

Réponse d'un système linéaire d'ordre 2

Stabilité et représentation dans l'espace des phases

Oscillateur harmonique

par Claude RABALLAND*
Lycée M. Montaigne - 33000 Bordeaux

Selon les nouveaux programmes de physique des lycées et des classes préparatoires, les professeurs doivent présenter quelques notions à leurs élèves sur le comportement d'un système linéaire d'ordre 2 (oscillateur harmonique) en étudiant notamment les réponses temporelles et fréquentielles.

Sont abordées également des notions simples concernant la stabilité et la représentation dans l'espace des phases.

Nous proposons, ci-dessous, quelques exemples permettant de visualiser ce comportement.

L'ensemble des schémas de montages, courbes théoriques, solutions d'équations différentielles, mesures et traitement des données ainsi que les sorties imprimante et traceur qui figurent dans cet article ont été réalisées à l'aide du logiciel **MODÈLES EXPÉRIMENTAUX** agréé par le ministère de l'éducation nationale (références en annexe).

1. ÉTUDE THÉORIQUE : NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

1.1. Équation différentielle entrée/sortie d'un système linéaire d'ordre 2

De façon générale, un système linéaire d'ordre 2 peut être représenté par une «boîte noire» recevant un signal d'entrée dépendant du temps : $e(t)$ et délivrant un signal de sortie $s(t)$.

* N.D.L.R. : Pour des raisons techniques de mise en page, les figures couleur sont regroupées pages 881 à 886.

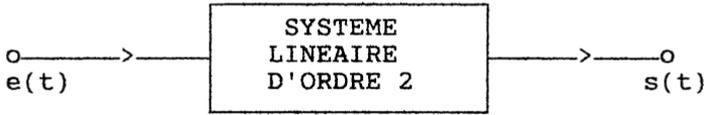


Figure 1

Le système est dit linéaire d'ordre 2 si l'équation liant la sortie $s(t)$ à l'entrée $e(t)$ est une équation différentielle à coefficients constants de la forme :

$$a_2 \cdot d^2s/dt^2 + a_1 \cdot ds/dt + a_0 \cdot s = b_2 \cdot d^2e/dt^2 + b_1 \cdot de/dt + b_0 \cdot e \quad (1)$$

(Les coefficients a_i et b_i seront pris réels).

Le signal d'entrée $e(t)$ est en général quelconque. Cependant, dans la pratique, on trouvera les exemples suivants :

- signal constant : $e(t) = E \forall t$,
- échelon : $e(t) = E$ si $t > 0$, $e(t) = 0$ si $t < 0$,
- créneau : $e(t) = E$ pour $0 < t < t_0$, $e(t) = 0$ à l'extérieur,
- impulsion : créneau pour lequel $t_0 \rightarrow 0$,
- signal sinusoïdal : $e(t) = E \cdot \cos(\omega t)$.

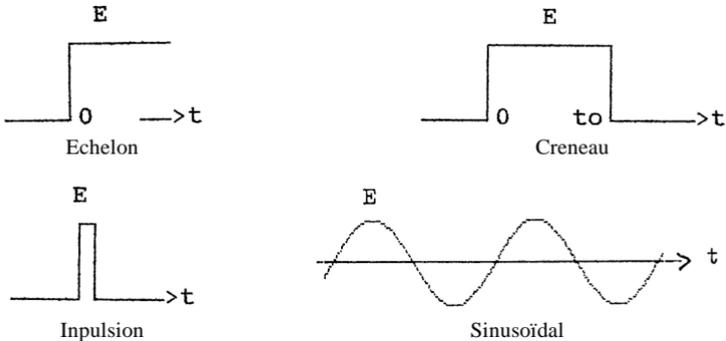


Figure 2

Le régime dit « libre » correspond au cas $e(t) = 0 \forall t$. Dans ce cas, on obtient l'équation différentielle :

$$a_2 \cdot d^2s/dt^2 + a_1 \cdot ds/dt + a_0 \cdot s = 0 \quad (2)$$

appelée équation différentielle « homogène ».

On en déduit que le comportement du système lorsque le signal d'entrée est nul (on dit aussi «éteint»), est décrit par la solution de cette équation.

Un oscillateur harmonique est un système physique décrit par l'équation (1).

Il est généralement de nature électrique (circuit oscillant) ou mécanique (masse + ressort), mais on peut trouver des exemples dans d'autres domaines : chimie (réactions oscillantes), optique (cavités oscillantes), etc.

Si $e(t) = 0$, on dit que l'on étudie l'oscillateur en régime libre.

Si $e(t) = E \cdot \cos(\omega t)$ et que l'on cherche la solution particulière $s(t) = S \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, on dit que l'on étudie le **régime forcé** de pulsation ω .

1.2. Stabilité d'un système linéaire d'ordre 2

Un système est dit stable si la sortie $s(t)$ reste bornée $\forall t$.

On remarquera que le fait que le système soit stable ou instable ne dépend pas du signal extérieur appliqué : **c'est une propriété intrinsèque du système.**

On en conclut que l'étude de la stabilité du système peut se faire en choisissant le régime libre : $e(t) = 0$.

Dans ce cas, le comportement est décrit par l'équation différentielle (2) :

$$a_2 \cdot d^2s/dt^2 + a_1 \cdot ds/dt + a_0 \cdot s = 0$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$d^2s(t)/dt^2 + 2 \lambda \cdot ds(t)/dt + \omega_0^2 \cdot s(t) = 0 \quad (3)$$

en posant :

$$2 \lambda = a_1/a_2$$

$$\omega_0^2 = a_0/a_2$$

Le système sera stable si $\lambda \geq 0$.

Le cas particulier $\lambda = 0$ correspond à un **oscillateur sinusoïdal non amorti** (c'est la condition d'oscillation...).

Le système sera instable si $\lambda < 0$: la solution $s(t)$ de l'équation ci-dessus tend vers $\pm \infty$ pour $t \rightarrow \infty$.

1.3. Réponse fréquentielle et réponse temporelle

Dans le cas où le signal d'entrée $e(t)$ est sinusoïdal : $(t) = E \cdot \cos(\omega t)$, on peut rechercher la solution particulière de l'équation différentielle (1) :

$$a_2 \cdot d^2s/dt^2 + a_1 \cdot ds/dt + a_0 \cdot s = b_2 \cdot d^2e/dt^2 + b_1 \cdot de/dt + b_0 \cdot e$$

sous la forme : $s(t) = S \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

En utilisant la notation complexe, on a :

$$\underline{e} = E \cdot \exp(i\omega t)$$

et $\underline{s} = \underline{S} \cdot \exp(i\omega t)$

avec $\underline{S} = S \cdot \exp(i\varphi)$

amplitude complexe.

On obtient alors la fonction de transfert complexe du système :

$$\underline{H}(i\omega) = \underline{S}/\underline{E} = \frac{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0} \quad \text{avec } p = i\omega \quad (4)$$

a - Réponse fréquentielle

Le comportement fréquentiel du système : passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc. dépend essentiellement des coefficients b_2 , b_1 , et b_0 .

Un des cas les plus connus est le **système passe-bas** pour lequel on a : $b_2 = 0$ et $b_1 = 0$:

$$\underline{H}(i\omega) = \underline{S}/\underline{E} = b_0 / (a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0) \quad (5)$$

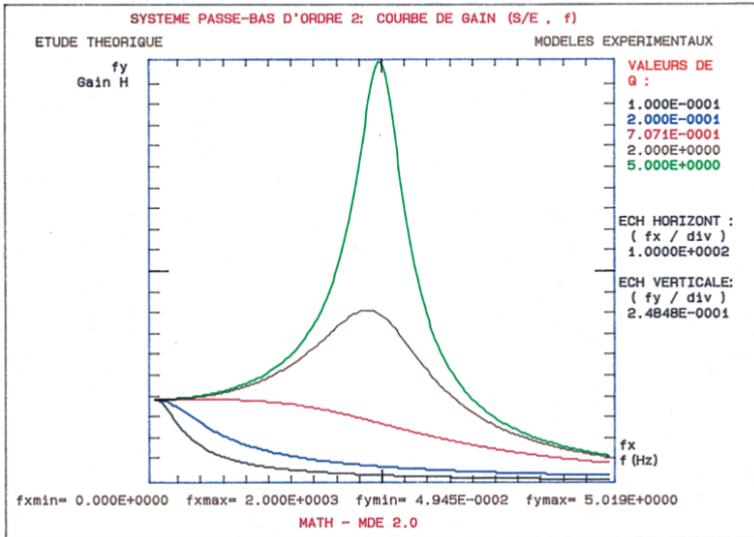


Figure 3 : Gain $|H(i\omega)|$.

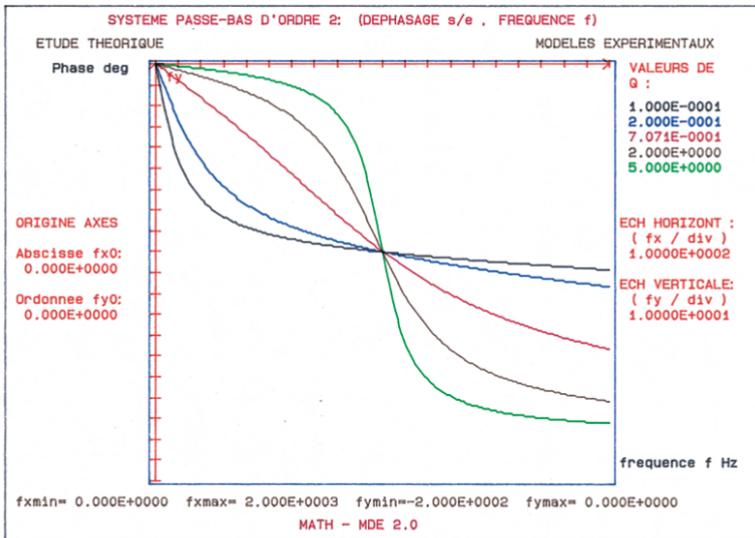


Figure 4 : Phase $\text{Arg}(H(i\omega))$.

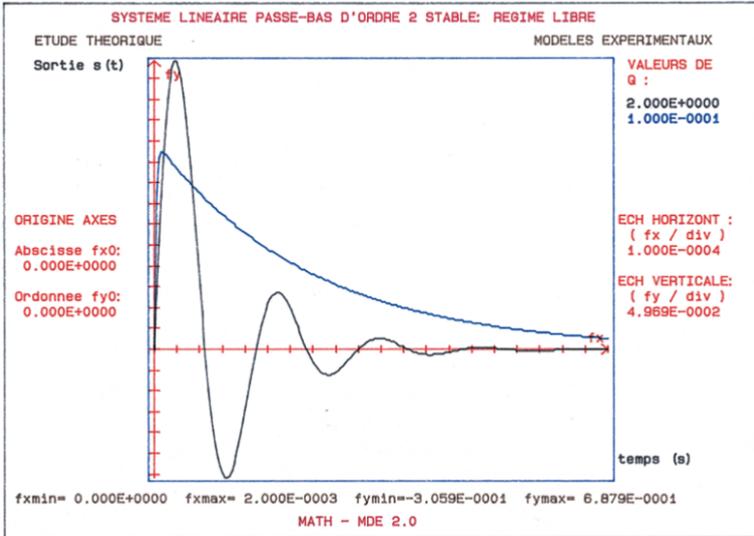


Figure 5 : Système stable, $Q > 0$, régimes pseudo-périodique et aperiodique.

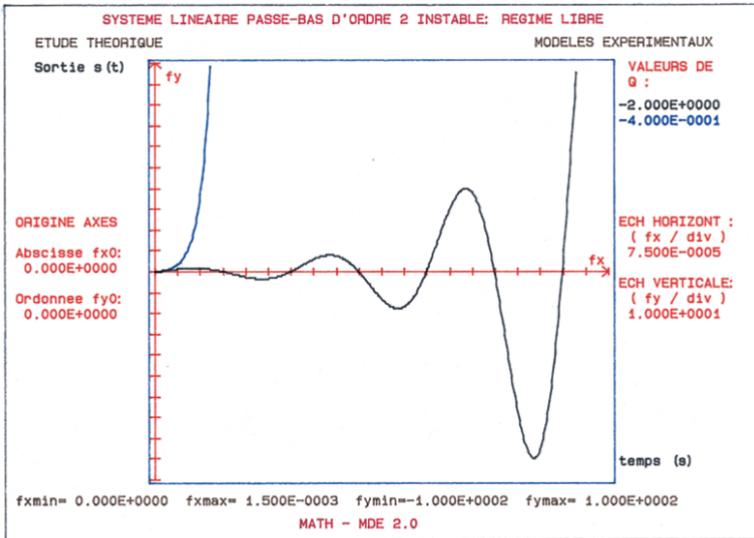


Figure 6 : Système instable, $Q < 0$, régimes pseudo-périodique et aperiodique.

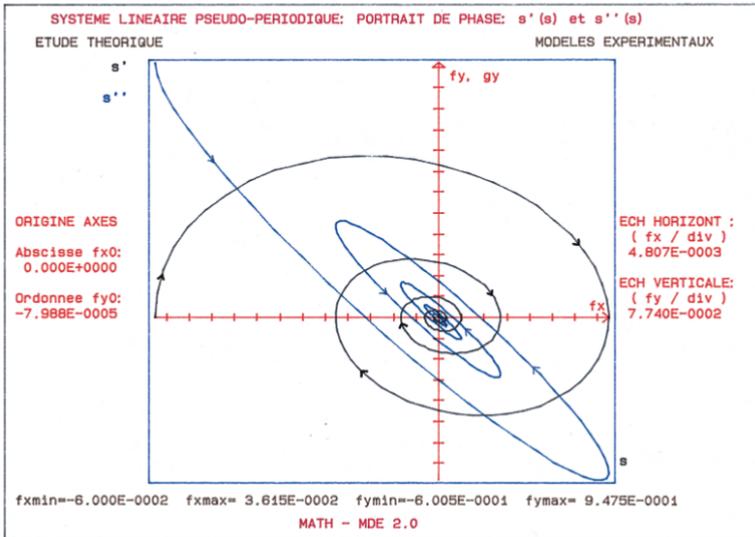


Figure 9 : $s'(s)$ et $s''(s)$ pour le régime pseudo-périodique stable.

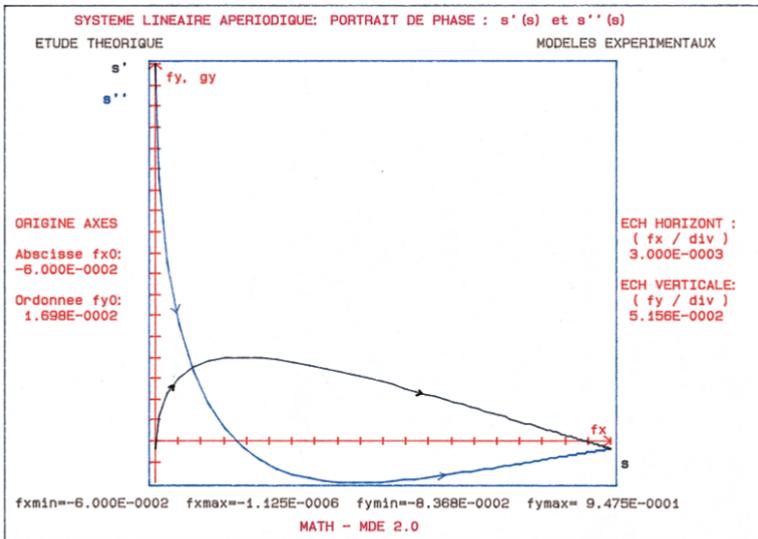


Figure 10 : $s'(s)$ et $s''(s)$ pour le régime aperiodique stable.

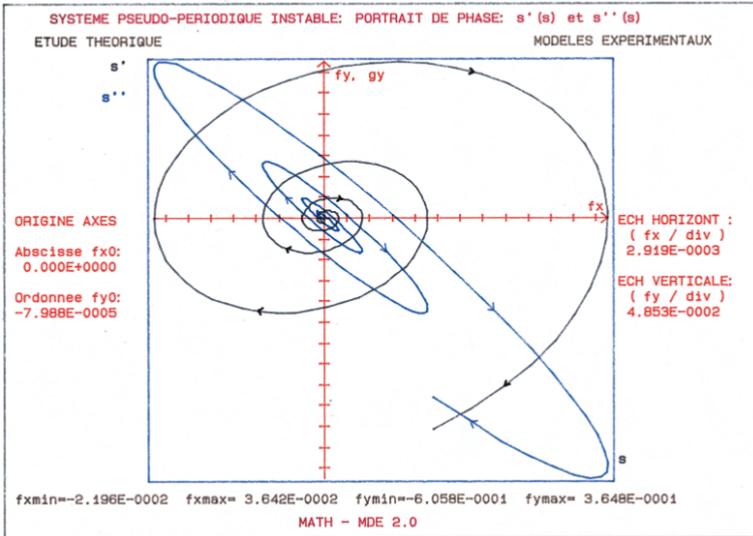


Figure 11 : $s'(s)$ et $s''(s)$ pour le régime pseudo-périodique instable.

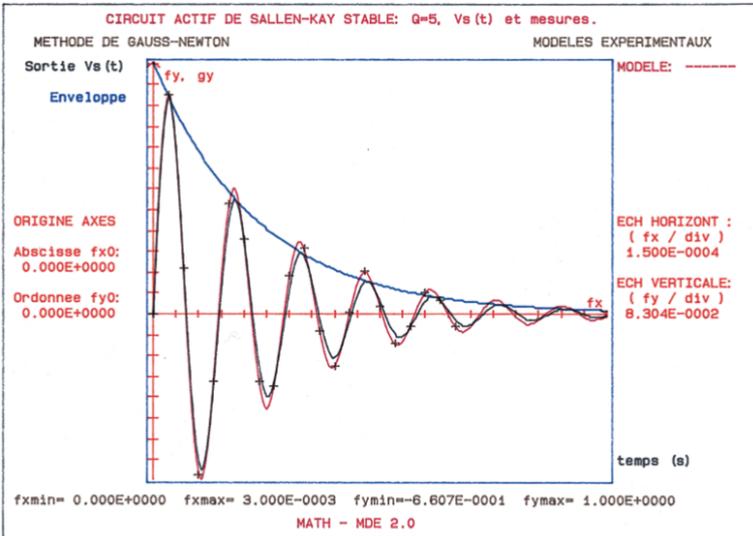


Figure 13 : $Q = + 5$, système stable.

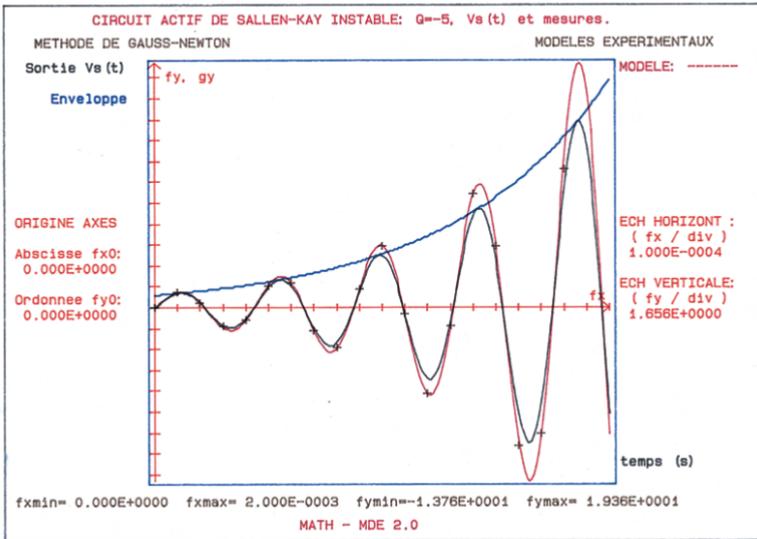


Figure 14 : $Q = -5$, système instable.

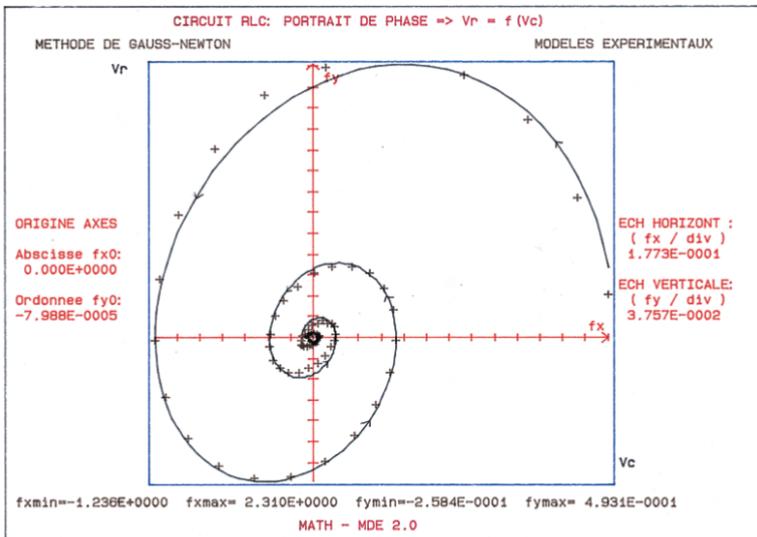


Figure 16 : Portrait de phase $V_r = f(V_c)$ du circuit RLC.

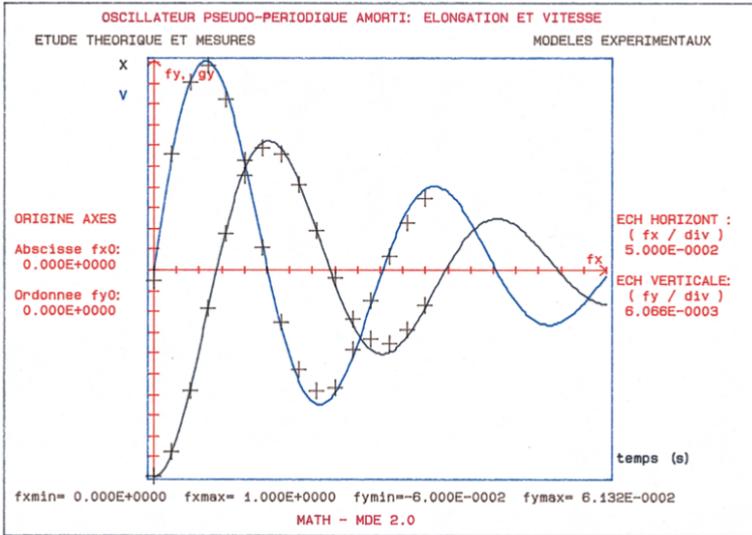


Figure 18 : Élongation et vitesse : identification du coefficient d'amortissement.

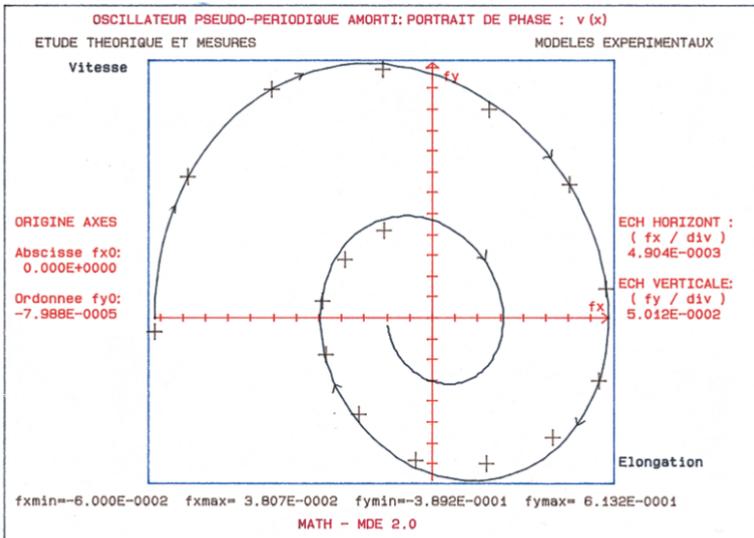


Figure 19 : Représentation dans l'espace des phases V(x).

En posant : $H_0 = b_0/a_0$, $x = \omega/\omega_0$, $Q = \omega_0/2\lambda$, on obtient la fonction de transfert du système dit «réduit» :

$$\underline{H} = H_0/(1 - x^2 + ix/Q) \quad (6)$$

H_0 est le gain à fréquence nulle, x la pulsation réduite et Q est le coefficient de qualité.

La courbe de réponse fréquentielle dépend du facteur de qualité Q : (pour $Q \geq 0$ si l'on veut un système stable) :

- si $Q > 1/\sqrt{2}$, il y a résonance pour la pulsation $\omega_r = \sqrt{(\omega_0^2 - 2 \cdot \lambda^2)}$,
- si $Q \leq 1/\sqrt{2}$, il n'y a pas de résonance.

On obtient le réseau classique de courbes ci-dessous : (Figure 3 et 4)

b - Réponse temporelle

L'équation différentielle associée est :

$$d^2s(t)/dt^2 + 2\lambda \cdot ds(t)/dt + \omega_0^2 \cdot s(t) = H_0 \cdot \omega_0^2 \cdot e(t) \quad (7)$$

Comme on a vu que le système est stable si $\lambda \geq 0$, on en déduit que la condition de stabilité est aussi décrite par $Q \geq 0$.

La condition d'oscillation est alors donnée par $Q \rightarrow \infty$.

On peut visualiser le comportement stable ou non du système sur le réseau de courbes ci-dessous, en faisant varier le coefficient de qualité Q .

Les solutions de l'équation (3) sont :

- si $|Q| < 0.5$ (ou $|\lambda| > \omega_0$) : $s(t) = \exp(-\lambda t) \cdot (A \cdot \text{ch}(\Omega t) + B \cdot \text{sh}(\Omega t))$
avec $\Omega = \sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2)}$: régime «apériodique»,
- si $|Q| > 0.5$ (ou $|\lambda| < \omega_0$) : $s(t) = \exp(-\lambda t) \cdot (A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t))$
avec $\Omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)}$: régime «pseudo-périodique»,

– si $|Q| = 0.5$ (ou $|\lambda| = \omega_0$) : $s(t) = \exp(-\lambda t) \cdot (A \cdot t + B)$: régime «critique».

Les constantes A et B sont fixées par les conditions initiales : $s(t=0)$ et $ds/dt(t=0)$.

On constatera que si $Q > 0$ devient très grand, le système se rapproche de l'oscillateur parfait non amorti. Il suffit alors d'une très petite variation d'un paramètre du système (action sur λ par exemple) pour qu'il devienne instable : $Q < 0$. (Figures 5 et 6).

1.4. Utilisation des transformées de Laplace

Pour un système linéaire, le calcul opérationnel permet de trouver très facilement les réponses $s(t)$ connaissant la fonction de transfert du système. Nous en donnons ici seulement quelques notions élémentaires (niveau : classes préparatoires).

a - Transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction telle que $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

La transformée de Laplace de $f(t)$ est définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-p \cdot t) \cdot f(t) \cdot dt$$

$f(t)$ est l'original, $F(p)$ est l'image.

On donne le tableau des transformées ci-dessous :

Original $f(t)$	Image $F(p)$
A	A/p
$\exp(-at)$	$1/(p+a)$
$t \cdot \exp(-at)$	$1/(p+a)^2$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
$\text{sh}(\omega t)$	$\omega/(p^2 - \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$p/(p^2 + \omega^2)$
$\text{ch}(\omega t)$	$p/(p^2 - \omega^2)$
$\exp(-at) \cdot \sin(\omega t)$	$\omega/((p+a)^2 + \omega^2)$
$\exp(-at) \cdot \text{sh}(\omega t)$	$\omega/((p+a)^2 - \omega^2)$
$\exp(-at) \cdot \cos(\omega t)$	$(p+a)/((p+a)^2 + \omega^2)$
$\exp(-at) \cdot \text{ch}(\omega t)$	$(p+a)/((p+a)^2 - \omega^2)$

Figure 7

***b - Utilisation de la transformée de Laplace :
exemple de la réponse $s(t)$ du circuit RC***

Soit le circuit RC ci-dessous :

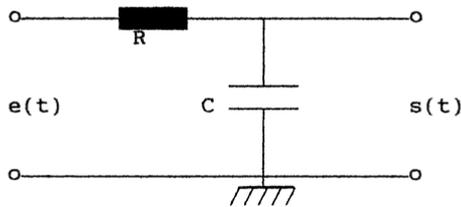


Figure 8

Si $e(t)$ est sinusoïdal, on peut écrire $H(i\omega) = 1/(1 + iRC\omega)$.

Si on pose $p = i\omega$, on a : $H(p) = 1/(1 + RCp)$.

Le zéro du dénominateur est appelé pôle de la fonction $H(p)$.

On a évidemment : $p_1 = -RC$ (pôle réel ici) et on peut écrire :

$$H = H_0/(p - p_1) \quad \text{avec} \quad H_0 = 1/RC$$

Examinons la réponse à un échelon d'entrée de hauteur E : $e(t) = E$ pour $t > 0$.

Comme $H(p) = s(p)/e(p)$, on a : $s(p) = H(p) \cdot e(p)$ pour les images.

En consultant le tableau de la figure 7, on constate que l'image de l'échelon E est E/p .

L'image $s(p)$ est donc :

$$s(p) = H(p) \cdot E/p$$

soit :
$$s(p) = H_0 \cdot E / \left(p \cdot (p - p_1) \right)$$

que l'on peut écrire (décomposition en éléments simples) :

$$s(p) = A/p + B/(p - p_1) \quad \text{avec} \quad A = -B = -H_0 \cdot E/p_1$$

Finalement : $s(p) = H_0 \cdot E/p_1 \cdot \left[1/(p - p_1) - 1/p \right]$, soit en revenant à l'original :

$$s(t) = H_0 \cdot E/p_1 \cdot \left[\exp(p_1 t) - 1 \right]$$

ou encore :
$$s(t) = E \cdot \left[1 - \exp(-t/RC) \right]$$

résultat que l'on peut obtenir évidemment plus simplement en résolvant l'équation différentielle entrée/sortie pour ce circuit élémentaire...

Nous constatons sur cet exemple que l'on peut travailler dans l'espace image, connaissant les pôles de la fonction de transfert $H(p)$, puis revenir ensuite à la représentation temporelle sans avoir à rechercher les constantes d'intégration de la réponse $s(t)$.

1.5. Représentation dans l'espace des phases

Cette représentation consiste à tracer le graphe de $ds(t)/dt$ ou $d^2s(t)/dt^2$ en fonction de $s(t)$ par élimination du temps.

On obtient alors une figure de «Lissajous».

Voyons quelques exemples sur les figures ci-dessous à propos du système passe-bas en régime libre décrit par l'équation (3). (Figures 9, 10 et 11).

2. EXEMPLES DE RÉALISATIONS PRATIQUES

2.1. Étude de la stabilité : circuit actif de SALLEN-KAY d'ordre 2

On réalisera le circuit de la figure 12 ci-dessous.

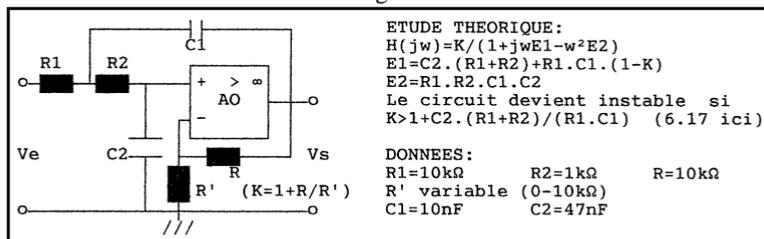


Figure 12 : Circuit passe-bas de SALLEN-KAY.

Ce circuit satisfait à l'équation (7) :

$$d^2s(t)/dt^2 + 2\lambda \cdot ds(t)/dt + \omega_0^2 \cdot s(t) = H_0 \cdot \omega_0^2 \cdot e(t)$$

avec : $H_0 = 1 + R/R'$: gain à fréquence nulle,

$\omega_0^2 = 1/(R1 \cdot R2 \cdot C1 \cdot C2)$: ω_0 est la pulsation propre (oscillateur non amorti), $Q = \omega_0/2\lambda = 1/\omega_0 / (C2 \cdot (R1 + R2) - R1 \cdot C1 \cdot R/R')$: facteur de qualité.

En faisant varier R' , on change Q : si $Q > 0$, le système est stable, si $Q < 0$, le système est instable.

A la limite, Q devient ∞ pour $R' \approx 1935 \Omega$: le système est stable si $R' > 1935 \Omega$.

Pour étudier la stabilité, on utilisera un GBF en impulsions de faible fréquence (≈ 10 Hz). Pour l'enregistrement des oscillations on utilisera, par exemple, un oscilloscope numérique (**HAMEG**) ou une interface d'acquisition de données couplée à un ordinateur.

Les figures 13 et 14 ci-dessous donnent des enregistrements pour $Q = +5$ ou $Q = -5$ correspondant aux cas stable puis instable.

Ces deux enregistrements ont été obtenus en T.P. par des élèves de classes préparatoires sur oscilloscope numérique **HAMEG**.

Pour identifier le facteur de qualité réel Q , quelques points suffisent (vingt points environ) : la précision des relevés en utilisant le pointeur mobile de l'oscilloscope est convenable et les mesures suffisamment rapides et simples pour pouvoir être réalisées dans le cadre du programme et du temps imparti (2 h 30).

L'identification du paramètre Q est réalisée par le logiciel «**MODÈLES EXPÉRIMENTAUX**» : on constatera que les deux courbes obtenues (estimée au départ par $Q = \pm 5$ et modélisée ensuite) sont très proches.

2.2. Représentation dans l'espace des phases : circuit RLC

On réalisera le circuit classique **R-L-C** de la figure 15 ci-dessous.

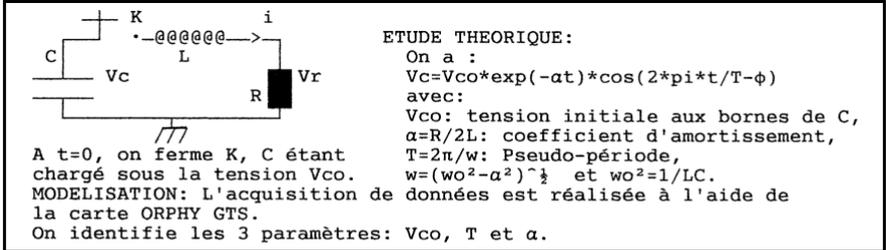


Figure 15 : Oscillations amorties du circuit RLC.

On prendra : $R = 30 \Omega$, $C = 30 \mu\text{F}$, $L = 0.3 \text{ H}$.

L'enregistrement des oscillations peut se faire :

- en utilisant un oscilloscope numérique, le circuit étant attaqué en entrée par un GBF en impulsions comme au § 2.1.),
- en utilisant une interface d'acquisition : on ferme le circuit après avoir chargé le condensateur au départ.

Nous avons utilisé l'interface **ORPHY** et stocké les données à l'aide du logiciel **RÉGRESSI**. Les représentations graphiques et traitements de données sont réalisés par le logiciel **MODÈLES EXPÉRIMENTAUX** après avoir importé le fichier régressi **.RRR** correspondant (ces opérations sont très rapides à réaliser : quelques secondes...).

Les grandeurs enregistrées sont V_c (tension aux bornes de C) et V_r (tension aux bornes de R).

On a $V_r = Ri = -R.C.d(V_c)/dt$: V_r représente la dérivée de V_c .

On obtient l'enregistrement de la figure 16.

On cherche à identifier le coefficient d'amortissement $\lambda = R/2L$ du circuit. La valeur théorique de départ est $\lambda = 50$.

Après modélisation, on trouve $\lambda = 62$, ce qui donne la courbe de la figure 16.

Les élèves peuvent examiner tous les autres cas possibles en agissant sur le coefficient λ , en simulation d'abord, puis en effectuant les mesures correspondantes ensuite (il suffit de faire varier R...).

2.3. Oscillateur mécanique amorti

On considère le montage de la figure 17.

	<p>ETUDE THEORIQUE: On a:</p> <p>* $x = \exp(-at) \cdot [A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)]$</p> <p>* Vitesse: $v = dx/dt$</p>
<p>table</p> <p>Données:</p> <p>M=0.62 kg k=50 N/m</p>	<p>avec:</p> <p>Xo: élongation initiale,</p> <p>Vo: vitesse initiale,</p> <p>ω_0: pulsation propre ($\omega_0 = \sqrt{2k/M}$)</p> <p>w: pseudo-pulsation $= \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$</p> <p>a: coefficient d'amortissement =></p> <p> a < ω_0: régime pseudo-périodique</p> <p>a < 0: système instable</p> <p>Conditions initiales (Xo,Vo) => A=Xo, B=(Vo+a.Xo)/w</p>
<p>Tracés:</p> <p>fy: x(t)</p> <p>gy: v(t)</p> <p>menu RESEAU: x(t) pour</p> <p>$\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1 \text{ s}^{-1}$</p> <p>=> influence des frottements.</p>	

Figure 17 : Oscillateur mécanique sur table à coussin d'air.

On peut également utiliser un oscillateur vertical (masse + ressort) et faire l'enregistrement à l'aide d'une cuve rhéographique.

La prise de données (temps, élongation) pourra se faire :

- par étincelage avec mobiles autoporteurs sur table horizontale,
- à l'aide d'une table à digitaliser,
- à l'aide d'un enregistreur X(t) ou d'une carte d'acquisition couplés à la cuve rhéographique.

Nous avons stocké les données acquises à l'aide du tableau de **RÉGRESSI**. Les résultats sont importés dans le logiciel «**MODÈLES EXPÉRIMENTAUX**» pour traitement et modélisation ainsi que pour la comparaison avec les courbes théoriques.

On obtient les courbes des figures 18 et 19.

CONCLUSION

Nous pensons avoir apporté, dans cet article, quelques compléments et précisions sur le comportement des systèmes linéaires du 2^e ordre. Ceux-ci ont une importance fondamentale en physique puisqu'ils sont à la base du fonctionnement de nombreux systèmes plus complexes.

Nous n'avons pas abordé le problème du couplage entre oscillateurs, ni celui de la synthèse ou décomposition harmonique de systèmes non linéaires (analyse et synthèse de Fourier).

On pourra, bien-entendu, trouver les compléments indispensables dans la littérature spécialisée.

ANNEXE

Les études théoriques, les relevés de mesures, la modélisation par identification paramétrique non linéaire, les schémas de montage, les sorties traceur **HP GL** et imprimantes, les captures de fichiers de données **ASCII** ont été réalisées à l'aide du logiciel «**MODÈLES EXPÉRIMENTAUX**», reconnu d'intérêt pédagogique en 1994 par le ministère de l'éducation nationale (950 F. TTC, en version monoposte).

Les fichiers d'application relatifs aux expériences présentées dans cet article sont disponibles gratuitement sur disquette 3 pouces 1/2 par simple demande à **MICROLAMBDA**.

Attention : ils nécessitent l'utilisation du logiciel «**MODÈLES EXPÉRIMENTAUX**» version 2.0, non fourni sur la disquette.

DIFFUSION ET RENSEIGNEMENTS

MICROLAMBDA - Z.I. Auguste - 33610 CESTAS -
Tél. : 56.36.22.14 - Fax : 56.36.22.17.