

Transmissions numériques

par Jacques ESQUIEU
Lycée Cabanis - 19100 Brive

1. PRINCIPE

Dans ce type de liaison, l'information est transmise à l'aide d'une suite d'éléments binaires susceptibles de présenter deux états notés «0» et «1». L'idée n'est pas nouvelle si l'on considère que les premières transmissions électriques ont été faites en MORSE en codant le signal par un élément binaire pouvant prendre deux états : le point et le trait. La nécessité de l'intervention humaine dans une liaison MORSE limite les performances du système.

La production du signal numérique du signal à transmettre $m(t)$ se décompose en deux opérations :

- codage du signal par un élément binaire,
- représentation de chaque état de l'élément binaire par un signal électrique.

1.1. Codage du signal par un élément binaire

L'opération correspondante est décrite à la figure 1.

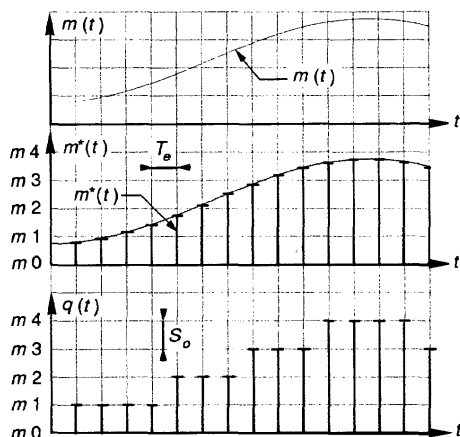


Figure 1

Voir B.U.P. n° 754, Traitement numérique du signal, p. 707.

Le signal $m(t)$ est échantillonné à la fréquence $F_e = 1/T_e$, puis quantifié suivant une suite discrète de niveaux $m_0, m_1, m_2, \dots$

a - Échantillonnage

Sur la figure 1, l'échantillonnage permet de passer du signal $m(t)$ au signal $m^*(t)$.

Le théorème de Shannon impose que la décomposition spectrale du signal $m(t)$ ne contienne pas de composante fréquentielle dont la fréquence f_M serait supérieure à $F_e/2$.

L'échantillonnage limite donc la fréquence du signal à transmettre.

b - Quantification

La plage de variations du signal $m(t)$ est découpée en M niveaux. Le nombre M est une puissance de 2 et peut être écrit $M = 2^N$. Chaque valeur d'échantillon est approximée par le niveau dont elle est le plus proche. Sur la figure 1, on passe ainsi du signal $m^*(t)$ au signal $q(t)$. Chacun des $M = 2^N$ niveaux de quantification peut être écrit sous la forme $m_n = S_0 \left[\varepsilon_0 2^0 + \dots + \varepsilon_{N-1} 2^{N-1} \right]$, où $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}$ sont N éléments binaires (bits) qui ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La transmission de l'échantillon m_n est donc réalisée en transmettant la séquence binaire $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}$.

La plage de variations du signal $m(t)$ étant fixée, le pas de quantification S_0 est d'autant plus faible que le nombre N de bits utilisés pour coder la valeur d'un échantillon est plus élevé. Le passage du signal échantillonné $m^*(t)$ au signal quantifié $q(t)$ constitue une dégradation du signal analogue à celle que produirait un bruit superposé au signal $m^*(t)$. On l'appelle bruit de quantification et on montre que, dans le cas où les niveaux sont répartis de manière uniforme, sa valeur quadratique moyenne est $S_0^2/12$.

La quantification est à l'origine d'un bruit.

Remarque : La valeur quadratique moyenne du bruit de quantification étant indépendante de l'amplitude du signal, le rapport signal sur bruit devient trop petit pour les faibles signaux. On favorise les petits signaux en utilisant un codeur non linéaire. En téléphonie, on utilise la loi A normalisée par le CCITT (figure 2).

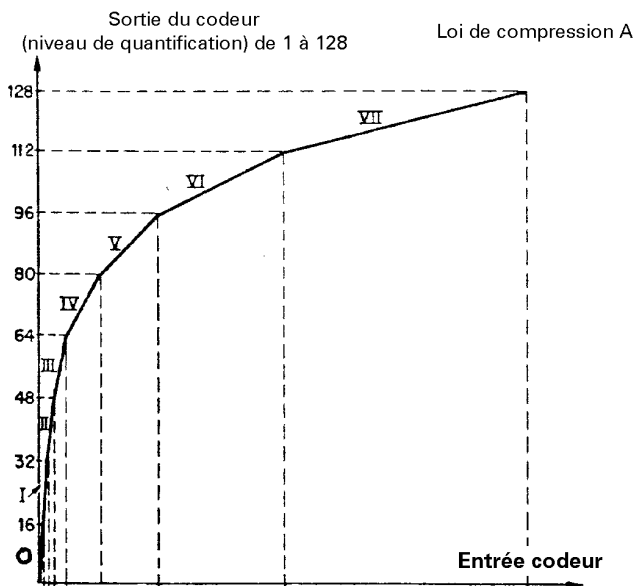


Figure 2

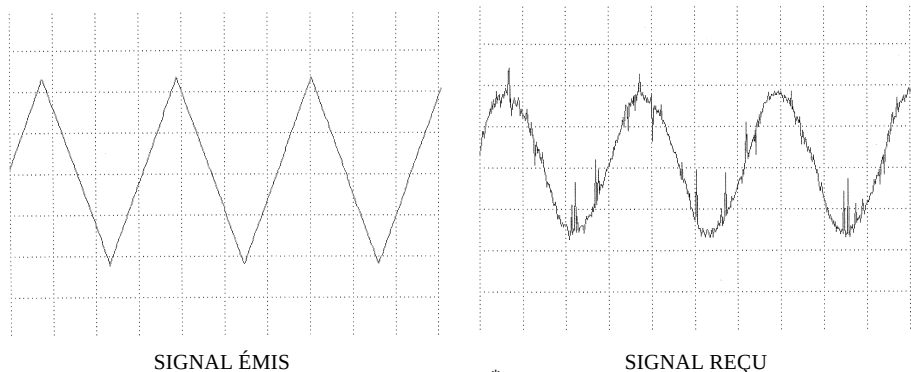
La relation entre l'entrée et la sortie du codeur est décrite par huit segments. Chaque segment est partagé en seize niveaux égaux (ce qui nécessite 4 bits de codage par segment). Les deux premiers segments (0 et I) ont même pente et sont égaux. Ensuite, à chaque changement de segment, la pente est divisée par deux. La transmission d'un échantillon nécessite 8 bits : 1 bit de signe, 3 bits pour déterminer le segment (1 parmi 8), 4 bits pour définir le niveau sur le segment (1 parmi 16).

c - Comparaison entre transmission analogique et transmission numérique

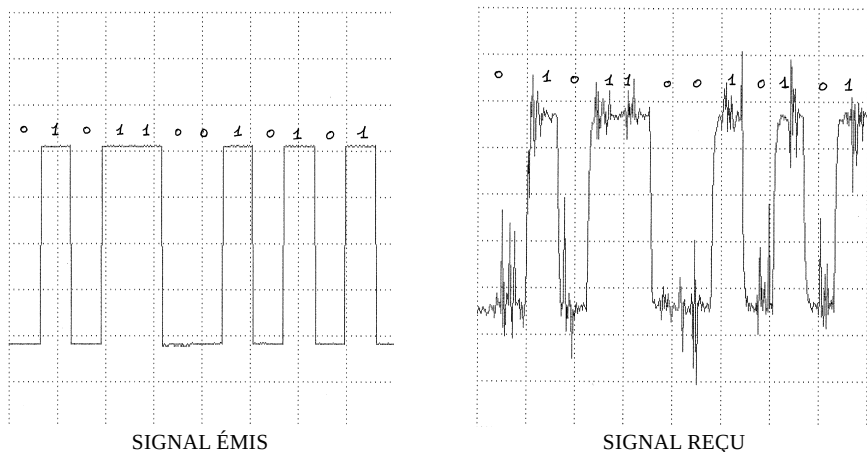
Un canal de transmission fait apparaître deux sortes de perturbations :

- la bande passante du canal limite la fréquence du signal à transmettre ce qui provoque une déformation de ce signal,
- un signal de bruit est ajouté au signal utile.

Pour une transmission analogique, ces deux perturbations se traduisent par une dégradation du signal décrite par la figure 3.

**Figure 3***

Pour une transmission numérique, la même dégradation affecte les motifs attribués aux deux états «0» et «1» (figure 4).

**Figure 4***

Cependant, si la perturbation n'est pas trop importante, le récepteur est en mesure de reconstituer la séquence de «0» et de «1» du signal émis. Dans ce cas la totalité de l'information émise est présente à la réception. Les imperfections du canal n'ont alors aucun effet sur la qualité de la transmission.

* Voir B.U.P. n° 754, Traitement numérique du signal, p. 707.

Cela ne signifie pas que la transmission numérique ne dégrade pas le signal. Nous avons vu en effet que :

- l'échantillonnage limite la fréquence du signal à transmettre,
- la quantification est à l'origine d'un bruit.

Ainsi, les deux perturbations (limitation de la bande passante, addition de bruit) apparaissent aussi dans une transmission numérique. On peut cependant distinguer une différence fondamentale :

- pour une transmission analogique, la dégradation est le fait du canal de transmission et présente ainsi un caractère aléatoire (environnement industriel, conditions météorologiques...),
- pour une transmission numérique, la dégradation est définie une fois pour toutes à la conception et peut ainsi être maintenue dans des conditions acceptables quelque soit l'état du canal de transmission :
 - la fréquence d'échantillonnage F_e fixe la bande de fréquence transmise,
 - le pas de quantification S_0 fixe le bruit.

Remarquons toutefois que les considérations précédentes ne sont valables que tant que les perturbations du canal restent suffisamment faibles pour ne pas provoquer d'erreur de décision à la réception. Les transmissions numériques incluent généralement des procédures de détection d'erreur qui interrompent la transmission lorsque la qualité devient insuffisante.

1.2. Représentation d'un élément binaire par un signal électrique

Chaque état «0» et «1» de l'élément binaire est représenté dans le temps par un motif : $s_0(t)$ pour «0», $s_1(t)$ pour «1». A la figure 5 sont représentés les motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$ correspondant au codage N.R.Z. (non retour à zéro).

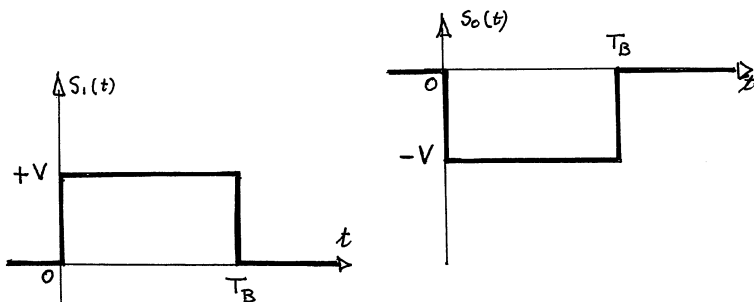


Figure 5

1.3. Encombrement fréquentiel du signal numérique

a - Signal périodique

Un signal périodique, de période T , peut être décomposé en série de Fourier et ainsi être écrit sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales dont les fréquences, distantes de $1/T$, dépendent de la période du signal. Il est donc possible de définir l'encombrement fréquentiel du signal périodique.

b - Signal d'énergie finie

Considérons un signal $s(t)$ limité dans le temps (figure 6) que l'on appelle aussi signal d'énergie finie.

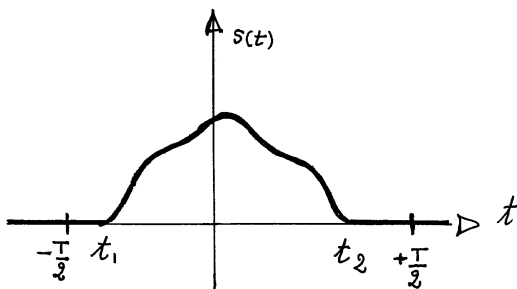


Figure 6

Ce signal, nul en dehors de l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, peut être considéré comme un signal périodique dont la période T tendrait vers l'infini. Dans ce passage à la limite, la distance entre deux composantes spectrales ($1/T$) tend vers 0. Le spectre de raies tend alors vers une fonction continue $\underline{S}(f)$ de la fréquence f . $\underline{S}(f)$ est la **transformée de Fourier** du signal $s(t)$ (On l'appelle aussi densité spectrale d'amplitude). Le passage à la limite conduit à établir entre les fonctions $s(t)$ et $\underline{S}(f)$ les relations :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) e^{2\pi j f t} df \quad \underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

Du point de vue énergétique, la puissance instantanée développée par le signal $s(t)$ est proportionnelle à $s^2(t)$. Par définition, $s^2(t)$ est appelée **puissance normalisée** du signal $s(t)$: C'est la puissance

instantanée que ce signal fait apparaître dans la résistance unité. L'énergie normalisée du signal $s(t)$ peut donc être écrite sous la forme :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) \cdot e^{+2\pi j f t} df \right] \cdot dt$$

où en permutant l'ordre des intégrations :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{2\pi j f t} dt \right] \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) \cdot \underline{S}^*(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{S}(f)|^2 df \end{aligned}$$

$|\underline{S}(f)|^2 \cdot df$ apparaît ainsi comme l'énergie transportée par le signal $s(t)$ dans la bande de fréquence $[f, f + df]$. $|\underline{S}(f)|^2$ est appelée **densité spectrale d'énergie**.

c - Signal numérique

Considérons dès lors, le signal numérique constitué par la succession aléatoire de motifs $s_0(t)$ (correspondant à un «0») et $s_1(t)$ (correspondant à un «1»), de durée T_B et tels que $s_0(t) = -s_1(t)$ (figure 7).

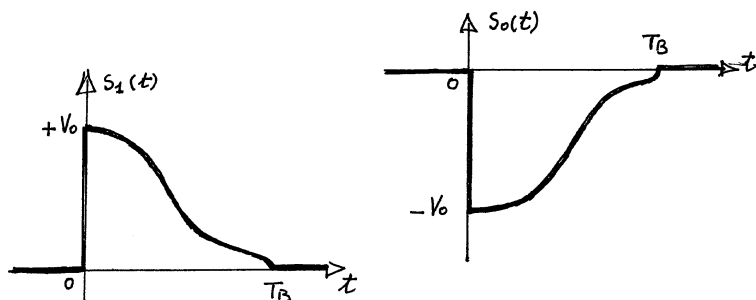


Figure 7

Soient respectivement $\underline{S}_0(f)$ et $\underline{S}_1(f)$ les transformées de Fourier des signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$. Il vient :

$$\underline{S}_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -s_0(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt = -\underline{S}_0(f)$$

Les densités spectrales d'énergie des signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ sont donc égales et chaque motif développe dans la bande fréquentielle $[f, f + df]$

l'énergie $|\underline{S}(f)|^2 \cdot df$ avec $\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt$.

Une tranche temporelle de ce signal, prise entre les instants $-kT_B$ et kT_B (donc de durée $2kT_B$) contient $2k$ motifs et développe dans la bande de fréquence $[f, f + df]$ l'énergie $2 \cdot k \cdot |\underline{S}(f)|^2 \cdot df$. Cette énergie apparaissant pendant le temps $2kT_B$, il lui correspond dans la même bande de fréquence la puissance normalisée :

$$\frac{2k |\underline{S}(f)|^2 df}{2kT_B} = \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B} df$$

$G(f) = |\underline{S}(f)|^2 / T_B$ apparaît ainsi comme la **densité spectrale de puissance** du signal numérique.

Nous retiendrons :

Le signal numérique constitué d'une suite aléatoire de motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$, de durée T_B et tels que $s_0(t) = -s_1(t)$ fait apparaître dans la bande de fréquence $[f, f + df]$ la puissance normalisée :

$$G(f) \cdot df = \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B} df$$

avec :

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt$$

dans la bande de fréquence $[0, f_1]$, il transporte la puissance normalisée :

$$P = \int_{-f_1}^{f_1} G(f) \cdot df = \int_{-f_1}^{f_1} \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B} df$$

d - Cas particulier du signal N.R.Z.

Par application de ce résultat au signal N.R.Z. dont les motifs, représentés à la figure 5, vérifient bien $s_0(t) = -s_1(t)$, il vient :

$$\begin{aligned}\underline{S}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_0^{T_B} V e^{-2\pi j f t} dt \\ &= V \left[\frac{e^{-2\pi j f t}}{-2\pi j f} \right]_0^{T_B} = \frac{V}{2\pi j f} [1 - e^{-2\pi j f T_B}] \\ &= V \frac{e^{-\pi j f T_B}}{\pi f} \frac{e^{\pi j f T_B} - e^{-\pi j f T_B}}{2j} = V T_B e^{-\pi j f T_B} \frac{\sin \pi f T_B}{\pi f T_B}\end{aligned}$$

La densité spectrale de puissance du signal N.R.Z. s'écrit donc :

$$G(f) = \frac{|\underline{S}(f)|^2}{T_B} = V^2 T_B \left(\frac{\sin \pi f T_B}{\pi f T_B} \right)^2$$

Les variations de $G(f)$ sont représentées à la figure 8.

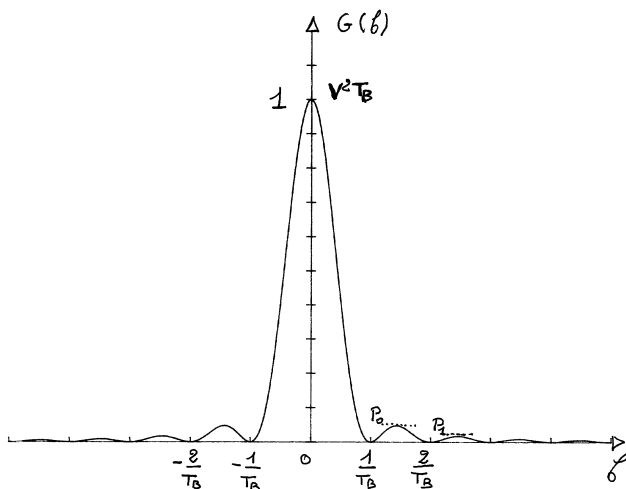


Figure 8

Chaque motif développant l'énergie normalisée $V^2 \cdot T_B$, la puissance normalisée du signal N.R.Z. est donc V^2 .

Sur la courbe de la figure 8, le lobe central, compris entre les fréquences $-1/T_B$ et $1/T_B$ est beaucoup plus important que les lobes latéraux. La puissance transportée dans la bande de fréquence $[0, 1/T_B]$ est donnée par :

$$G_0 = \int_{-\frac{1}{T_B}}^{\frac{1}{T_B}} G(f) df = V^2 T_B \int_{-\frac{1}{T_B}}^{\frac{1}{T_B}} \left(\frac{\sin \pi f T_B}{\pi f T_B} \right)^2 df$$

En posant $x = \pi f T_B$

$$G_0 = \frac{V^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$$

Sachant que $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = 0,91 \pi$ il vient $G = 0,91 \cdot V^2$.

Ainsi, 91 % de la puissance du signal N.R.Z. apparaît dans la bande fréquentielle $[0, 1/T_B]$.

Nous pouvons en conclure que la transmission du signal N.R.Z. nécessite un canal dont la bande passante s'étend de 0 à $1/T_B$.

Vérification expérimentale

Les résultats précédents peuvent être mis en évidence à l'aide du logiciel d'analyse spectrale distribué par le C.R.D.P. de Limoges (Tél. : 55.01.32.50). Ce logiciel donne une représentation spectrale d'amplitude.

L'analyse spectrale d'une tranche de signal N.R.Z. (dont chaque motif a une durée $T_B = 1$ msec.) conduit au spectre de la figure 9.

Cette courbe n'est pas significative car le signal N.R.Z. est aléatoire et l'analyse spectrale est effectuée à partir d'une tranche de ce signal limitée dans le temps.

Par accumulation des mesures correspondant à un grand nombre de tranches du signal N.R.Z. on obtient la courbe de la figure 10.

Les différences observables entre les courbes des figures 8 et 10 (notamment sur l'amplitude des lobes secondaires) s'expliquent par le

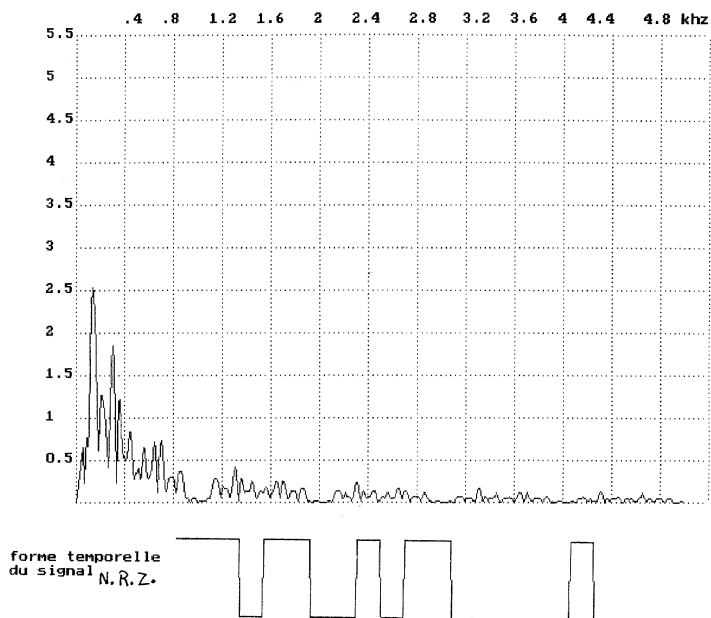


Figure 9

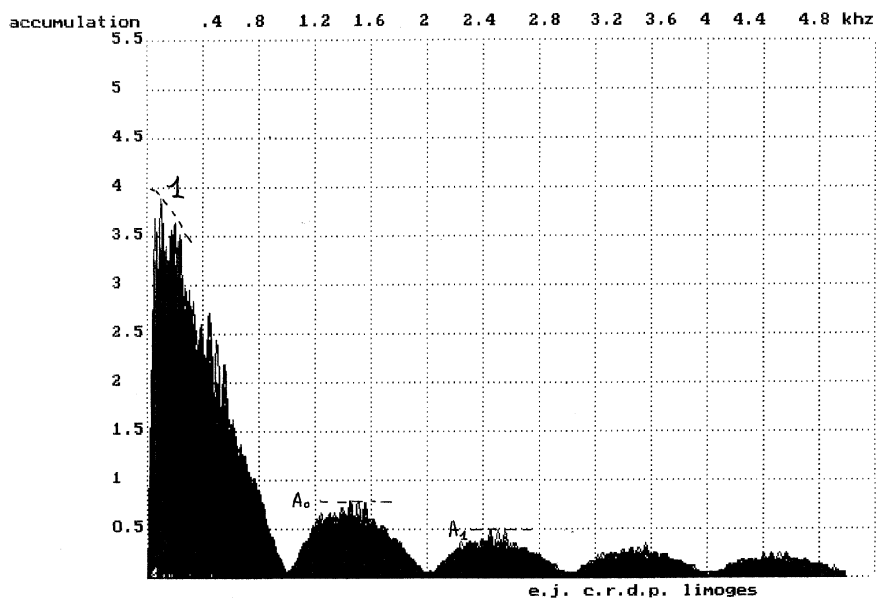


Figure 10

fait que la figure 8 représente une courbe de puissance alors que la figure 10 représente une courbe d'amplitude. En attribuant la valeur 1 à chaque lobe principal il est possible de vérifier entre les amplitudes des lobes secondaires les relations $P_0 = A_0^2$, $P_1 = A_1^2$, ... De plus, au voisinage des fréquences k/T_B , l'allure linéaire de la courbe de la figure 8 se transforme par élévation au carré en allure parabolique sur la figure 10.

1.4. Récapitulation

Nous avons montré que la bande de fréquence nécessaire à la transmission du signal numérique est un multiple de $1/T_B$ (où T_B est la durée d'un motif). Elle augmente donc si T_B diminue.

Dans l'intervalle de temps T_e séparant deux instants d'échantillonnage, N bits correspondant chacun à un motif de durée T_B doivent être transmis, ce qui impose $T_e > NT_B$ c'est-à-dire $1/T_B > NF_e$.

La qualité de la transmission impose une valeur minimale à F_e (limitation de la bande passante) et à N (bruit de quantification). Cette condition impose donc une valeur minimale à $1/T_B$ et fixe pour le canal de transmission une bande de fréquence suffisamment élevée. Nous aboutissons ainsi à la même conclusion que pour une transmission analogique.

2. TRANSMISSION DU SIGNAL NUMÉRIQUE

2.1. Nécessité d'une modulation

Le signal numérique précédent peut être transmis directement ; on parle alors de transmission en bande de base. C'est ce qui est réalisé, par exemple, par la transmission série (RS 232) entre un ordinateur et son environnement.

Pour des liaisons sur de longues distances, l'encombrement spectral (figure 8) montre que le canal de transmission doit être capable de véhiculer le continu. Ce n'est pas le cas de tous les canaux. Le réseau téléphonique, en particulier, ne permet que la transmission de signaux sinusoïdaux dont la fréquence reste comprise entre 300 et 3 400 Hz. Il est donc nécessaire, dès lors, de moduler une sinusoïde porteuse par le signal numérique (l'encombrement spectral du signal résultant ne devant pas sortir de l'intervalle fréquentiel [300 Hz, 3 400 Hz]). Le dispositif ainsi réalisé est appelé MODEM. La sinusoïde porteuse peut être modulée en amplitude, en phase (P.S.K. comme «phase shift

keying») où en fréquence (F.S.K. comme «frequency shift keying»). Nous n'étudierons que la modulation F.S.K. qui est assez répandue dans les transmissions par MODEM.

2.2. Modulation F.S.K.

Le signal N.R.Z. F.S.K. (figure 11) est obtenu en codant un «1» par un signal sinusoïdal de fréquence F_1 et un «0» par un signal sinusoïdal de même amplitude et de fréquence F_0 .

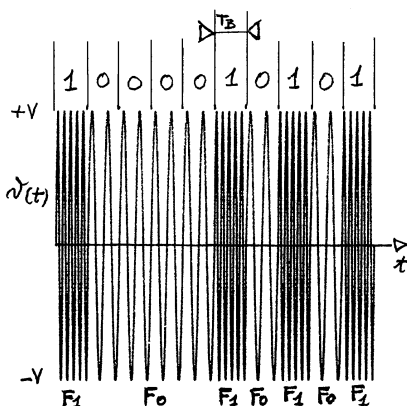


Figure 11

Au laboratoire, le signal N.R.Z. F.S.K. peut être obtenu en appliquant le signal N.R.Z. sur l'entrée de modulation d'un générateur B.F. (si on ne dispose pas de signal N.R.Z. on peut appliquer un signal carré).

La modulation est dite «cohérente» dans le cas où les fréquences F_0 et F_1 sont des multiples entiers du rythme digital $1/T_B$. Elle est dite «incohérente» dans le cas contraire.

Encombrement spectral du signal N.R.Z. F.S.K.

Le signal N.R.Z. F.S.K. est constitué d'une suite aléatoire de motifs $a_0(t) = V \cdot \cos(2\pi F_0 t)$ et $a_1(t) = V \cdot \cos(2\pi F_1 t)$. (En toute rigueur, il faudrait introduire dans chaque cosinus un terme de phase, constant pour une modulation cohérente, et aléatoire pour une modulation incohérente ; ce terme de phase n'altérant pas le résultat final, nous n'en tiendrons pas compte pour ne pas surcharger l'écriture).

En effectuant le changement de variables :

$$F_C = \frac{F_1 + F_0}{2} \quad \text{et} \quad \Delta F = \frac{F_1 - F_0}{2}$$

c'est-à-dire : $F_1 = F_C + \Delta F$ et $F_0 = F_C - \Delta F$

le signal N.R.Z. F.S.K. s'écrit :

$$v(t) = V \cdot \sin [2 \pi (F_C + m(t) \cdot \Delta F) t] \quad \text{avec} \quad m(t) = \begin{cases} +1 & \text{pour un «1»} \\ -1 & \text{pour un «0»} \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} v(t) = & V \cdot \sin (2 \pi F_C t) \cdot \cos [(2 \pi m(t) \Delta F t)] + \\ & V \cdot \cos (2 \pi F_C t) \cdot \sin [2 \pi m(t) \Delta F t] \end{aligned}$$

Le signal N.R.Z. apparaît ainsi composé de deux termes :

a - Le terme $v_1(t) = V \cdot \sin (2 \pi F_C t) \cdot \cos [2 \pi m(t) \Delta F t]$

Sachant que $m(t)$ ne peut prendre que les valeurs + 1 et - 1, et le cosinus étant une fonction paire, il vient :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V \cdot \sin (2 \pi F_C t) \cdot \cos (2 \pi \Delta F t) \\ &= 0,5 \cdot V \cdot [\sin (2 \pi (F_C + \Delta F) t) + \sin (2 \pi (F_C - \Delta F) t)] \\ &= 0,5 \cdot V \cdot [\sin (2 \pi F_0 t) + \sin (2 \pi F_1 t)] \end{aligned}$$

Le signal $v_1(t)$ résulte donc de la somme de deux composantes sinusoïdales de même amplitude $V/2$ et de fréquence F_0 et F_1 ce qui correspond au spectre de la figure 12.

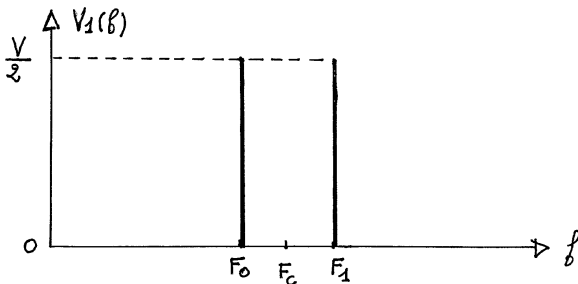


Figure 12

b - Le terme $v_2(t) = V \cdot \cos (2 \pi F_C t) \cdot \sin [2 \pi m(t) \Delta F t]$

Sachant que $m(t)$ ne peut prendre que les valeurs $+1$ et -1 , et le sinus étant une fonction impaire, il vient :

$$v_2(t) = \begin{cases} s_1(t) = +V \cdot \cos(2\pi F_C t) \cdot \sin(2\pi \Delta F t) & \text{pour un «1»} \\ s_0(t) = -V \cdot \cos(2\pi F_C t) \cdot \sin(2\pi \Delta F t) & \text{pour un «0»} \end{cases}$$

Ainsi le terme $v_2(t)$ est une séquence aléatoire de motifs $s_1(t)$ et $s_0(t)$ tels que $s_0(t) = -s_1(t)$. Son encombrement spectral peut donc être déterminé à partir des résultats de paragraphe **1.3.c**. La transformée de fourier de $s_0(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{S}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt \\ &= \int_0^{T_B} V \cdot \cos(2\pi F_C t) \cdot \sin(2\pi \Delta F t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt \\ &= 0,5 \cdot V \int_0^{T_B} [\sin(2\pi F_1 t) - \sin(2\pi F_0 t)] \cdot e^{-2\pi j f t} dt \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_B} \sin(2\pi F t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt &= \int_0^{T_B} \frac{e^{-2\pi j (f-F)t} - e^{-2\pi j (f+F)t}}{2j} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1 - e^{-2\pi j (f-F)T_B}}{2\pi j (f-F)} - \frac{1 - e^{-2\pi j (f+F)T_B}}{2\pi j (f+F)} \right] \\ &= \frac{T_B}{2j} \left[e^{-\pi j (f-F)T_B} \cdot \frac{\sin \pi (f-F)T_B}{\pi (f-F)T_B} - e^{-\pi j (f+F)T_B} \cdot \frac{\sin \pi (f+F)T_B}{\pi (f+F)T_B} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Il vient : } \underline{S}(f) &= \frac{VT_B}{4j} \cdot \left[e^{-\pi j (f-F_1)T_B} \frac{\sin \pi (f-F_1)T_B}{\pi (f-F_1)T_B} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\pi j (f+F_1)T_B} \frac{\sin \pi (f+F_1)T_B}{\pi (f+F_1)T_B} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\pi j (f-F_0)T_B} \frac{\sin \pi (f-F_0)T_B}{\pi (f-F_0)T_B} \right. \end{aligned}$$

$$+ e^{-\pi j (f + F_0) T_B} \frac{\sin \pi (f + F_0) T_B}{\pi (f + F_0) T_B} \Bigg]$$

La densité spectrale de puissance $G(f)$ du signal N.R.Z. F.S.K. est donnée par $G(f) = |\underline{S}(f)|^2 / T_B$. Le carré du module d'une somme n'est bien sûr pas égal à la somme des carrés des modules, cependant, la fonction $(\sin x/x)^2$ décroissant rapidement de part et d'autre de $x = 0$, nous pouvons admettre que les quatre termes composant $|S(f)|^2$ et centrés respectivement sur les fréquences F_0 , F_1 , $-F_0$, $-F_1$ n'empiètent pas l'un sur l'autre, ce qui conduit à :

$$G(f) = \frac{V^2 T_B}{16} \left[\left(\frac{\sin \pi (f - F_1) T_B}{\pi (f - F_1) T_B} \right)^2 + \left(\frac{\sin \pi (f + F_1) T_B}{\pi (f + F_1) T_B} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\sin \pi (f - F_0) T_B}{\pi (f - F_0) T_B} \right)^2 + \left(\frac{\sin \pi (f + F_0) T_B}{\pi (f + F_0) T_B} \right)^2 \right]$$

Les variations de $G(f)$ en fonction de la fréquence sont représentées à la figure 13.

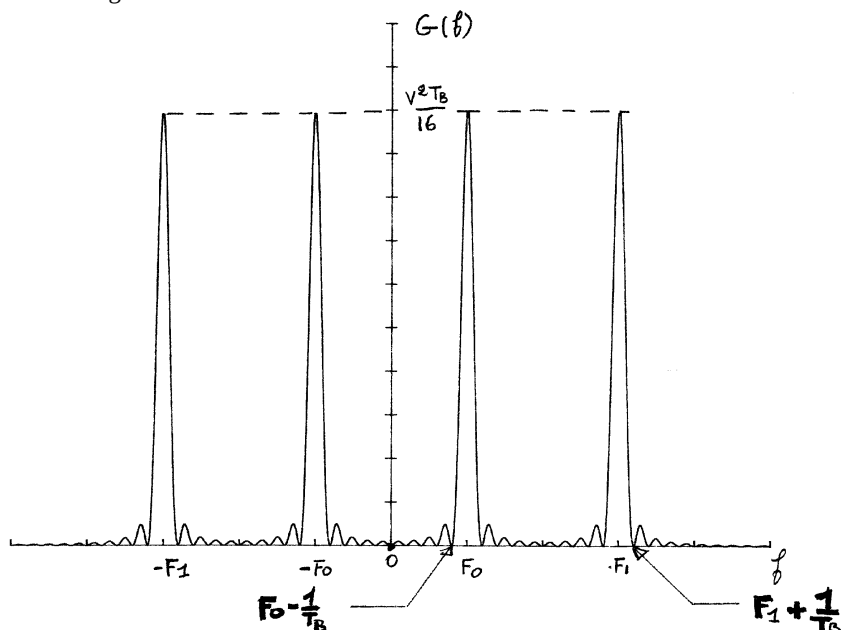


Figure 13

La conjonction des spectres des figures 12 et 13 montre que le signal N.R.Z. F.S.K. encombre la bande fréquentielle $[F_0 - 1/T_B, F_1 + 1/T_B]$.

Exemple : Le standard AVIS V23 possède les caractéristiques suivantes : $F_1 = 1\,700\text{ Hz}$, $F_0 = 1\,300\text{ Hz}$, $T_B = 1,67\text{ m.sec}$ (600 bauds). Nous en déduisons : $F_0 - 1/T_B = 700\text{ Hz}$, $F_1 + 1/T_B = 2\,300\text{ Hz}$. L'intervalle fréquentiel occupé par ce signal N.R.Z. F.S.K. est bien compatible avec la bande passante du réseau téléphonique $[300\text{ Hz}, 3\,400\text{ Hz}]$.

Expérimentalement, et par accumulation de mesures, on peut relever le diagramme d'amplitude de la figure 14. (Dans ce cas particulier, l'hypothèse selon laquelle les différentes figures spectrales n'empiètent pas l'une sur l'autre n'est pas vérifiée).

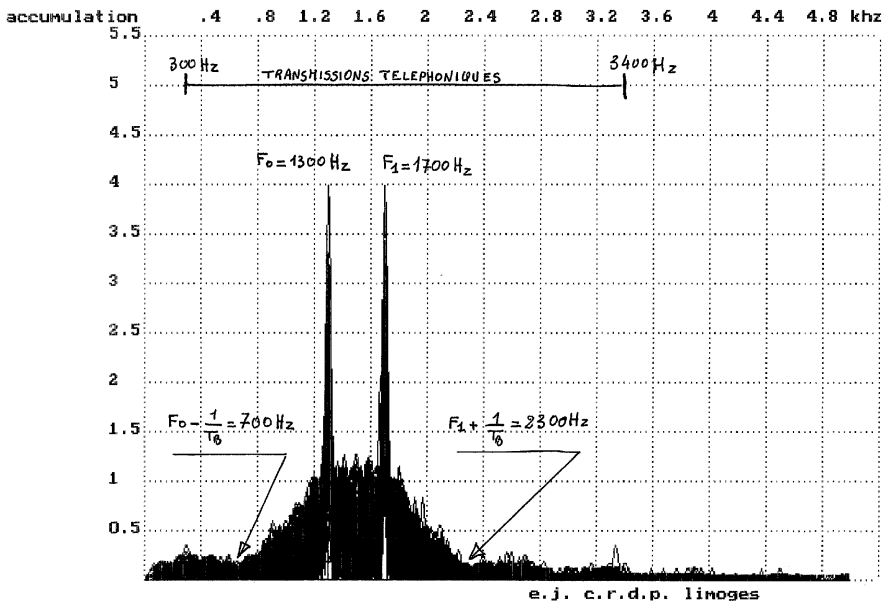


Figure 14

3. DÉMODULATION DU SIGNAL NUMÉRIQUE

Nous n'envisagerons que le signal N.R.Z. F.S.K.

À la réception, il est nécessaire de reconstituer le signal numérique à partir du signal reçu, ce qui peut être réalisé à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase.

3.1. Boucle à verrouillage de phase

Le schéma de principe d'une boucle à verrouillage de phase est représenté à la figure 15.

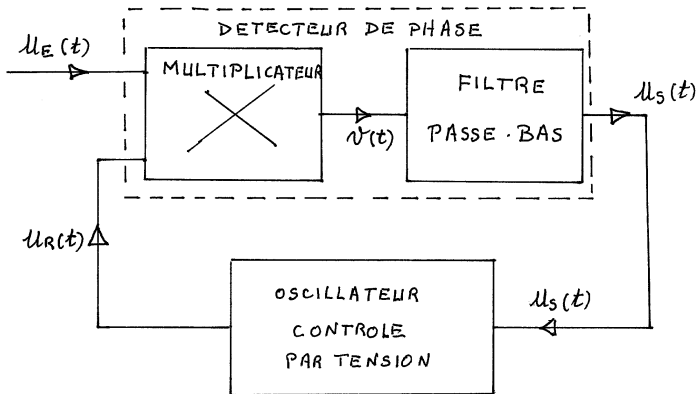


Figure 15

Rappelons que la fréquence instantanée du signal $A \cdot \cos [\theta(t)]$ est :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \right|$$

- a** - Le détecteur de phase est constitué par :
- Un multiplieur qui reçoit le signal d'entrée :

$$u_E = U_E \cdot \sin [2\pi f_C t + \varphi_E(t)]$$

et le signal de sortie du V.C.O.,

$$u_R = U_R \cdot \cos [2\pi f_C t + \varphi_R(t)]$$

dont les phases $\varphi_E(t)$ et $\varphi_R(t)$ sont susceptibles de varier dans le temps.

Sachant que $\left| \frac{d\varphi_E(t)}{dt} \right| \ll 2\pi f_C$ et $\left| \frac{d\varphi_R(t)}{dt} \right| \ll 2\pi f_C$ leurs pulsations instantanées respectives sont :

$$2\pi f_C + \frac{d\varphi_E(t)}{dt} \quad \text{et} \quad 2\pi f_C + \frac{d\varphi_R(t)}{dt}$$

Le multiplicateur délivre la tension :

$$\begin{aligned} v &= k \cdot u_E \cdot u_R = k \cdot U_E \cdot U_R \cdot \sin \left[2\pi f_C t + \varphi_E(t) \right] \cdot \cos \left[2\pi f_C t + \varphi_R(t) \right] \\ &= 0,5 \cdot k \cdot U_E \cdot U_R \cdot \left[\sin (2\pi f_C t + \varphi_E(t) + \varphi_R(t)) + \sin (\varphi_E(t) - \varphi_R(t)) \right] \end{aligned}$$

La fréquence instantanée du premier terme est :

$$2f_C + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d\varphi_E(t)}{dt} + \frac{d\varphi_R(t)}{dt} \right]$$

La fréquence instantanée du deuxième terme est :

$$\frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\varphi_E(t)}{dt} - \frac{d\varphi_R(t)}{dt} \right|$$

Lorsque la boucle est accrochée, la fréquence instantanée du premier terme est très supérieure à celle du second.

Le filtre passe-bas ne laisse passer que le signal :

$$v_1 = 0,5 \cdot k \cdot U_E \cdot U_R \cdot \sin (\varphi_E(t) - \varphi_R(t))$$

Lorsque la boucle est accrochée, les phases $\varphi_E(t)$ et $\varphi_R(t)$ restent suffisamment voisines pour pouvoir assimiler le sinus à l'angle et le signal v_1 s'écrit :

$$v_1 = 0,5 \cdot k \cdot U_E \cdot U_R \left[\varphi_E(t) - \varphi_R(t) \right]$$

En supposant que le filtre passe-bas est du premier ordre, les tensions u_S et v_1 sont liées par une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$u_S + \tau \cdot \frac{du_S}{dt} = v_1 = 0,5 \cdot k \cdot U_E \cdot U_R \cdot \left[\varphi_E(t) - \varphi_R(t) \right] \quad (1)$$

b - L'oscillateur contrôlé par tension (V.C.O.) fournit la tension u_R dont la partie variable de la fréquence instantanée dépend de la tension de commande u_S sous la forme :

$$\frac{d \varphi_R(t)}{dt} = K_0 \cdot u_S \quad (2)$$

c - Lorsque la pulsation de la tension d'entrée u_E passe de ω_C à $\omega_C + \Delta\omega_C$ la dérivée $\frac{d \varphi_E(t)}{dt}$ passe de 0 à $\Delta\omega_C$.

En regroupant les équations (1) et (2), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{du_S}{dt} + \tau \cdot \frac{d^2 u_S}{dt^2} &= 0,5 \cdot k \cdot U_E \cdot U_R \cdot \left[\frac{d \varphi_E(t)}{dt} - \frac{d \varphi_R(t)}{dt} \right] \\ &= 0,5 \cdot k \cdot U_E \cdot U_R \cdot \left[\Delta\omega_C - K_0 \cdot u_S \right] \end{aligned}$$

En posant :

$$\omega_0^2 = \frac{0,5 \cdot K_0 \cdot k \cdot U_E \cdot U_R}{\tau} \quad \text{et} \quad m = 0,5 \sqrt{\left(\frac{1}{0,5 \cdot \tau \cdot K_0 \cdot k \cdot U_E \cdot U_R} \right)}$$

La tension u_S obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{du_S^2}{dt^2} + 2m \omega_0 \frac{du_S}{dt} + \omega_0^2 u_S = \frac{\omega_0^2}{K_0} \Delta\omega_C$$

En choisissant pour le facteur d'amortissement m une valeur comprise entre 0,5 et 1, le régime transitoire disparaît rapidement et la tension u_S se fixe à une valeur donnée par la solution particulière de l'équation différentielle :

$$u_S = \frac{1}{K_0} \Delta\omega_C$$

La tension u_S apparaît ainsi comme une image de l'écart de la fréquence instantanée du signal d'entrée par rapport à sa fréquence centrale. Dans le cas d'une modulation N.R.Z. F.S.K., la tension u_S reproduit les bits du signal N.R.Z.

d - Au laboratoire le dispositif de la figure 15 peut être réalisé en prenant, pour le multiplieur un circuit intégré (AD 534, AD 633 ou

autre) et pour le V.C.O. un générateur BF wobulable (suivant le sens de variation de la fréquence du générateur BF il peut être nécessaire d'introduire un inverseur avant d'appliquer la tension u_S sur l'entrée de wobulation).

L'accrochage de la boucle s'opère en observant, sur l'oscilloscope les tensions u_E et u_R , et en réglant manuellement la fréquence du générateur de tension u_E ou celle du V.C.O. jusqu'à l'observation de deux courbes stables (les fréquences des deux générateurs sont alors rigoureusement les mêmes). En modulant ensuite le générateur d'attaque par un signal N.R.Z., il est possible de relever les oscillogrammes de la figure 16.

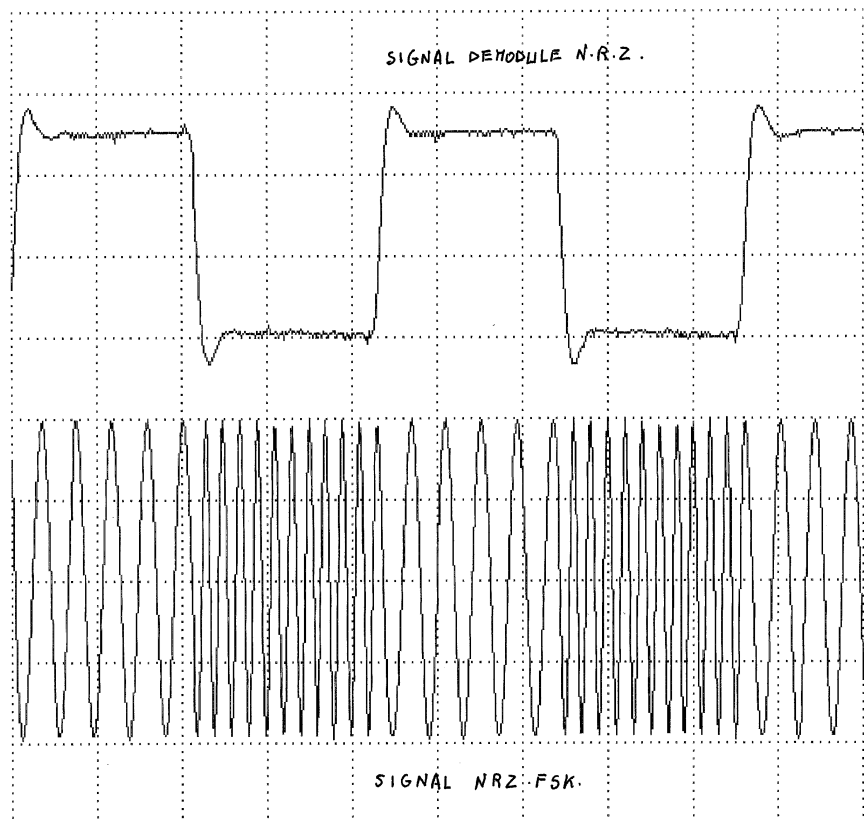


Figure 16

La facteur d'amortissement m est réglable par l'amplitude des tensions d'entrée U_E et de retour U_R . Pour des valeurs trop faibles la boucle décroche. Pour des valeurs élevées, m devient trop petit et le régime transitoire est trop oscillatoire.

e - Industriellement les boucles à verrouillage de phase sont réalisées par des circuits intégrés (565, 4046 ou autres). Ces circuits contiennent un détecteur de phase et un V.C.O. La tension délivrée par le V.C.O. ainsi que la tension d'entrée sont des tensions carrées. Si la tension d'attaque est sinusoïdale il faut donc au préalable la transformer en tension carrée à l'aide d'un comparateur.

Le comparateur de phase est réalisé par une porte «ou exclusif» suivie d'un filtre passe bas (figure 17).

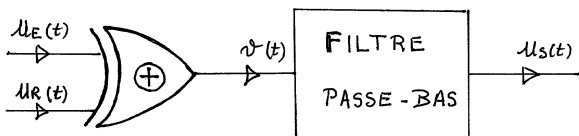


Figure 17

Les tensions u_E , u_R et v sont décrites par le graphe de la figure 18.

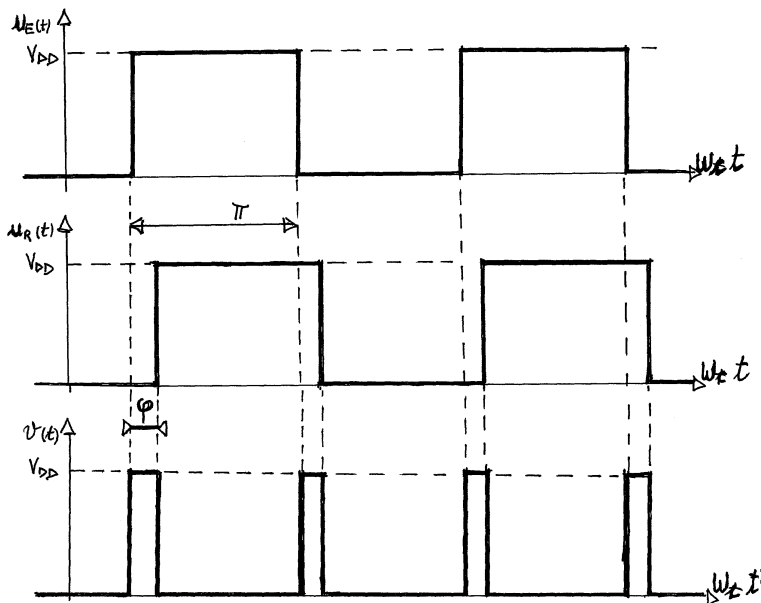


Figure 18

En supposant que les tensions u_E et u_R sont obtenues en comparant à 0 les tensions sinusoïdales $U_E \cdot \sin(\omega_C t)$ et $U_R \cdot \sin(\omega_C t - \varphi)$, le déphasage φ apparaît, sur la figure 18, comme le temps pendant lequel la tension v est égale à V_{DD} .

Le filtre passe-bas détecte la valeur moyenne de la tension v , c'est-à-dire :

$$u_S = V_{DD} \frac{\varphi}{\pi}$$

La tension u_S est bien une image du déphasage φ .

4. DÉTECTION DE SIGNAUX NUMÉRIQUES NOYÉS DANS LE BRUIT

Nous n'envisagerons que la réception d'un signal N.R.Z. noyé dans un bruit blanc dont la densité spectrale de puissance encombre uniformément tout le spectre de fréquence de 0 à l'infini.

Nous avons vu que 91 % de la puissance du signal N.R.Z. apparaît dans la bande de fréquence $[0, 1/T_B]$. Nous pouvons en conclure qu'il est possible de construire un filtre qui, tout en étant perméable au signal utile, réduise la valeur quadratique moyenne du bruit, et diminue ainsi la probabilité d'erreur.

Du point de vue temporel, observons (figure 19) les variations du signal utile $s(t)$ et du bruit $n(t)$.

On conçoit qu'en ne considérant que la valeur du signal utile à un instant t_0 , on ne met pas à profit toute l'énergie du motif qui reste égal à V pendant toute la durée T_B d'un bit. On laisse ainsi au bruit toutes les chances de perturber la décision et de provoquer une erreur. Sachant que la valeur moyenne du bruit est nulle, la surface algébrique comprise entre la courbe $n(t)$ et l'axe des temps, dans l'intervalle de temps $[0, T_B]$ est quasiment nulle. Par contre la surface comprise entre le signal utile et l'axe des temps est égale à $V \cdot T_B$ pour un «1» et à $-V \cdot T_B$ pour un «0».

Ces surfaces peuvent être déterminées en intégrant le signal bruité entre les instants 0 et T_B . Nous pouvons ainsi espérer une diminution de la probabilité d'erreur due au bruit à l'aide du filtre de la figure 20.

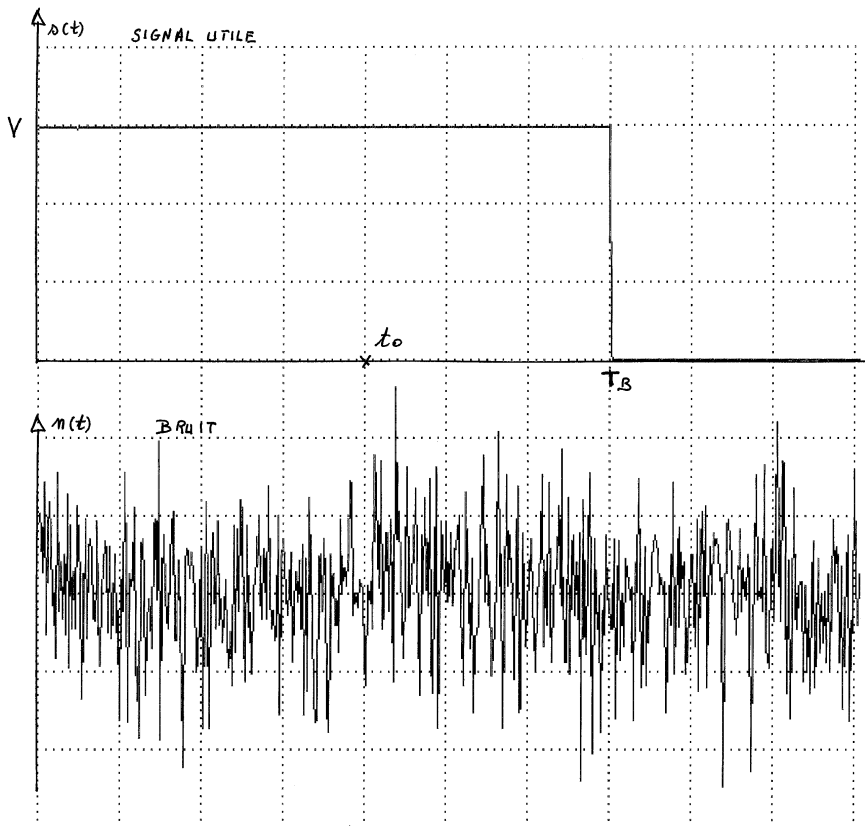


Figure 19

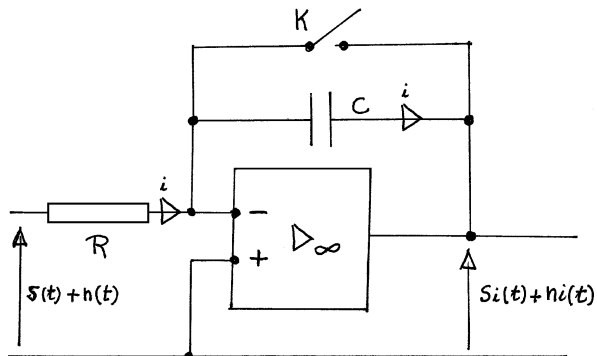


Figure 20

Au début de chaque motif, à l'instant $t = 0$, l'interrupteur K est fermé pendant un temps très court, permettant ainsi la décharge du condensateur C et la remise à 0 de la tension de sortie. Soit $s(t) + n(t)$ le signal incident résultant de la superposition du signal utile $s(t)$ et du signal de bruit $n(t)$ et soit $s_i(t) + n_i(t)$ le signal de sortie du filtre. En intégrant l'équation différentielle :

$$i = -C \cdot \frac{d}{dt} [n_i(t) + s_i(t)] = \frac{s(t) + n(t)}{R}$$

entre les instants 0 et T_B , il vient :

$$\begin{aligned} s_i(T_B) + n_i(T_B) &= -\frac{1}{RC} \left[\int_0^{T_B} s(t) dt + \int_0^{T_B} n(t) dt \right] \\ &\approx \frac{-V \cdot T_B}{RC} && \text{pour un «1»,} \\ &\approx \frac{+V \cdot T_B}{RC} && \text{pour un «0»}. \end{aligned}$$

Expérimentalement, on obtient les oscillogrammes des figures 21a et 21b.

Sur la figure 21b il semble bien difficile de croire que la tension d'entrée véhicule un signal cohérent et pourtant, à partir du signal de sortie, il est possible de déterminer la suite des «0» et des «1».

On montre théoriquement que le dispositif précédent constitue un filtre optimal conduisant à une probabilité d'erreur minimale. Il peut assez aisément être mis en œuvre au laboratoire car l'horloge digitale cadencant l'ouverture et la fermeture de l'interrupteur K se trouve à quelques dizaines de centimètres du récepteur. Par contre sa réalisation industrielle nécessite, à la réception, la reconstitution du rythme digital à partir du signal bruité, ce qui n'est pas évident à réaliser en temps réel.

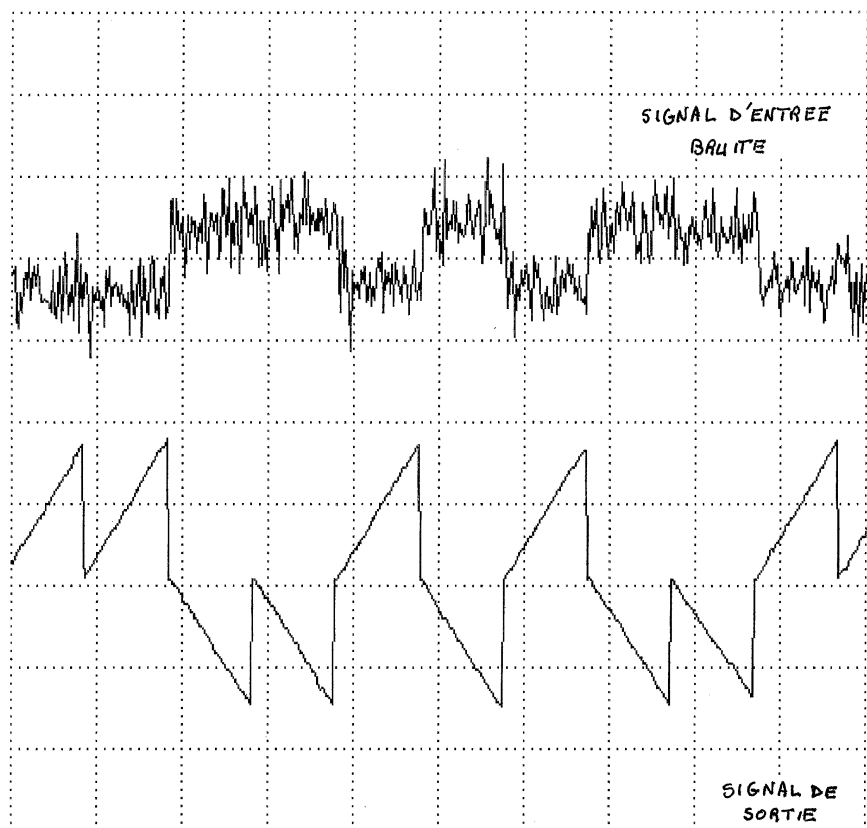


Figure 21a

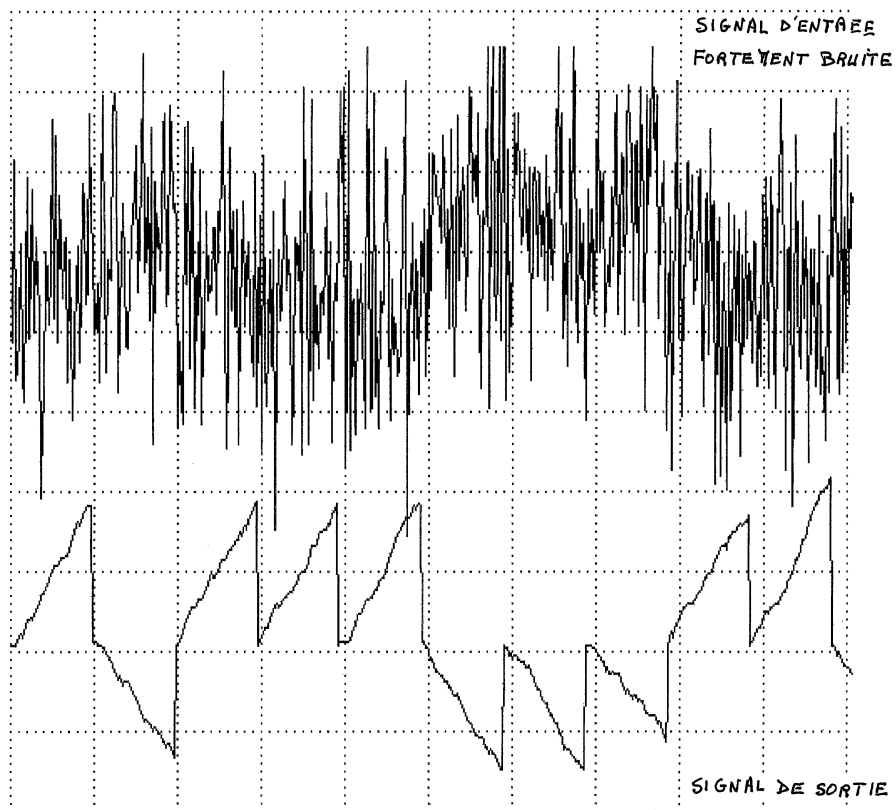


Figure 21b

5. COMPARAISON ENTRE TRANSMISSION ANALOGIQUE ET NUMÉRIQUE

Nous avons vu que, tout comme pour les communications analogiques, la qualité de la transmission impose pour le canal qui la supporte, une bande passante suffisante.

Outre la téléinformatique qui permet de mettre en communication des instruments informatiques, les transmissions numériques présentent de nombreux avantages :

- la qualité de la transmission est définie une fois pour toutes à la conception indépendamment du bruit qui pollue le canal tant qu'il n'est pas suffisant pour provoquer des erreurs de décision ;
- la transmission de plusieurs signaux sur une même porteuse peut facilement être réalisée par multiplexage (figure 22).

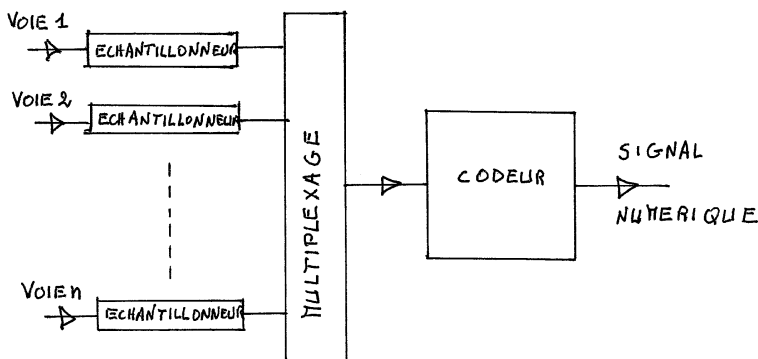


Figure 22

Le multiplexage permet d'entrelacer, dans un ordre déterminé, les échantillons de plusieurs voies. En Europe, le multiplex utilisé par les télécommunications permet de transmettre sur un même canal trente voies téléphoniques plus deux voies libres. Sachant que la transmission de la parole nécessite une bande passante de 4 KHz, la fréquence d'échantillonnage est de 8 KHz (théorème de Shannon). Le codage numérique est à 8 bits. Il est donc nécessaire de transmettre $32 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1\,000 = 2048 \cdot 10^3$ bits par seconde. La durée de

chaque motif est $T_B = \frac{1}{32 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1\,000} + 0,49 \mu\text{s}$. La bande passante du canal doit donc être $2/T_B = 4 \text{ MHz}^*$;

– une communication numérique permet de se protéger contre les erreurs dues au bruit. Pour cela, on ajoute à chaque bloc des bits auxiliaires dits de redondance (bit de parité par exemple).

Annexe

Informations sur quelques modems

par Bruno VELAY

Pour plus de détails, consulter : «*Electronic Communication Techniques*» par Paul H. YOUNG, édition 1991, chez Maxwell Mc Millan international.

1. EXEMPLES DE MODEM FSK

Les modems de faible à moyen débit ($\leq 1\,200 \text{ bits/s}$) exploitent la F.S.K.

Le standard V 23 défini par la CCITT (équivalent à 202 chez AT & TIS) a les caractéristiques suivantes :

- VCO à $1\,700 \text{ Hz}$ (à 1 %) modulé à $\mp 500 \text{ Hz}$ (à 1 %) soit $1\,200 \text{ Hz}$ pour le symbole «Mark» 1 et $2\,200 \text{ Hz}$ pour le symbole «space» 0,
- il nécessite uniquement les deux fils usuels du téléphone,
- le signal est de -6 à -9 dBm sur une ligne 600Ω ,

* N.D.L.R. : Des entrelaçages plus complexes sont maintenant réalisés en téléphonie. Voir l'article «Introduction à la modulation» dans le B.U.P. n° 771, février 1994, p. 225.

– il se démodule sans difficulté par un démodulateur FM (PLL c'est-à-dire boucle à verrouillage de phase accrochée sur la porteuse à 1 700 Hz).

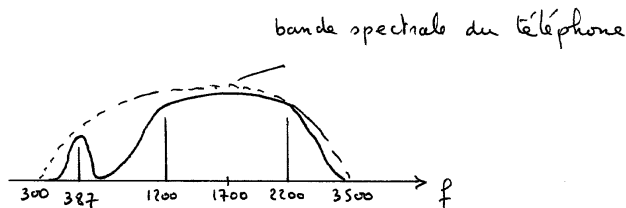
a - L'émetteur prêt à transmettre active RTS (Request to sent).

b - Le récepteur détecte la porteuse puis active CDflag (Carrier detect).

c - L'émetteur reçoit l'autorisation d'émettre CTS (clear to send) moins de 200 ms plus tard.

d - La transmission est asynchrone avec un contrôle de parité (pair).

e - Les requêtes automatiques de contrôle et la retransmission des données fausses se font sur un canal spécial secondaire à 387 Hz soit ARQ (Automatic Retransmission Request). Il fonctionne en ASK (Amplitude Shift Keying) de type tout ou rien : «on / off Keying». Le débit est faible 5 bits/s en 202, 75 bits/s en V 23.



Encombrement spectral pour un modem V23.

2. QUELQUES AUTRES STANDARDS DE MODEM

Nom	Débit bits/s	Type	Fils / duplex	Mode
AT & T 103	300	F.S.K.	2 / moitié	asynchrone
AT & T 202	1 200	F.S.K.	4 / total	asynchrone
V 26	2 400	P.S.K.	2 / moitié	synchrone
V 29, V 32, V33, V 35	9 600 à 56 000	32 Q.A.M.	4 / total	synchrone