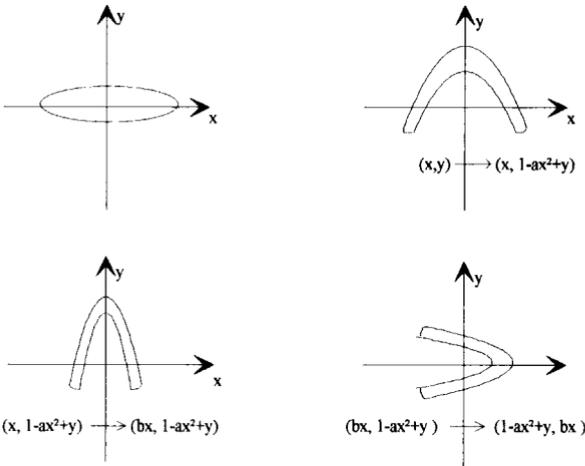


On part d'un rectangle que l'on allonge d'un facteur 2, tant en diminuant la largeur d'un facteur 3. Ainsi, la surface obtenue n'est que le $2/3$ de la surface initiale. On replie ensuite la bande obtenue de façon à ce qu'elle tienne dans le rectangle initial. On obtient ainsi une espèce de fer à cheval. Le procédé est ensuite appliqué à nouveau et l'on obtient une figure ayant la forme

d'une épingle double. La surface diminuant à chaque itération, on se doute que la surface finale de la fractale sera nulle; la structure est feuilletée, avec du vide entre les feuilletés. Si l'on coupe la fractale par un plan perpendiculaire aux feuilletés, on reconnaît d'après la construction l'ensemble triadique de Cantor. Comme il part un feuillet (une ligne de dimension 1) de chaque nombre de Cantor, la dimension fractale de Hausdorff de la fractale sera celle de l'ensemble de Cantor augmentée de une unité, soit $1,63\dots$

On voit donc que les deux ingrédients indispensables pour construire une fractale sont un étirement avec perte de surface (ou de longueur), et un repliement pour rester dans un domaine fini. De même que pour l'ensemble de Cantor, la structure présente des trous à *toutes les échelles*. A l'intérieur de chaque pli, on trouve d'autres plis, qui contiennent à leur tour d'autres plis etc...C'est une structure hiérarchisée.

On peut prendre comme autre exemple " l'attracteur de Hénon" introduit par Hénon pour simplifier le modèle de Lorenz qui explique le passage d'un régime régulier à un régime chaotique (turbulent) pour la convection des fluides. Partant d'une ellipse, celle-ci est étirée par la première transformation, qui conserve sa surface. Puis la figure est rétrécie d'un facteur b (<1) sur l'axe des abscisses et sa surface diminue. On la fait enfin pivoter pour obtenir une figure un peu similaire à la première itération du fer à cheval. A la seconde itération, on obtient l'épingle double, et, à la limite, un espèce de croissant feuilleté qui rappelle un peu l'attracteur du fer à cheval.



Les différents régimes dynamiques.

Le mouvement d'un système dynamique peut s'effectuer suivant l'un des trois régimes suivants:

- *le régime périodique*: le mouvement se répète identique à lui-même au bout d'une période.
- *le régime quasi-périodique*: dans un régime quasi-périodique à 2 fréquences de base, la fonction décrivant le mouvement est une fonction périodique pour chacune de deux variables indépendantes, ces deux variables étant proportionnelles au temps, t/T_1 et t/T_2 . Par exemple,

$y = a \sin(2\pi t/T_1) + b \sin(2\pi t/T_2)$. C'est le cas du mouvement d'un point de la terre qui résulte des mouvements de rotation de la terre sur elle-même et autour du soleil.

- *le mouvement apériodique*, qui ne présente aucune périodicité.

Un mouvement sera représenté dans *l'espace des phases*, dont les axes sont les coordonnées de position et de vitesse. On s'intéresse aux systèmes *dissipatifs*, c'est-à-dire avec frottements. De tels systèmes perdant constamment de l'énergie du fait des frottements, on doit donc leur injecter de l'énergie pour que leur mouvement puisse se poursuivre. Après un régime transitoire, le système dissipatif tend vers un attracteur qui peut être périodique, quasipériodique ou apériodique. Pensons au régime forcé d'un circuit RLC série, où, après un régime transitoire qui prend rapidement fin du fait des frottements dans la résistance, le circuit oscille périodiquement à la fréquence de l'excitateur.

Dans le cas général, tout mouvement déterministe peut être décrit par une ou plusieurs équations différentielles (par exemple $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t$ pour un oscillateur forcé).

On peut toujours se ramener à un ensemble de n équations différentielles ordinaires du premier

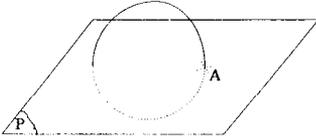
ordre: $\frac{d}{dt} \bar{X}(t) = F(\bar{X}, t)$. (Dans notre exemple, on pose $y = \dot{x}$ et on a les deux équations

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\lambda y - \omega_0^2 x + F \cos \omega t \end{cases}, \text{ qui sont bien sous la forme annoncée avec } \bar{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et}$$

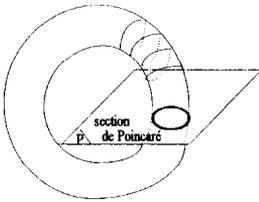
$\frac{d\bar{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$. Ce système d'équations différentielles est appelé un *flot*.

Dans les cas simples, ce flot est intégrable, mais, la plupart du temps, (par exemple dans le problème à trois corps), il ne l'est pas et l'on ne connaît pas de solution analytique. On doit alors recourir à une solution numérique sur ordinateur, ou, plus simplement, on étudie la *section de Poincaré* du flot, qui est l'ensemble des intersections de la trajectoire avec un plan.

On est ainsi ramené à un problème beaucoup plus simple: le système d'équations différentielles est remplacé par une simple application du plan, qui, à partir d'un point d'intersection, détermine le point d'intersection suivant: c'est *l'application de premier retour*, dont nous avons déjà parlé à propos de l'ensemble de Cantor .



d'en haut).



- Dans un espace de phase à 3 dimensions, le mouvement périodique tend vers un attracteur qui est une courbe fermée, et la section de Poincaré sera un point ou un ensemble de points si la trajectoire fait plusieurs tours avant de reprendre le même mouvement (on considère les intersections dans un sens d'évolution déterminé, par exemple en venant

- Le mouvement quasipériodique tend vers un attracteur inscrit sur un tore (en forme de chambre à air), en décrivant une courbe qui tourne autour de l'axe central tout en s'enroulant autour du tore. Si les fréquences sont incommensurables (leur rapport est irrationnel), à chaque tour la courbe va couper le cercle en un point différent. Si les fréquences sont dans le rapport P/Q avec P et Q entiers, on peut trouver une fréquence plus petite dont les deux fréquences sont des multiples et le

mouvement est en fait périodique: la section de Poicaré est un nombre fini de points du cercle.

- Dans le cas apériodique, la section convenablement choisie de l'attracteur étrange sera elle-même une fractale. Si le système est fortement dissipatif (beaucoup de frottements), cette section sera presque un morceau de courbe (en fait une courbe épaisse, "bruyante"); on pourra alors distinguer les points de la courbe par leur abscisse curviligne et étudier là encore l'application de premier retour qui fait correspondre à un point de la section le point suivant lorsque la trajectoire revient après avoir effectué un tour supplémentaire.

Le passage au chaos.

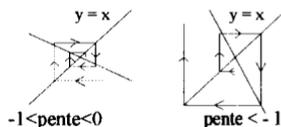
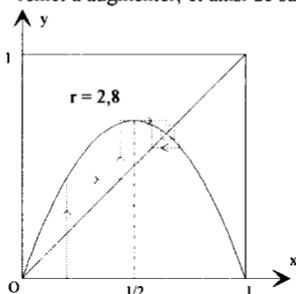
On sait maintenant que les lois déterministes, même simples, mènent le plus souvent à un comportement chaotique. L'origine du chaos provient de *la sensibilité aux conditions initiales*: SCI. Une loi déterministe peut être telle qu'elle *amplifie de façon exponentielle un écart même minime* entre deux conditions initiales voisines. Or un état initial ne peut être connu en physique avec une précision absolue. A une même condition initiale de la physique, des expériences successives conduisent à des trajectoires très voisines au départ, mais qui vont ensuite diverger. D'où un manque de prédictibilité à long terme.

Il existe plusieurs scénarios de passage à l'état chaotique; nous allons en détailler un : le passage d'un régime périodique à un régime chaotique par doublement des périodes; l'application de premier retour est *l'application quadratique*.

L'application quadratique.

Elle est appelée également application logistique, ou parabole logistique. C'est un modèle célèbre qui a été très étudié et qui possède, bien que très simple, une variété de comportements tout à fait insoupçonnée. Il s'agit de l'application: $y = f(x) = rx(1-x)$, décrite par une parabole coupant l'axe des abscisses en 0 et 1, présentant un maximum pour $x = 1/2$ et $y = r/4$. On l'étudie pour $0 < r < 4$. Considérée comme application de premier retour, elle s'écrit $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$; on part d'une abscisse initiale x_0 , et on suit les itérés successifs.

A l'origine, on a utilisé cette application pour décrire l'évolution d'une population de prédateurs (des renards par exemple): celle-ci augmente lorsque la nourriture (des lapins) est abondante, mais, si elle devient trop nombreuse, la nourriture vient à manquer et la population de renards diminue; les lapins redeviennent alors plus nombreux, et par suite, la population de renards se remet à augmenter, et ainsi de suite. On a donc une rétroaction qui régularise le système, due à la présence du terme non-linéaire quadratique $-rx^2$.

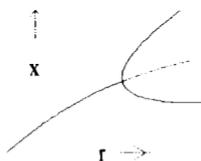


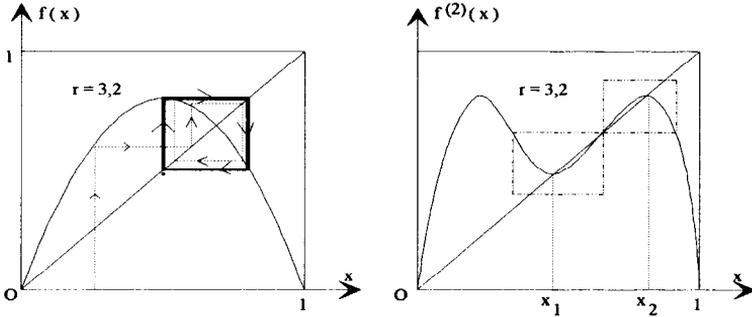
Si $r < 3$, la suite des itérés tend vers le point fixe stable intersection de la parabole

avec la première bissectrice $y = x$, dont l'abscisse est donnée par $rx(1-x) = x$, soit $x = 1 - 1/r$. La valeur de la pente en ce point est donnée par la valeur de la dérivée $y' = r(1-2x)$ en ce point, soit $y' = 2 - r$. Pour $r = 3$, la pente de la tangente est -1 , et le point fixe, qui était attracteur, devient

au contraire un "repousseur" (voir figure).

Pour $r > 3$ (par exemple, $r = 3,2$), on s'aperçoit, en traçant l'application de second retour $x_{n+2} = rx_{n+1}(1-x_{n+1})$, avec $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$, soit $f^{(2)}(x) = f(f(x))$, que cette application possède 4 points fixes, dont deux stables. Le système est devenu périodique de période double et il passe alternativement par les deux points fixes stables, il présente pour $r = 3$, une bifurcation du type "bifurcation fourche": les deux dents externes de la fourche sont les nouveaux itérés après bifurcation, la dent intérieure est l'ancien itéré, devenu instable. Les deux nouveaux points fixes, confondus avec l'ancien pour $r = 3$, s'éloignent lorsque r augmente. En particulier, pour $r = 3,2360$, on a l'orbite superstable: $0,5 = x_1 \rightarrow 0,8090 = x_2 \rightarrow 0,5$ (superstable car la convergence est très rapide du fait que $f'(x) = 0$ pour $x = 1/2$). On constate que les deux parties encadrées sur le graphe de $f^{(2)}(x)$ reproduisent dans une échelle plus petite ($-2,502$ pour la figure retournée du carré du bas, et $2,502^2$ pour l'autre), la parabole initiale $f(x)$. On a un phénomène d'autosimilarité qui est à l'origine du doublement des périodes.



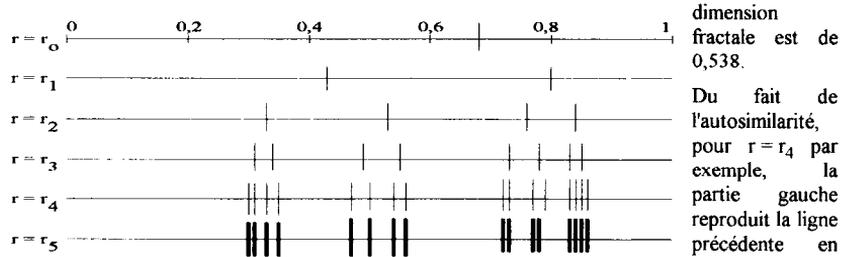


Du régime périodique au chaos.

Pour $r = r_1 = 3,4495$, la valeur de la dérivée de $f^{(2)}(x)$ aux deux points fixes stables atteint la valeur -1 . Ces deux points deviennent instables à leur tour. On a une nouvelle bifurcation pour chacun des deux points et l'on a pour $r > r_1$ huit points fixes pour l'application de 4^{ième} retour $f^{(4)}(x)$, dont quatre stables; par exemple, pour $r = 3,4985$, l'orbite superstable de période 4 : $0,5 \rightarrow 0,874 \rightarrow 0,383 \rightarrow 0,827 \rightarrow 0,5 \dots$ Lorsque l'on continue à faire croître r , le doublement des périodes se reproduit de plus en plus rapidement: 8, 16, 32, 64 ... Les valeurs

successives de r satisfont à la loi d'échelle: $\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \rightarrow \delta$, où $\delta = 4,66920 \dots$ est un nombre universel, commun à toutes les applications possédant un maximum quadratique, appelé nombre de Feigenbaum.

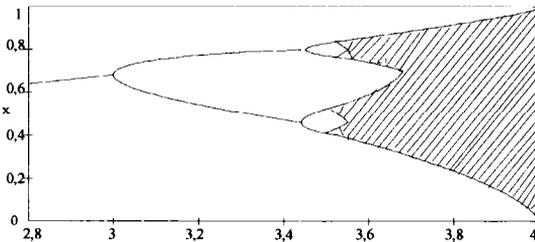
Pour la valeur critique du paramètre de croissance, $r = r_\infty = 3,5699$, la période devient infinie et l'orbite est aperiodique, correspondant à un mouvement chaotique. L'attracteur étrange qui lui correspond est ici un ensemble de Cantor, conformément au schéma ci-dessous. Sa dimension fractale est de 0,538.



dimension fractale est de 0,538.

Du fait de l'autosimilarité, pour $r = r_4$ par exemple, la partie gauche reproduit la ligne précédente en sens inverse avec

un facteur de réduction de 2,502 et la partie droite reproduit la ligne précédente réduite par un facteur 2,502².

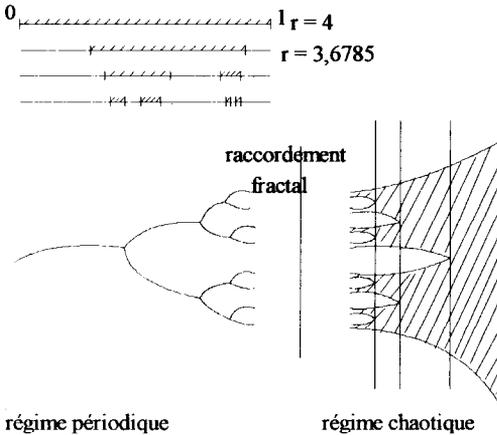


Le chaos obtenu $r = r_{\infty}$ se présente en une infinité de points centrés autour des quatre valeurs: 0,38, 0,5, 0,82 et 0,88.

Le régime chaotique

Partons maintenant de $r = 4$; le chaos a envahi entièrement l'intervalle $[0, 1]$. Diminuons r : la largeur de l'intervalle exploré diminue. Pour $r = 3,6785$, l'intervalle se scinde en 2 bandes plus étroites, puis, r diminuant, en 4, puis 8 bandes...Lors de son mouvement, le point passe selon un schéma prédictible (dynamique symbolique) d'une bande à l'autre, mais on ne sait pas prédire en quel point de la bande il va tomber.

On a donc une suite de bifurcations inverses qui convergent vers la même limite pour $r = 3,5699$. La fractale de Cantor obtenue pour cette valeur est la structure de transition qui permet de passer du régime périodique au régime chaotique.

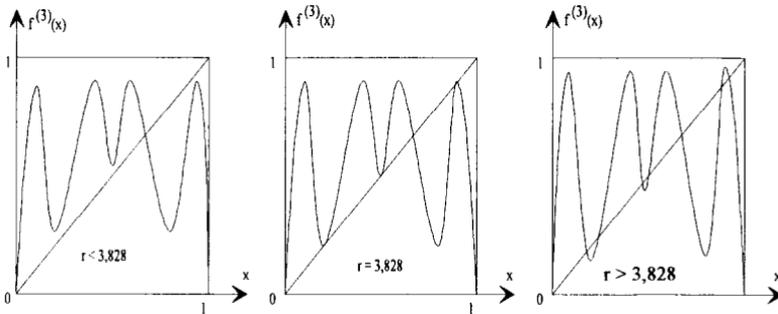


Partant d'un mouvement régulier explorant un ensemble de points de longueur nulle, on est arrivé, après une transition de phase, à un mouvement chaotique explorant un ensemble de segments de longueur non nulle, pouvant aller jusqu'au chaos complet sur l'intervalle entier pour la valeur 4 du paramètre de contrôle.

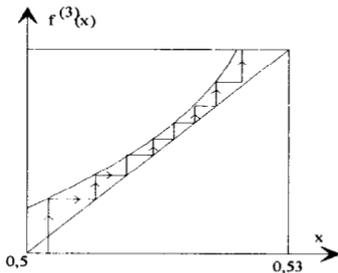
Dans la partie chaotique existent cependant des fenêtres où le mouvement redevient périodique. C'est le cas de la fenêtre de période 3, commençant à $r = 3,828$, qui s'annonce par un phénomène d'*intermittence*

Intermittence

Si l'on trace l'application de 3ième retour pour r légèrement inférieure à $r = 3,828$ où commence la fenêtre de période 3, on constate que l'on a affaire à une *bifurcation tangente*: la courbe $f^{(3)}(x)$ s'approche en trois endroits de la première bissectrice, et, pour $r = 3,828$, devient tangente en trois points à celle-ci. Pour une valeur légèrement supérieure, l'application possède 6 points fixes, dont trois stables, correspondant à une période 3.



Si on agrandit la partie centrale de la courbe au voisinage de 0,5 pour une valeur de r légèrement inférieure à l'accrochage, on voit que les itérés restent "piégés" pendant un certain temps le long du canal existant entre la courbe et la bissectrice. C'est l'origine du phénomène d'intermittence: le mouvement devient presque périodique pendant un certain temps, puis on a une bouffée chaotique et l'intermittence reprend. Lorsque r augmente, les intermittences deviennent de plus en plus longues jusqu'à l'accrochage de période 3.



Confirmations expérimentales.

Les scénarios de passage au chaos que nous avons décrits sont-ils des vues théoriques esthétiques sans lien avec la réalité, ou l'expérience confirme-t-elle cette description?

En fait, l'expérience montre que les voies d'accès au chaos sont nombreuses, et que les chemins décrits précédemment en font partie.

Parmi de nombreuses expériences, citons-en quelques unes parmi les plus classiques:

- Le mouvement d'une boussole soumise à un champ magnétique fixe (le champ magnétique terrestre) et à un champ magnétique tournant créé par deux bobines de Helmholtz. La boussole peut être piégée par le champ fixe, ou par le champ tournant ou avoir un mouvement chaotique si elle n'arrive pas à se décider entre les deux champs! La boussole confirme le passage au chaos par une cascade de doublements de périodes.
- La convection de Rayleigh-Bénard, qui consiste à chauffer par le fond une couche de fluide et à créer ainsi un gradient vertical de température; on a apparition de rouleaux convectifs. Suivant la valeur du nombre de Rayleigh qui contrôle l'expérience, on a des comportements très différents allant jusqu'au comportement chaotique de la turbulence. On a pu ainsi observer la route du nombre d'or vers le chaos.
- Les réactions d'oscillateurs chimiques de Bélousov-Zhalotinsky où le système oscille avec changement de couleur, présentant également une gamme très variée de comportements suivant les concentrations des réactifs.

Citons encore les instabilités et mouvements chaotiques du laser ainsi que les différents régimes possibles de certains circuits électroniques, pour ne pas parler du comportement de l'agitateur magnétique de nos laboratoires de chimie à grande vitesse !.

Conclusion.

Fractales et chaos peuvent être un thème d'étude très enrichissant et varié, en relation avec les mathématiques:

- étude des nombres dans des bases variées.
- étude de jeux basés sur des fractales.
- simulation expérimentale du chaos à la calculatrice.
- introduction expérimentale aux fractales en dessinant ou en découpant.
- travaux pratiques sur la boussole piégée dans deux champs magnétiques.

Dans l'étude d'un système réel interviennent le plus souvent des rétroactions qui induisent des non-linéarités, d'où des comportements extrêmement variés et parfois déconcertants, que ne prend pas en ligne de compte la physique classique. Le passage d'un régime régulier à un régime chaotique en est un exemple, c'est en fait une transition de phase, en ce sens qu'on passe, au moyen d'une structure fractale, d'un état (comportement régulier) à un autre état complètement distinct (comportement chaotique) dont les propriétés sont différentes, et, en un certain sens, plus riches, par la capacité d'exploration rapide de l'espace des phases par le chaos. La particularité de la structure fractale est qu'elle peut s'atteindre par deux côtés et sert donc de transition.

On ne peut que souhaiter l'introduction dans les programmes d'enseignement de ces notions nouvelles qui apportent un éclairage neuf sur les mécanismes qui gouvernent notre monde.

Bibliographie.

- Des rythmes au chaos de P. Bergé, Y. Pomeau et M. Dubois-Gance aux éditions Odile Jacob (1994)(très intéressant et facile à lire).
 - L'ordre dans le chaos de P. Bergé, Y. Pomeau et Ch. Vidal aux éditions Hermann (1988) (très pédagogique et plus technique).
 - L'ordre du chaos; bibliothèque pour la science, diffusion Belin (articles parus dans "pour la science" de 1977 à 1989).
 - Fractals, chaos, power laws de Manfred Schroeder aux éditions W.H.Freeman and company (1991)(plein d'exemples et de niveau accessible).
 - Physique et structures fractales de J.F.Gouyet aux éditions Masson (1992) (très, peut-être trop complet).
 - La nouvelle physique (sous la direction de Paul Davies) aux éditions Flammarion (1993)
 - Dieu joue-t-il aux dés ? de Ian Steward aux éditions Flammarion (1992)
-