

Modulation d'amplitude, démodulation*

par Jacques TABUTEAU
Lycée Janson de Sailly - 75000 Paris

RÉSUMÉ

- La modulation d'amplitude est obtenue par un dispositif non linéaire.
- Montages didactiques autour d'une diode, d'un multiplieur, d'un ampli-opérationnel.
- Analyse spectrale des signaux utilisés.

1. PRINCIPE SUCCINCT DE LA MODULATION D'AMPLITUDE (MA)

1.1. Principe

Étant donné un oscillateur local délivrant la tension $e_p(t) = P \cdot \cos(\omega_p t)$ (appelée la **porteuse**) et un signal «utile» à transmettre, $e_m(t)$ (la **modulation**, de fréquences très inférieures à celle de la porteuse), le dispositif de modulation d'amplitude génère à sa sortie le signal :

$$s(t) = P \cdot [1 + K e_m(t)] \cdot \cos(\omega_p t)$$

Il est essentiel de noter que l'opération n'est pas linéaire : on n'a pas $s(t) = A \cdot e_p(t) + B \cdot e_m(t)$.

1.2. Exemple

Pour bien préciser ces différents points, prenons l'exemple de France Inter (porteuse : 162 kHz) devant transmettre un concert de musique.

* Cet article est issu de propositions d'expériences pour la préparation à l'agrégation interne de Physique (Université Paris VII).

a - Dans un premier temps, le chef d'orchestre prend son diapason, lequel émet le LA 3 : $e_m(t) = M \cdot \cos(\omega_m t)$, avec $\omega_m = 2\pi \cdot N_m$, $N_m = 440$ Hz. France Inter émet ce signal «sur 162 000 Hz» :

$$s(t) = P \cdot [1 + I \cdot \cos(\omega_m t)] \cdot \cos(\omega_p t).$$

Il s'appelle indice de modulation. $P \cdot [1 + I \cdot \cos(\omega_m t)]$ représente évidemment l'amplitude modulée de la porteuse. Ce signal émis comprend trois fréquences : 162 kHz : la porteuse, $\{162\,000 - 440\}$ Hz = 161 560 Hz : la bande latérale inférieure, et $\{162\,000 + 440\}$ Hz = 162 440 Hz : la bande latérale supérieure. En effet :

$$s(t) = P \cdot [1 + I \cdot \cos(\omega_m t)] \cdot \cos(\omega_p t)$$

$$= P \cdot \cos(\omega_p t) + I * P/2 \cdot \cos(\omega_m t) \cdot \cos(\omega_p t)$$

$$s(t) = P \cdot \cos(\omega_p t) + (I * P/2) \cdot \cos(\omega_p - \omega_m) t +$$

$$(I * P/2) \cdot \cos(\omega_p + \omega_m) t$$

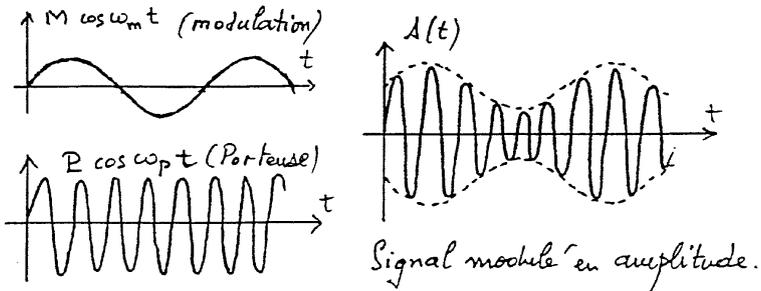


Figure 1

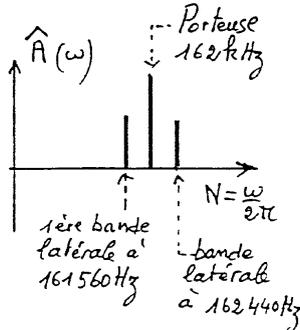


Figure 2

Remarque importante : Bien noter la différence fondamentale différenciant les oscillogrammes correspondant à la somme de deux sinusoïdes d'une part, à la modulation de l'une par l'autre d'autre part... bien que pour des amplitudes **égales**, les deux oscillogrammes se ressemblent tout à fait (battements) - mais alors, les spectres de fréquences sont très différents.

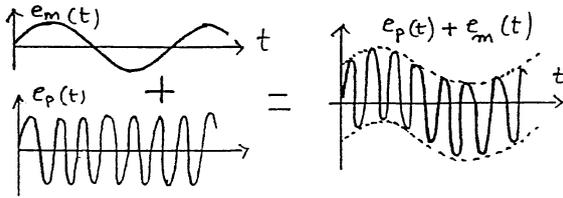


Figure 3 : Addition.

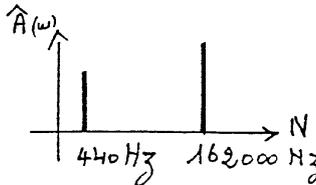


Figure 4 : Spectre de la somme.

Au plan des puissances, on voit que la porteuse transporte une puissance proportionnelle à P^2 , et les bandes latérales proportionnelle à $(IP)^2/4$. Or $I < 1$ (sinon il y aurait surmodulation...). La puissance perdue dans la porteuse est donc au moins le double de la puissance transportée par les deux bandes latérales qui, seules, transportent le signal utile.

b - Dans un deuxième temps, l'orchestre exécute son morceau. Les sons émis sont évidemment plus ou moins complexes ; toutefois, d'après le théorème de Fourier concernant les séries, et d'après l'intégrale de Fourier, on peut les considérer comme une superposition de signaux parfaitement sinusoïdaux, chacun pouvant être traité comme dans le *a*). Les fréquences musicales s'étalant couramment de 20 Hz à 15 000 Hz, il en résulte les schémas suivants, dans l'espace temps d'une part, dans l'espace des fréquences d'autre part.

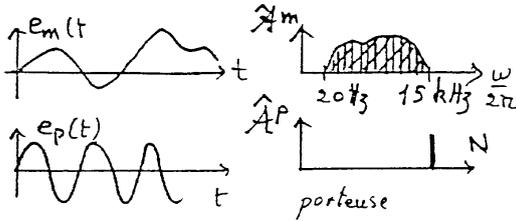


Figure 5

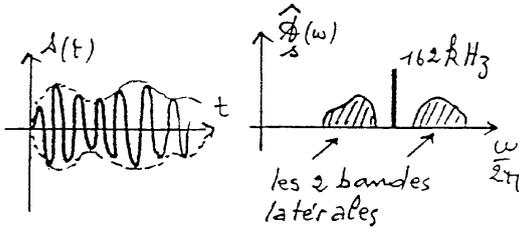


Figure 6

1.3. Cas des dispositifs non linéaires (exemple : modulateur à diode)

a - D'une manière générale, **tout dispositif non linéaire génère des harmoniques**. En effet : Soit un opérateur tel que $s = h(e)$ où $e(t)$ est le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie délivré par l'opérateur. On peut écrire :

$$s = h(0) + e \cdot h'(0) + \left(\frac{e^2}{2}\right) \cdot h''(0) + \left(\frac{e^3}{3!}\right) \cdot h'''(0) + \dots$$

– soit e très petit. Alors $s \approx h(0) + e \cdot h'(0)$. : $s \approx A + B \cdot e$: la réponse est pratiquement linéaire,

– soit e «moins petit». Alors $s \approx h(0) + e \cdot h'(0) + (e^2/2) \cdot h''(0)$. : $s \approx A + B \cdot e + C \cdot e^2$. Réponse quadratique.

$$\text{Pour } e = E \cdot \cos \omega t, s \approx A + B \cdot (E \cdot \cos \omega t) + C \cdot (E \cdot \cos \omega t)^2.$$

$$\text{Or } \cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2.$$

$$\text{D'où : } s(t) = (A + C \cdot E^2/2) + (B \cdot E) \cdot \cos \omega t + (C \cdot E^2/2) \cdot \cos 2\omega t.$$

On voit donc qu'à partir d'un signal d'entrée absolument sinusoïdal, donc ne comportant qu'une seule fréquence, l'opérateur quadratique génère un signal de sortie contenant une composante de fréquence **double** de la fréquence du signal d'entrée. Ce phénomène est également très utilisé en optique non linéaire (lasers).

b - Soit maintenant $e(t) = \{P \cdot \cos(\omega_p t) + M \cdot \cos(\omega_m t)\}$. Soit : porteuse + modulation. Il vient :

$$s(t) = A + B \cdot \{P \cdot \cos(\omega_p t) + M \cdot \cos(\omega_m t)\} + \\ C \cdot \{P \cdot \cos(\omega_p t) + M \cdot \cos(\omega_m t)\}^2$$

Après arrangement :

$$s(t) = [A + C \cdot P^2/2 + C \cdot M^2/2] + \\ [B \cdot P \cdot \cos(\omega_p t) + B \cdot M \cdot \cos(\omega_m t)] + [(C \cdot P^2/2) \cdot \cos(2\omega_p t) + \\ (C \cdot M^2/2) \cdot \cos(2\omega_m t)] + [C \cdot M \cdot P \cdot \cos(\omega_p - \omega_m) t + \\ C \cdot M \cdot P \cdot \cos(\omega_p + \omega_m) t]. \quad (\text{ouf !})$$

c - En reprenant l'exemple du concert retransmis par France Inter, un filtre passe-bande de fréquence centrale 162 kHz et de bande passante 10 à 20 kHz permet donc d'isoler le signal de modulation d'amplitude :

$$s^*(t) = B \cdot P \cdot \cos(\omega_p t) + C \cdot M \cdot P \cos(\omega_p - \omega_m) t + \\ [C \cdot M \cdot P \cos(\omega_p + \omega_m) t],$$

l'indice de modulation valant ici : $I = 2C \cdot M/B$. Un exemple de filtre passe-bande est proposé dans le paragraphe 2.2.

2. PROPOSITIONS DE CIRCUITS DE MODULATION D'AMPLITUDE

Ils sont très nombreux... Ce qui montre donc qu'il n'en existe aucun qui soit parfaitement satisfaisant ! Les schémas de montage qui sont proposés ici ne sont pas des schémas industriels : ces derniers sont souvent difficiles à analyser, les fonctions d'oscillateur local (porteuse) et de modulation (opération non linéaire) étant souvent très imbriquées ; les circuits industriels se prêtent donc assez mal aux illustrations pédagogiques que nous recherchons.

2.1. M.A. sans porteuse avec un multiplieur

C'est le montage le plus facile à mettre en œuvre. Une seule précaution : ne pas entrer des signaux d'amplitude excessive, saturant les entrées du multiplieur.

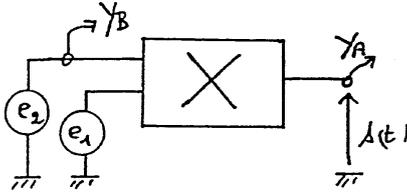


Figure 7

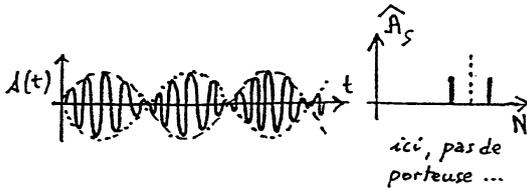


Figure 8

- Régler le premier G.B.F. à quelques kHz, et quelques volts, pour simuler la modulation (signal sinusoïdal, puis dent de scie, puis signal carré).
- Régler le deuxième G.B.F. à 20 kHz environ, et quelques volts pour simuler la porteuse (signal sinusoïdal).
- Visualiser les signaux à l'oscilloscope. Synchroniser le plus souvent sur la modulation.

Pour obtenir des oscillogrammes semblables au dessin ci-dessus avec un oscilloscope classique, il est nécessaire que les deux fréquences soient dans un rapport **exactement** commensurable, ce qui exige beaucoup de doigté et de patience. L'opération est grandement facilitée si l'un des G.B.F. est synchronisable de l'extérieur (entrée «synchro in») ; en ce cas, entrer sur cette borne le signal issu de la sortie TTL de l'autre G.B.F. (ou encore de sa sortie «synchro out»).

On ne rencontre aucun de ces problèmes de synchronisation si l'on utilise un oscilloscope à mémoire, qui est donc de loin celui qu'il faut préférer ici si on en possède.

Rappel : La sortie s d'un multiplieur s'exprime en fonction de ses deux entrées e_1 et e_2 selon la relation : $s = K \cdot e_1 \cdot e_2$. Très souvent $K = 0,1 \text{ volt}^{-1}$. Alors : $s = e_1 \cdot e_2 / 10$.

Ici, avec les deux G.B.F. en signaux sinusoïdaux, cela donne :

$$s(t) = 0,1 \cdot M \cos(\omega_m t) \cdot P \cos(\omega_p t).$$

Soit :

$$s(t) = (1/20) \cdot P \cdot M \cdot \cos(\omega_p - \omega_m) t + (1/20) \cdot P \cdot M \cdot \cos(\omega_p t + \omega_m) t.$$

On remarque donc l'**absence de porteuse** à l'émission dans ce cas très particulier de modulation «DSBSC» : double side band suppressed carrier.

Pour rétablir la présence de la porteuse, il suffit d'ajouter une tension constante à la modulation (en jouant, par exemple, sur le décalage de tension du GBF).

Si l'on dispose d'un analyseur de spectre, **visualiser le spectre** ; l'interpréter selon ce qui a été dit précédemment. A défaut, utiliser un amplificateur sélectif, dont on réglera le Q sur une valeur assez élevée (cinquante par exemple) ; en balayant la fréquence centrale de cet amplificateur sélectif, mettre en évidence les fréquences des deux bandes latérales.

Recommencer avec une modulation triangulaire ; puis carrée...

Remarques :

- l'analyseur de spectre analogique peut être remplacé par une analyse spectrale numérique (cf. B.U.P. n° 754),
- il est possible de faire de la modulation avec porteuse avec un multiplieur-additionneur (cf. articles dans ce numéro de B. FAGOT / J.-C. FROMONT concernant AD633JN).

2.2. M.A. avec une diode

On exploite ici le fait que l'opération $s(t) = \{ \text{partie positive de } e(t) \}$ n'est pas une opération linéaire.

Pour des détails sur les spectres de fréquence obtenus dans ce cas, se reporter à l'article de M. MOREAU, B.U.P. n° 675, juin 1985, pages 1177, 1178, 1179, 1180.

Voir aussi dans ce numéro la simulation de ce montage avec PSPICE par M. VELAY.

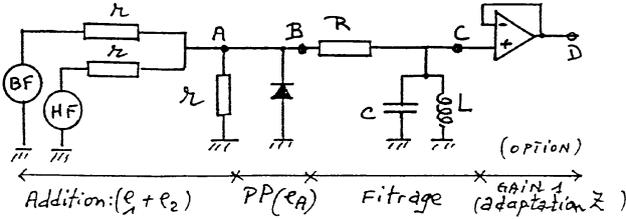


Figure 9



*oscillo en C
ou en D*

Figure 10

Exemple de valeurs : $r = 10 \text{ k}\Omega$, L : bobine de cinq cents à mille tours SANS noyau de fer, ou self moulée de 10 mH à 100 mH , C de l'ordre de 1 à 10 nF ; R de l'ordre de $100 \text{ k}\Omega$. Diode 1N914 ou 1N4148.

- Mettre la tension BF à zéro. Régler la fréquence HF pour avoir le maximum de signal à la sortie du filtre (en C ou en D). On a obtenu alors la fréquence centrale du filtre passe-bande ; un bon ordre de grandeur à réaliser : de 20 à 50 kHz , en jouant sur C et / ou sur L. Relever succinctement la bande passante du filtre ; elle doit être de l'ordre de 5 à 10 kHz : régler R de manière à avoir ce résultat.
- Régler la fréquence HF sur la fréquence centrale du filtre, et ne plus changer cette fréquence HF : c'est la porteuse. Prendre une tension HF de l'ordre de 5 volts ; régler le G.B.F. aux environs de 1 volt, 2 kHz : c'est la modulation. Commencer par un signal sinusoïdal, puis triangulaire, puis carré.
- Visualiser les signaux ; étudier le spectre de fréquence : voir ci-dessus, en 2.1.

Théorie succincte

- Sans la diode : ΣI arrivant en A = 0.

Soit :
$$(e_p - V_A)/r + (e_m - V_A)/r + (0 - V_A)/r = 0.$$

Soit :
$$V_A = (e_p + e_m)/3$$

c'est donc une addition (opération linéaire, bien sûr). Vérification expérimentale : diode débranchée.

– Avec la diode : $V_B = V_A$, si V_A positif. $V \approx 0$ si V_A négatif, en considérant la diode comme sensiblement idéale. On réalise bien l'opérateur sortie = {partie positive de l'entrée}.

– Le filtre élimine les fréquences $2 \cdot N_p \approx 50$ kHz (par exemple) ; $N_m = 2$ kHz ; $2 \cdot N_m = 4$ kHz. Il reste bien la fréquence de la porteuse, et les fréquences des deux bandes latérales.

– L'A.O. placé en sortie, monté en suiveur, permet une adaptation d'impédance : même si l'on branche une charge de $1 \text{ k}\Omega$, on n'aura pas chute de la tension de sortie. Prendre un TL 081 de préférence à un 741, surtout si l'on s'est placé une fréquence assez élevée.

2.3. Modulation d'amplitude par un montage «tout ampli-op»

Objectifs

Réaliser une modulation d'amplitude ; ne pas la confondre avec une somme de signaux ; maîtriser les fréquences des divers signaux présents à divers stades de manipulation afin d'obtenir un signal démodulé semblable au signal de modulation.

Remarque : Le circuit de modulation mis en œuvre n'utilise que des A.O. par principe, conformément au programme de spéciale. Ce n'est pas un montage «professionnel». De plus, on utilise des TL 081 au lieu des 741 ordinaires, de manière à travailler sans problèmes jusqu'à 100 kHz et même au-delà. Le TL 082 n'est autre que l'association de deux A.O. TL 081 dans le même boîtier, le TL 084 en associe quatre.

Montage et principe de fonctionnement

Note : Si on ne dispose pas de la maquette toute montée, ne pas tenter de réaliser d'un seul coup le montage global, mais réaliser chaque section séparément, de telle manière qu'après étude, il reste en place et puisse être finalement raccordé à ses voisins pour obtenir le montage complet.

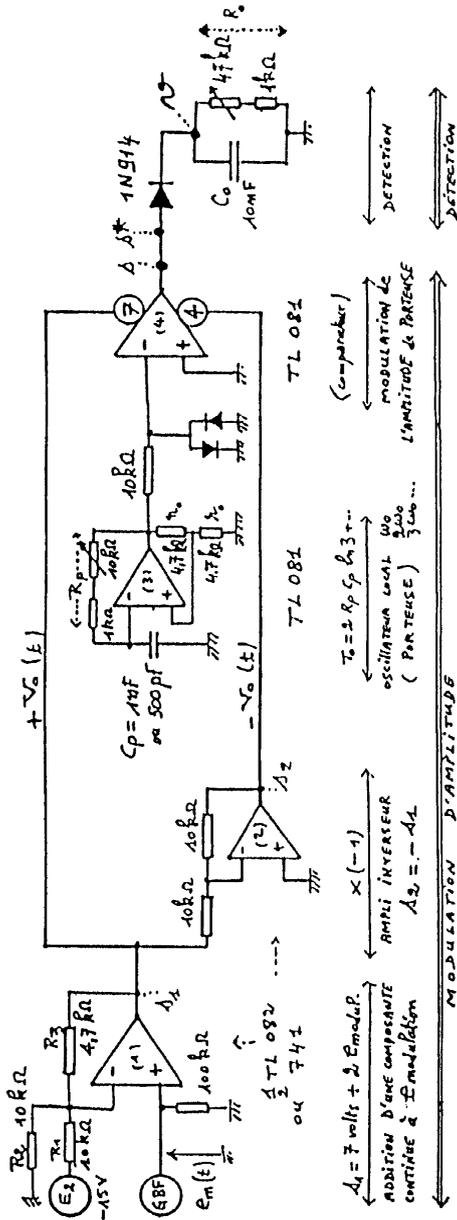


Figure 11

a - Étude de l'oscillateur local (A.O. n° 3)

Il s'agit du relaxateur bien classique.

- Refaire brièvement la théorie.
- Retrouver la forme de s (amplitude crête, expression de fréquence).
- Remarquer que la fréquence est indépendante de V_{CC} (ici 15 V).
- Faire une décomposition en série de Fourier.

Réaliser le montage avec une tension de G.B.F. nulle. Régler la fréquence du relaxateur vers 50 kHz, par exemple. Vérifier que l'on a bien : $T_0 = 2 R_p C_p \ln 3 + \text{temps de montée} + \text{temps de descente}$ dûs au slew-rate.

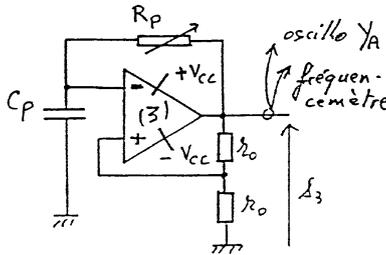


Figure 12

Si on désire une porteuse bien sinusoïdale, $s^*(t)$, intercaler un filtre comme déjà vu en 2.1., entre les points S et S^* . Il faut que la fréquence centrale du filtre soit la fréquence de l'oscillateur local : pour y parvenir, prédéterminer C par le calcul. Réaliser, et ajuster la fréquence de la porteuse en réglant R_p . Observer. Conclure. Schéma des oscillogrammes (s , s^*).

b - Additionneur (A.O. n° 1)

Théorie : L'A.O. étant idéal, retrouver la formule :

$$s_1 = - (R_3/R_1) E_2 + [1 + (R_3/R_1) + (R_3/R_2)] e_m$$

A.N. avec les valeurs proposées (conclusion : $s_1 \approx -2 \cdot e_m + 7,5$).

Expériences : observer à l'oscilloscope avec $e_m = 1$ volt crête, 5 kHz, formes des signaux : sinus, triangle, carré. Faire varier e_{om} : 1 V, 2 V, 5 V...

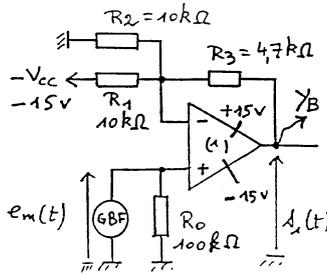


Figure 13

c - Inverseur (A.O. n° 2)

L'inversion de s_1 en $s_2 = -s_1$. Théorie. Réalisation. Dessin des oscillogrammes.

d - Modulation d'amplitude (A.O. n° 4)

Raccorder les trois montages précédents, en remarquant que le **TL 081 n° 4 est alimenté par s_1 en 7 et $s_2 = -s_1$ en 4, et non pas entre + 15 V et - 15 V comme le sont les autres.** Il en résulte donc que cet A.O., qui fonctionne en comparateur, verra sa sortie osciller entre + Vsat et - Vsat (qui sont pratiquement égaux à s_1 et s_2 respectivement) à la fréquence imposée par le relaxateur : la modulation d'amplitude est ainsi réalisée.

- Appliquer $e_{om} = 1$ volt, 5 kHz. Observer $s(t)$ et $e_m(t)$. Montrer et expliquer l'oscillogramme. (Pour le problème de synchronisation, voir 2.1.). Spectre de Fourier de $s(t)$.

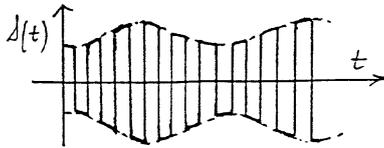


Figure 14

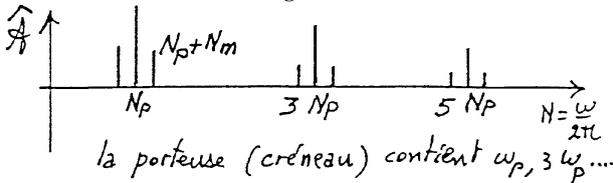


Figure 15

– Expérimenter :

$$e_{om} = 0,5 \text{ V} - 1 \text{ V} - 5 \text{ V} \dots 1 \text{ kHz} - 5 \text{ kHz} - 10 \text{ kHz} - 20 \text{ kHz} \dots$$

et les formes diverses de signal :

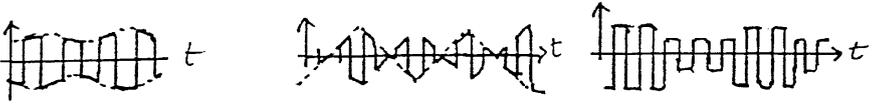


Figure 16

– Sinus - Triangle - Carré.

3. DÉMODULATION D'AMPLITUDE (circuit valable pour les trois montages de M.A., à condition qu'il n'y ait pas intermodulation ($I < 1$)). Dans le cas de la modulation par multiplieur, il faut donc ajouter une tension constante à la modulation, en sorte que la tension modulatrice totale reste toujours positive. Dans le cas du montage n° 3, éliminer le circuit sélectif R, L, C pour simplifier).

Étant donné $s(t)$, signal qui est supposé avoir été transmis, soit par voie hertzienne, soit par une ligne électrique, il s'agit d'en extraire le signal intéressant $e_m(t)$ (signal de modulation). Autrement dit, il s'agit de «récupérer» l'une des enveloppes de $s(t)$.

Montage (dit à détection d'enveloppe)

Ordre de grandeur des éléments du montage : $N_p \approx 50 \text{ kHz}$ environ, $e_{om} \approx 1 \text{ V}$; 5 kHz , $C_0 = 10 \text{ nF}$, $R_0 \approx 20 \text{ k}\Omega$.

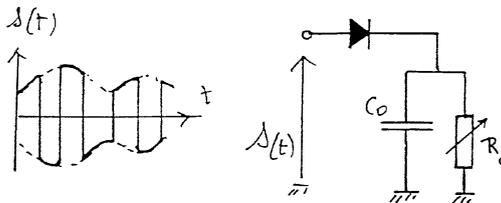


Figure 17



Figure 18 : Signal démodulé $R_0 C_0$ corrects.

Principe du fonctionnement, et réglage du circuit

La diode ne laisse passer que l'alternance positive (redressement monoalternance classique) ; puis, il y a filtrage par le circuit $R_0 // C_0$.

La constante de temps $R_0 \cdot C_0$ ne doit être ni trop grande, ni trop petite :

- si elle est trop grande, le filtrage est trop fort, la tension filtrée ne peut pas «suivre» la modulation,
- si elle est trop petite, le filtrage est insuffisant, la porteuse n'est pas suffisamment éliminée.

On voit donc que pour restituer le plus fidèlement possible la modulation, il faut réaliser au mieux la double condition :

$$T_{\text{porteuse}} \ll R_0 \cdot C_0 \ll T_{\text{modulation}}$$

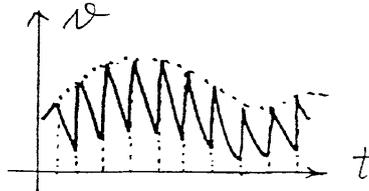


Figure 19 : $R_0 C_0 \omega_p$ pas assez grand par rapport à 1.

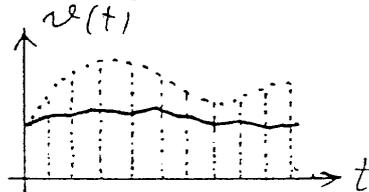


Figure 20 : $R_0 C_0 \omega_m$ trop grand par rapport à 1.

Sur l'une des voies de l'oscilloscope, envoyer e_m , quelques volts, 2 puis 5 kHz par exemple. Sur l'autre voie la tension $v(t)$. En agissant sur la résistance R_o , réaliser une tension $v(t)$ bien semblable à e_m . On se rendra compte que l'opération est d'autant plus difficile que le signal de modulation est plus riche en harmoniques.

Brochages

Le TL 082 n'est qu'un boîtier comprenant deux TL 081 (et une seule alimentation, bien sûr). Le TL 081 a le même brochage qu'un LM 741, mais les performances sont très supérieures : transistors d'entrée : (FET) : TEC et donc : i_b typique : 100 pA (10^{-10} A).
slew-rate ≈ 10 V/ μ s, $f_T \approx 3$ MHz.

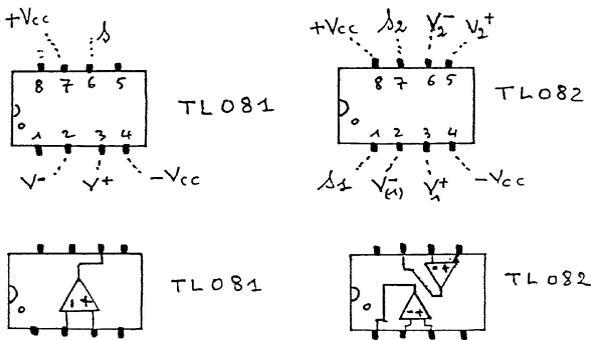


Figure 21

4. TRANSMISSION AÉRIENNE*

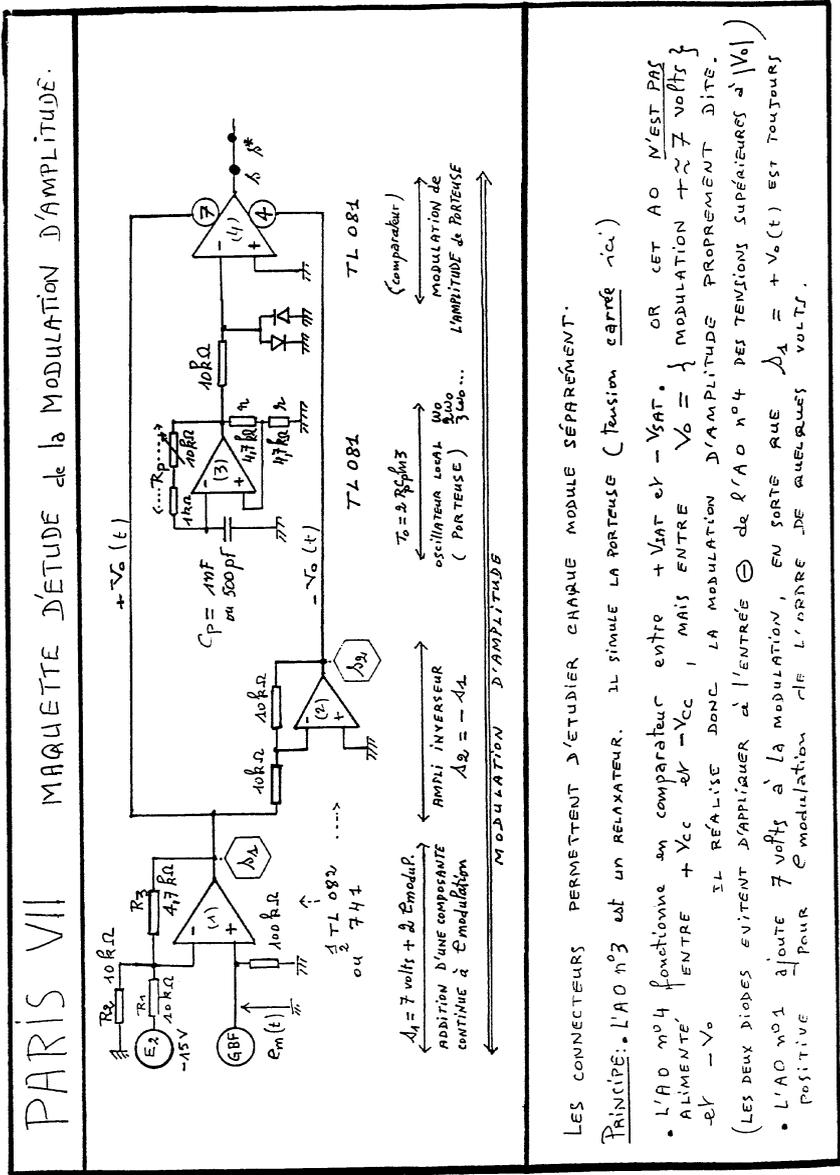
A partir du montage 2.3. on pourrait réaliser un émetteur M.A. en plaçant en s un fil d'environ 2 m. Il serait possible de capter à faible distance (≈ 1 m !) le signal émis en employant un récepteur radio A.M. usuel réglé en moyennes ou grandes ondes selon le cas. On se calerait successivement sur les groupes d'harmoniques 3 5 7 9...

Un simple jack soudé à deux fils permettrait de prendre pour tension modulante le signal issu d'un baladeur. Effet assuré lors de l'écoute dans le poste.

* Il est rappelé que toute émission radioélectrique est soumise à une législation stricte. Se renseigner auprès de la DTRE.

REMERCIEMENTS

Il m'est agréable de remercier M. DROGUET, technicien de laboratoire, pour le soin et la précision avec lesquels il a réalisé la maquette de la figure 11.



Annexe

Rappels brefs sur l'analyse harmonique d'un signal. Séries de Fourier - Intégrale de Fourier

1. SIGNAL PÉRIODIQUE ; SÉRIE DE FOURIER

Soit une fonction périodique $f(t)$, de période T_0 , pulsation $\omega_0 = 2\pi \cdot N_0 = 2\pi/T_0$, fréquence N_0 . On peut écrire :

$$f(t) = a_0 + \alpha_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_1) + \alpha_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_2) + \\ \alpha_3 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_3) + \dots$$

Physiquement : toute fonction périodique de pulsation ω_0 est une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations : $2 \cdot \omega_0$, $3 \cdot \omega_0$, $4 \cdot \omega_0 \dots$: toutes multiples de la pulsation fondamentale ω_0 . Les amplitudes de ces fonctions, appelées **harmoniques**, constituent le spectre de fréquence de la fonction périodique $f(t)$ considérée.

$f(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} [a_n \cos(n \omega_0 t) + b_n \sin(n \omega_0 t)]$	<p>Avec $a_n = \alpha_n \cdot \cos(\varphi_n)$ et $b_n = \alpha_n \cdot \sin(\varphi_n)$, et α_n, amplitude de n ième harmonique :</p> $(\alpha_n)^2 = (a_n)^2 + (b_n)^2.$
--	--

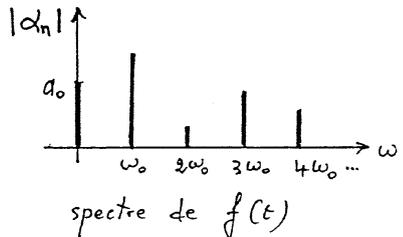
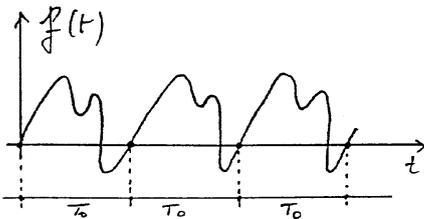


Figure 22

$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) dt$	$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cdot \cos(n \omega_0 t) dt$	$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cdot \sin(n \omega_0 t) dt$
--	---	---

Mathématiquement, pour des raisons de facilité de calcul et de généralisation, on écrit aussi, de façon équivalente :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn \omega_0 t}$$

où A_n est l'amplitude **complexe** du n ième harmonique.

Bien noter que, ici, la sommation va de $-\infty$ à $+\infty$.

Par calcul élémentaire, $a_n = (A_n + A_{-n})$ et $b_n = j \cdot (A_n - A_{-n})$. Enfin :

$$A_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cdot e^{-j \cdot n \omega_0 t} dt$$

Pour mémoire, quelques séries de Fourier, «classiques» :

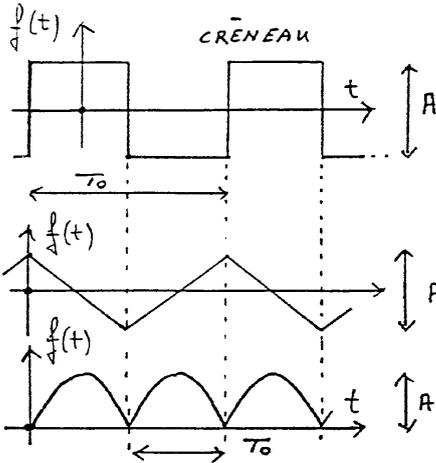


Figure 23

$$f(t) = 0 + \frac{2A}{\pi} \cos \omega_0 t + \frac{2A}{3\pi} \cos 3 \omega_0 t + \dots$$

$$\frac{2A}{(2n+1)\pi} \cos (2n+1) \omega_0 t.$$

(rien que des harmoniques de rang **impair**)

$$f(t) = 0 + \frac{4A}{\pi^2} \cos \omega_0 t + \frac{4A}{9\pi^2} \cos 3 \omega_0 t + \dots$$

$$\frac{4A}{(2n+1)^2 \pi} \cos (2n+1) \omega_0 t + \dots$$

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \frac{\cos \omega_0 t}{3} + \frac{4A}{\pi} \frac{\cos 2 \omega_0 t}{15} + \dots$$

$$+ \frac{4A}{\pi} \frac{\cos (2n+1) \omega_0 t}{(4n^2 - 1)} \dots$$

2. INTÉGRALE DE FOURIER

Soit $f(t)$ une fonction (non périodique en général), obéissant à un certain nombre de critères mathématiques que nous supposons satisfaits. Le spectre de fréquence de $f(t)$ est la fonction (complexe en général) $\hat{A}(\omega)$ telle que :

$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$
---	---

Cette intégrale généralise au cas des fonctions non périodiques la décomposition en harmoniques qui a été introduite pour les fonctions périodiques. Physiquement, il peut être utile de considérer que $f(t)$ est une somme infinie de sinusoïdes d'amplitudes infiniment petites, toutes les fréquences étant a priori représentées.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} [\hat{A}(\omega)\Delta\omega] e^{j\omega t} \quad (\Delta\omega \rightarrow 0)$$

généralise : $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t}$ avec $\omega = n \omega_0$ et n «continu» ici.

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

généralise : $A_n \cdot T_0 = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$

avec $T_0 \rightarrow \infty$ ou : $\Delta\omega \rightarrow 0$.