

De l'oscillateur dissipatif au saut à l'élastique

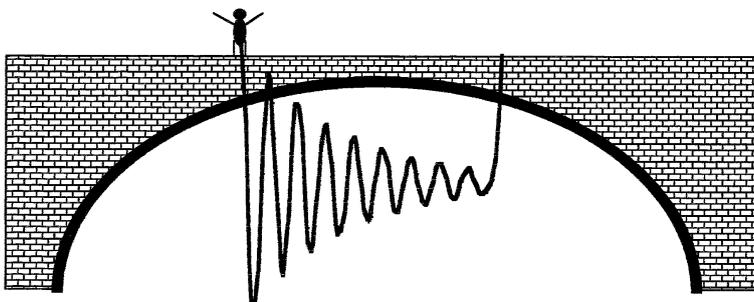
par Charles de IZARRA et Olivier VALLEE

Centre Universitaire de Bourges

UFR Faculté des Sciences

GREMI - Université d'Orléans

Rue Gaston Berger - B.P. 4043 - 18028 Bourges Cedex



RÉSUMÉ

En utilisant un modèle d'oscillateur harmonique amorti par une force visqueuse proportionnelle à la vitesse, on étudie complètement le mouvement d'une masse oscillant à l'extrémité d'un ruban élastique. Les mesures permettent d'étudier la validité de la loi de Hooke et de déterminer le module d'Young du matériau élastique utilisé. Cette étude se révèle être plus riche que l'analyse d'un ressort «pur» sur quelques périodes d'oscillation, par la présence du phénomène dissipatif qui existe de manière intrinsèque.

1. THÉORIE DE L'EXPÉRIENCE

De l'oscillateur dissipatif...

L'oscillateur harmonique à un seul degré de liberté, obtenu dans la pratique à l'aide d'une masse et d'un ressort à boudin métallique, constitue le modèle canonique de l'oscillateur en mécanique [1], et peut être considéré comme un modèle générique en physique (on le retrouve

à la fois en optique ou en physique quantique avec le célèbre modèle du corps noir de Max Planck).

De nombreux catalogues et de livres de physique expérimentale proposent des expériences destinées à l'étude d'un ressort avec par exemple la mise en évidence de l'isochronisme des oscillations ou encore la conservation de l'énergie mécanique totale sur quelques périodes. Choisissons z comme coordonnée généralisée permettant de repérer la masse m suspendue à l'extrémité du ressort de constante de rappel k et de masse négligeable devant m , par rapport à sa position d'équilibre. Le choix de cette référence permet de faire abstraction de la pesanteur. Dans ces conditions, la masse m n'est soumise qu'à la force de rappel $\vec{F} = F \vec{e}_z$ du ressort donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{F} = -k z \vec{e}_z \quad (1)$$

qui dérive de l'énergie potentielle parabolique (à une constante arbitraire près) :

$$U = \frac{1}{2} k z^2 + C^{te} \quad (2)$$

L'énergie mécanique totale E du système est conservée au cours du temps. En appelant E_c l'énergie cinétique de la masse m , on a :

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} m \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + U(z) \quad (3)$$

L'équation de mouvement de la masse m est alors facilement obtenue en dérivant l'expression de l'énergie mécanique totale par rapport au temps. On obtient :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + kz = 0 \quad (4)$$

Pour être rigoureux et tenir compte de l'inexorable dissipation de l'énergie, il est classique d'ajouter à l'équation (4) un terme de dissipation que l'on choisit proportionnel à la vitesse, pour des raisons de commodité mathématique. L'équation (4) devient alors :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} + kz = 0 \quad (5)$$

dans laquelle $c \geq 0$ représente la constante d'amortissement. En toute rigueur, l'expérience montre que ce modèle d'amortissement n'est

justifié que pour les très faibles vitesses. La plupart du temps, on choisit d'accentuer ce type d'amortissement «fluide» à l'aide de dispositifs se déplaçant dans un fluide visqueux (eau ou huile) ou encore en faisant appel à des effets électromagnétiques (freins à courant de Foucault).

...Au saut en élastique

Quiconque a vu quelqu'un sauter en élastique a pu remarquer que le sauteur ne s'écrase pas sur le support de saut (pont ou grue) après avoir effectué une oscillation. Cette simple remarque permet de conclure que l'énergie mécanique totale du candidat au saut se dissipe, et que cette dissipation n'est pas seulement due au frottement de l'air (les sauteurs adoptent une position aérodynamique lorsqu'ils se jettent dans le vide). **Le dissipateur d'énergie est l'élastique lui-même**, qui, par sa structure moléculaire particulière, et les interactions entre ses molécules constitutives dissipe l'énergie mécanique soit en augmentant sa température soit en modifiant sa structure interne*.

A l'aide de la rhéologie élémentaire [2], il est possible d'imaginer un modèle simple d'oscillateur «élastique» ; posons, de manière empirique (ceci sera justifié par la suite) qu'un oscillateur élastique peut être modélisé à l'aide d'un ressort de constante de rappel k et d'un amortisseur de paramètre c (voir figure 1).

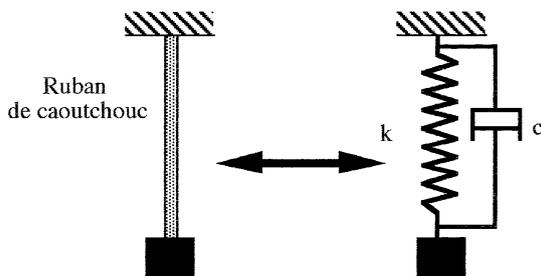


Figure 1 : Modélisation d'un oscillateur élastique (ruban de caoutchouc) à l'aide d'un ressort de constante de rappel k et d'un amortisseur.

* Les élastiques de saut sont en fait constitués d'un faisceau de multiples brins qui interagissent entre eux lorsqu'ils s'allongent, ce qui a pour effet d'augmenter l'effet de dissipation de l'énergie mécanique du système élastique-sauteur.

La dynamique de la masse m suspendue à l'élastique est alors décrite par l'équation (5) que l'on normalise avec les grandeurs suivantes :

– paramètre d'amortissement : $\lambda = \frac{c}{2m}$ (6)

– pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (7)

La pulsation propre ω_0 est reliée à la période propre T_0 de l'oscillateur non amorti par la relation :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (8)$$

L'équation (5) devient :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\lambda \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \quad (9)$$

Lorsque $\lambda < \omega_0$, l'amortissement est faible, et la solution de l'équation (9) est donnée par le produit d'une fonction exponentielle décroissante $e^{-\lambda t}$ et d'une fonction harmonique $\cos(\Omega t + \varphi)$ oscillant à la pseudo-pulsation Ω , donnée par :

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \quad (10)$$

La solution $z(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$ est représentée sur la figure 2. A et φ sont deux constantes d'intégration déterminées à l'aide des conditions initiales du mouvement.

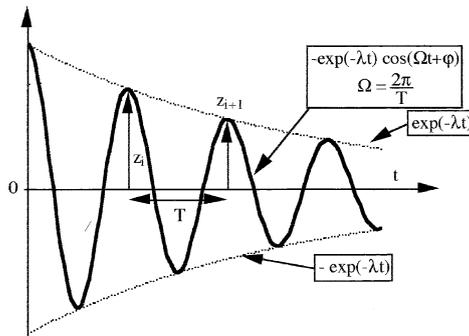


Figure 2 : Représentation graphique de la solution $z(t)$ de l'équation (9) dans le cas où l'amortissement est faible ($\lambda < \omega_0$) : c'est le régime d'oscillation pseudo-périodique.

Sur le graphique de la figure 2, deux points d'amplitude maximum (donc mesurables facilement avec une erreur réduite) sont séparés par une pseudo-période T ($T = 2\pi/\Omega$). On définit alors le décrétement logarithmique δ du mouvement donné par :

$$\delta = \text{Ln} \frac{Z_i}{Z_{i+1}} = \lambda T \quad (11)$$

La mesure du décrétement logarithmique peut être réalisée expérimentalement sur plusieurs couples de maxima (ou de minima) successifs ; l'obtention d'une valeur constante sera une preuve de la validité du modèle adopté.

Le seul fait de considérer une solution oscillante avec au moins deux oscillations présuppose que l'amortissement est faible, et que la pseudo-période T peut être confondue avec la période propre T_0 sans commettre une importante erreur. En effet, on a :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 \quad (12)$$

2. MONTAGE PROPOSÉ

Le montage utilisé est présenté sur la figure 3. Il comprend un ruban élastique de type «caoutchouc à fronde», de section carrée ($S = 5 \text{ mm}^2$) et de 45.5 cm de longueur. A l'extrémité libre du ruban de caoutchouc est fixé un fil fin et une masse m ($m = 100 \text{ g}$). Le fil fin passe dans la gorge de la roue codeuse d'un transducteur de mouvement de marque Leybold, qui délivre une tension proportionnelle à la longueur parcourue par la masse m . Ces signaux sont échantillonnés à l'aide de l'interface CASSY (Leybold), puis analysés sur ordinateur à l'aide d'un logiciel de traitements numériques de données.

Les oscillations libres de la masse m sont enregistrées à partir de conditions initiales définies en libérant la masse m maintenue «collée» sur le noyau de fer d'un électroaimant. Ainsi, l'ouverture du circuit de l'électroaimant de maintien sert à déclencher la séquence d'échantillonnage des données.

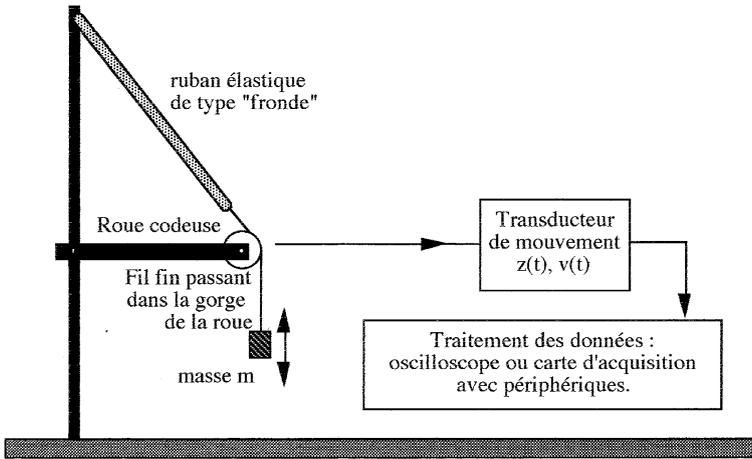


Figure 3 : Montage utilisé pour étudier les oscillations libres d'un ruban de caoutchouc.

3. RÉSULTATS OBTENUS

Loi de Hooke et domaine d'élasticité du matériau

Dans un premier temps, il est possible de déterminer la constante de rappel k du ruban élastique en mesurant son allongement statique ΔL obtenu à l'aide d'une force extérieure F connue. Dans la pratique, on utilise des masses marquées, et on mesure l'allongement ΔL de l'élastique. Les mesures sont résumées sur la figure 4, obtenue en traçant ΔL en fonction de F . On remarque que, contrairement à un ressort, les points ne sont pas alignés ; la loi de Hooke linéaire n'est vérifiée que sur un domaine d'allongement restreint. En d'autres termes, le système (élastique + masse) est caractérisé par une constante de rappel qui dépend soit de la valeur de la masse, soit de la valeur de l'allongement. La courbe de la figure 4 est typique des courbes obtenues pour des matériaux du genre caoutchouc : au delà d'une certaine valeur de la force F , le matériau ne peut plus s'allonger, et la courbe possède une asymptote verticale (pour mettre cet effet en valeur expérimentalement, les mesures nécessitent de rompre le ruban en le chargeant au maximum, ce qui n'est pas dénué de risque).

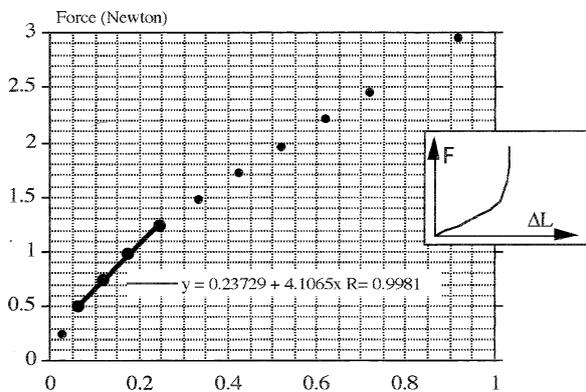


Figure 4 : Graphe donnant la force générée par l'élastique en fonction de son allongement. Dans le médaillon, on a indiqué le comportement du matériau pour les valeurs élevées de F (voir texte).

Mesure de la constante d'amortissement interne du matériau

Le graphe de z en fonction du temps est donné sur la figure 5. On remarque que l'amortissement est faible, et que le régime d'oscillation est pseudo-périodique. La mesure de la pseudo-période donne :

$$T \approx T_0 = 0.9 \text{ s}$$

ce qui permet de calculer la valeur de ω_0 , puis de la constante de rappel k de l'oscillateur. On obtient :

$$k = 4.8 \text{ N/m}$$

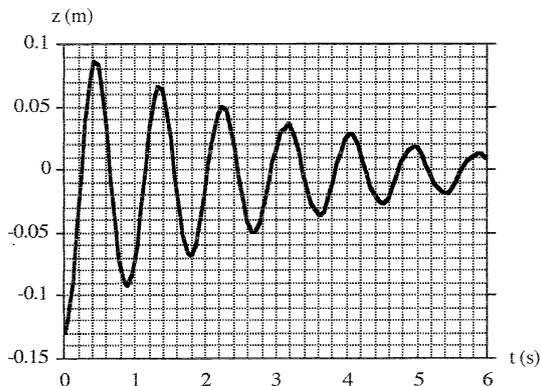


Figure 5 : Mesure de l'allongement de l'oscillateur élastique (oscillateur libre) en fonction du temps, obtenue avec une masse $m = 100 \text{ g}$. L'axe vertical est orienté positivement vers le haut. Les conditions initiales sont : $z_0 = -13 \text{ cm}$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$.

Cette valeur de la constante de rappel de l'oscillateur correspond à la pente de la courbe $F(\Delta L)$ mesurée pour un allongement de l'élastique correspondant à sa position d'équilibre ; sur la figure 4, on a représenté la portion de droite dont la pente est égale à k . On trouve $k = 4.1 \text{ N/m}$, ce qui est proche de la valeur dynamique mesurée.

La mesure du décrétement logarithmique δ à partir de plusieurs couples d'extrema successifs montre que celui-ci est constant, ce qui justifie le choix du modèle d'amortissement visqueux fait plus haut. Il est aussi possible, à partir des valeurs des maxima, de calculer numériquement «la meilleure courbe» (au sens des moindres carrés) enveloppant la courbe oscillante (des programmes d'ajustage numérique sont maintenant disponibles avec les tableurs et avec les logiciels courants de traitement de données).

La valeur de λ mesurée est :

$$\lambda = 0.38 \text{ s}^{-1}$$

Cette valeur permet de justifier à posteriori que $\lambda \ll \omega_0$, et que la relation (12) est utilisable avec une bonne approximation.

A partir de la valeur de k mesurée, on peut évaluer le module d'Young E du matériau [3], donné par :

$$E = k \frac{L}{A}$$

La valeur numérique de E est : 0.00044 GPa . Cette valeur est compatible avec les données de la littérature [3] pour des matériaux tels que les PVC ou les polymères.

4. CONCLUSION

Cette expérience de mécanique, très simple à réaliser, permet de mettre en évidence la notion d'oscillateur amorti. Il est possible d'approfondir cette expérience avec une étude de l'énergie totale de l'oscillateur, dont la dissipation dans le temps suit la loi simple à établir en utilisant les équations (3) et (5) :

$$\frac{dE}{dt} = -c \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

Enfin, on peut aussi imaginer une expérience d'oscillation forcée avec une mise en évidence du phénomène de résonance.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. PÉREZ : «*Mécanique : points matériels, solides, fluides*», Masson (1992).
- [2] M. del PEDRO et P. PAHUD : «*Mécanique Vibratoire*», Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (1992).
- [3] M.-F. ASHBY and D. R. H. JONES : «*Matériaux - Tome 1 : Propriétés et Applications*», Dunod (1992).