

Mesures d'une viscosité

Loi de Poiseuille... loi de Darcy

par Patrice JENFFER et Gilles MARTEAU
Service de Physique PCEM-M2D
Bâtiment 336 - 91405 Orsay
et Étienne GUYON
ENS - 45, rue d'Ulm - 75005 Paris

1. INTRODUCTION

Dans un article écrit au B.U.P., il y a quelques années en relation avec une conférence au congrès annuel de l'U.d.P. à Reims nous avons regretté l'insuffisance de la présence de mécanique des fluides dans les programmes [1]. La situation s'améliore ; en particulier les réflexions en cours sur les classes préparatoires prévoient d'introduire plus largement l'hydrodynamique physique [2]. Mais, la notion de viscosité n'est toujours pas formellement dans les programmes que devra étudier un agrégatif de physique ! Elle est pourtant indispensable, en contrepoint de la notion de fluide parfait, à travers la notion de couche limite, et, plus généralement, dans la caractérisation des divers régimes d'écoulement d'un fluide. Elle intervient aussi dans de nombreux autres domaines des sciences physiques qu'il s'agisse des propriétés de la matière, de l'instrumentation et de tant d'applications en sciences de la nature et de la vie où son introduction est la plus nécessaire.

Une raison de cette absence est la lourdeur des solutions de problèmes pourtant simples à formuler, à commencer par le classique problème de Stokes de la chute d'une bille dans un fluide visqueux. La situation est différente si on construit des problèmes en relation étroite avec une approche expérimentale. Ici au contraire, il y a une grande richesse d'expériences et de solutions physiques et d'analyses semi quantitatives à construire combinant observation, mesure et analyse dimensionnelle. Dans le cadre de la présentation à l'Union des Physiciens mentionnée plus haut, les auteurs de la présente note avaient présenté une après-midi d'expériences de laboratoire et de démonstration. La séance de travaux pratiques que nous présentons ici et relative à l'étude de la viscosité fait partie de cet ensemble. Elle a été mise en place avec succès (et sans matériel très spécialisé) dans le programme

de Deug SNV de l'Université Paris-Sud. Elle permet d'étudier expérimentalement deux lois classiques de la mécanique des fluides réels (loi de Poiseuille, loi de Darcy) et, quelque peu paradoxalement, elle s'ouvre naturellement vers les problèmes de mécanique des fluides parfaits !

2. LOIS DE POISEUILLE ET DE DARCY

2.1. La viscosité ; loi de Poiseuille

La définition la plus naturelle de la viscosité se fait à partir de la mesure de la force F s'exerçant entre deux plaques parallèles de surface S en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre :

$$F/S = \eta \left(dV_x/dz \right)$$

Le membre de gauche représente la contrainte de cisaillement ; elle est proportionnelle au produit de la viscosité dynamique η par le gradient de la vitesse V_x dans la direction z perpendiculaire aux plaques.

L'utilisation de cette force au calcul du champ de vitesse $v_x(r)$ d'un écoulement dans un tube cylindrique de rayon R en présence d'un gradient de pression longitudinal, ou perte de charge, dp/dx , est très simple et classique. Elle découle de l'évaluation du bilan des efforts appliqués sur un cylindre centré sur l'axe de rayon r ($r \leq R$) en régime stationnaire :

$$v_x(r) = -\frac{\Delta P}{L} \frac{1}{2\eta} (R^2 - r^2) \quad (1)$$

A partir de la vitesse on calcule le débit q :

$$q = \int_0^R v_x(r) 2\pi r dr = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} R^4 = \pi R^2 \bar{V} \quad (2)$$

La dernière égalité définit la vitesse débitante moyenne \bar{V} .

La première partie de la séance de T.P. consiste à mesurer la variation (inattendue) du débit q suivant la puissance quatrième du rayon : la correspondance avec le courant électrique (ou avec le cas d'un fluide parfait) indiquerait un débit qui croît seulement comme le carré

du rayon. Un très beau film de G.-I. Taylor sur les écoulements aux faibles nombres de Reynolds [3], auxquels s'applique ce régime d'écoulement visqueux, contient en particulier une démonstration directe du résultat à partir de la comparaison simultanée du débit dans deux tubes de rayon R et $R/2$ de même longueur soumis à la même perte de charge totale.

Il faut signaler deux «*caveat*» dans la conception et l'analyse de l'expérience :

a - L'écoulement parallèle laminaire, ou écoulement rampant, exige que le nombre de Reynolds soit «*suffisamment*» petit. Il y a peu d'endroits dans toute la physique où le «*suffisamment*» ait un sens aussi flou ! En effet, dans ce problème très particulier de l'écoulement de Poiseuille cylindrique l'écoulement laminaire est stable devant des perturbations infinitésimales, et ce jusqu'à un nombre de Reynolds infini [4] ! En fait, ce sont les fluctuations d'amplitude finie dues aux bords d'entrée ou latéraux et aux vibrations en particulier, qui limitent la zone d'existence de régime laminaire que l'on peut caractériser par le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\overline{V} R \rho}{\eta} \quad (3)$$

Un critère tel que $Re < 2000$ permettra en pratique de définir la gamme de vitesse moyenne \overline{V} que l'on peut utiliser pour un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ donné afin de ne pas perturber la mesure par des fluctuations turbulentes. On vérifiera aisément qu'on entre dans ce régime de turbulence en observant une intermittence dans le débit du jet liquide à la sortie du tube ainsi qu'une tendance du jet à coller à la partie inférieure du tube à la sortie.

b - Le profil de vitesse parabolique de la formule (1) ne s'applique qu'assez loin du début du canal. *La longueur d'entrée*, L , est la distance évaluée le long du tube pour que les couches limites qui se forment au début se rejoignent donnant au profil parabolique sa forme développée. Cette longueur est de l'ordre de produit $R \cdot Re$. Plus précisément [7], la relation s'écrit :

$$L \sim 0,04 R Re$$

Ce n'est que si cette longueur est assez faible devant la longueur totale du tube que l'on pourra négliger l'erreur due au profil de vitesse qui varie dans la zone d'entrée. Ce second facteur, souvent négligé, est une cause d'erreur importante pour les débits ou des nombres de Reynolds pas suffisamment petits.

2.2. Milieu poreux et loi de Darcy

Un milieu poreux est parfois approché par un modèle de tubes capillaires parallèles de rayon R creusés dans un bloc solide et entre les extrémités duquel on applique une différence de pression (figure 1). Dans ce cas, l'existence de connexions transverses ne modifie pas l'écoulement et on peut généraliser la loi de Poiseuille précédente par :

$$Q/S = n D \quad (4)$$

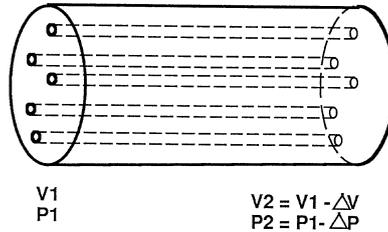


Figure 1

où l'on a introduit le facteur multiplicatif n , nombre des canaux par unité de surface transverse à l'écoulement moyen.

On peut écrire cette équation, ou loi de Darcy, à l'aide de la relation (2) par :

$$Q = (K S/\eta) \text{ grad } P \quad (5)$$

avec :

$$K = \frac{\Phi R^2}{8} \quad (6)$$

fraction de volume occupée par les vides où la «porosité» est donnée par $\Phi = n \cdot \pi R^2$.

Cette forme s'applique en fait à tout milieu poreux quelque soit la forme et la distribution des canaux qui assurent la perméabilité du fluide. La relation s'appelle loi de Darcy du nom de l'ingénieur du Corps des Ponts qui l'a exprimée en premier à l'occasion de travaux

publiés en 1885 sur l'alimentation en eau des fontaines publiques de Dijon (à partir de la rivière Suzon) [5]. Le coefficient K , homogène au carré d'une longueur, s'appelle *perméabilité* et se mesure généralement à partir de la sous unité de darcy ($1 \text{ darcy} = 10^{-9} \text{ cm}^2$) mieux adaptée aux échelles de tailles de pores des milieux poreux naturels. Elle s'applique tant que le nombre de Reynolds, qui peut être construit avec la longueur \sqrt{K} et le débit par unité de surface du poreux, est petite devant l'unité. Dans ce problème, le calcul exact du coefficient K qui contient toute l'information du milieu est impossible dès que la géométrie s'éloigne de celles de tubes capillaires ou de l'ensemble (plus réaliste) d'un ensemble d'obstacles sphériques dilués ; mais là n'est pas l'intérêt de la loi ! Il faut plutôt remarquer la linéarité de cette loi qui permet de séparer les facteurs de proportionnalité vitesse, viscosité, gradient de pression comme dans la loi des fluides visqueux de départ, dite équation de Stokes. Il faut aussi noter le résultat paradoxal suivant : alors que nous avons affaire à l'écoulement d'un fluide visqueux, la loi de proportionnalité du débit au gradient de pression est une loi potentielle comme pour un fluide parfait ! Le champ de pression joue le rôle du potentiel électrique. Ceci résulte de ce que tous les effets de la viscosité à petite échelle (celle du rayon des pores) ont été moyennées et que les variations du débit à une échelle supérieure, dues aux hétérogénéités de la pression en particulier, n'ont plus à tenir compte de ces effets visqueux. Il en découle de très jolies expériences de démonstration que nous avons aussi mises en place à Orsay à l'occasion d'un module instrumental que nous avons développé en 1993 [6]. Il est aussi possible de faire des correspondances analogiques avec des problèmes d'électrostatique utilisant par exemple du papier graphite.

3. MONTAGE EXPÉRIMENTAL (figure 2)

A partir des théories exprimées auparavant nous avons élaboré un montage simple nous permettant de mettre en évidence les lois de Poiseuille et de Darcy.

Description du montage

On dispose de deux circuits d'écoulements indépendants connectés par une vanne trois voies. L'alimentation en eau s'effectue par un réservoir monté sur une glissière (profilé tixit) maintenue au plafond par un système vis et écrou qui permet de faire varier la hauteur h , (remarque : on sera attentif à la position constante du niveau du liquide

dans le réservoir). Le débit est mesuré à l'aide d'éprouvettes graduées et d'un chronomètre.

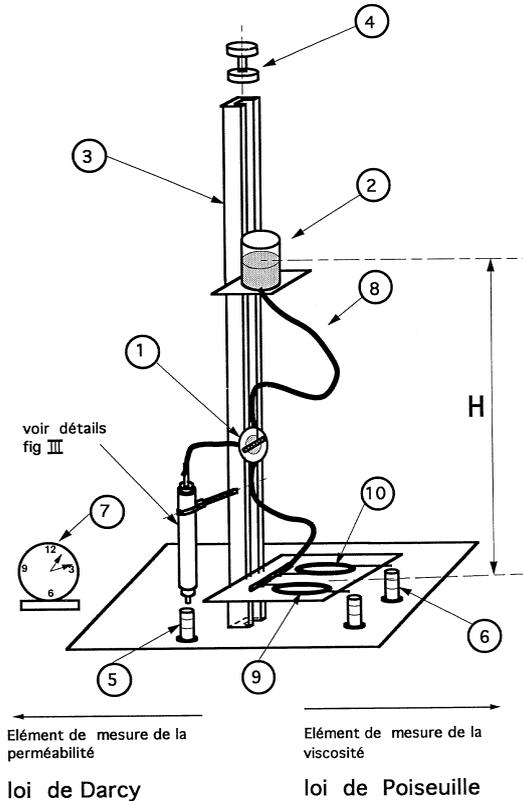


Figure 2

La partie mesure de la viscosité se présente ainsi : on dispose de deux tuyaux cylindriques enroulés et fixés sur une planche surélevée permettant le passage des éprouvettes : attention, le rayon de courbure doit être suffisamment important pour éviter tout risque de perte de charge incontrôlée, l'un des diamètres est : $a = 1 \pm 10^{-2}$ mm, l'autre diamètre b est inconnu (dans notre T.P. il était égal à $0,5 \pm 10^{-2}$ mm). Chacun de ces tuyaux a une longueur de 2 m ; tous les autres tuyaux de raccordement ont une dimension supérieure ou égale à 12 mm de diamètre (ce qui permet de négliger la perte de charge dans ces tuyaux).

Le bloc poreux (figure 3) est constitué d'un tube de plexiglas de 300 mm de long placé verticalement, rempli de billes de verre de 215 microns de diamètre ; le diamètre intérieur du tube est de 20 mm. Pour obtenir une porosité uniforme sur toute la hauteur, il est nécessaire de laisser tomber progressivement les grains dans le tube par exemple à partir d'un entonnoir en s'efforçant de garder la hauteur de chute constante. On peut aussi tapoter transversalement le tube tout au long du remplissage pour homogénéiser celui-ci. Le remplissage s'effectue avec des billes sèches.

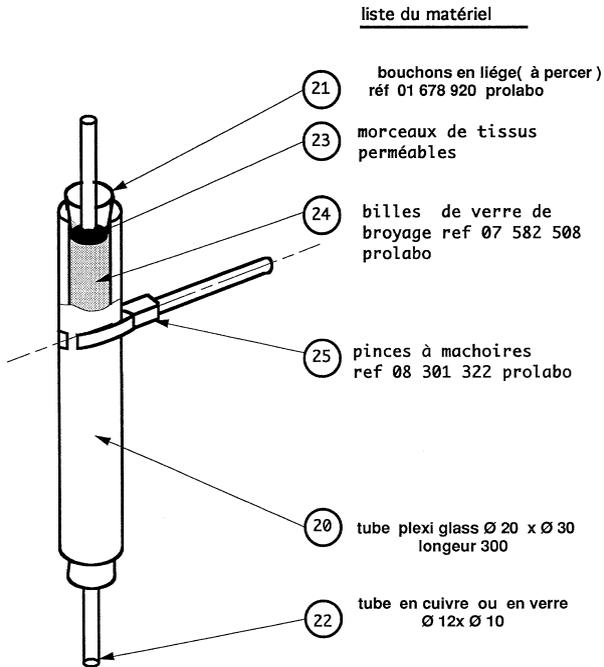


Figure 3 : Dessin de détail du poreux.

Un tissu rigide placé sur la partie intérieure du bouchon de liège retient les petites billes. L'opération de mise en eau est délicate. Elle s'effectuera de la façon décrite par la figure 3. On utilise le principe des vases communicants : Attention aux bulles d'air !

Pour un empilement de billes de diamètre d , K est de l'ordre de $5 \times 10^{-4} d^2$ ainsi qu'on peut le vérifier par application de la formule [6].

4. MESURES EFFECTUÉES ET RÉSULTATS OBTENUS PAR UN BINÔME D'ÉTUDIANTS DE DEUG-SNV

A titre d'exemple des possibilités de mesure des expériences nous avons transcrit une copie de rapport d'étudiants :

Démarche suggérée et suivie

Pour le tuyau de diamètre égal à 1 mm :

a - Tracé sur papier millimétré du graphe de h (hauteur) en fonction de V (volume) ou Q (débit) tracer les rectangles d'incertitudes. En prenant un temps de mesure de 240 s, en évaluant les incertitudes de mesure à : $dh = 0,5$ mm, $dV = 0,5$ ml et $dt = 1$ s, sachant que :

$$dQ = Q \left(\frac{dV}{V} + \frac{dt}{t} \right).$$

On obtient :

Hauteur 10^{-2} m	30	40	50	60	70
Volume 10^{-6} m ³	12,50	17	21	25	29,5
Q 10^{-8} m ³ s ⁻¹	5,2	7,08	8,75	10,4	12,25
dQ 10^{-9} m ³ s ⁻¹	2,296	2,37	2,44	2,506	2,57

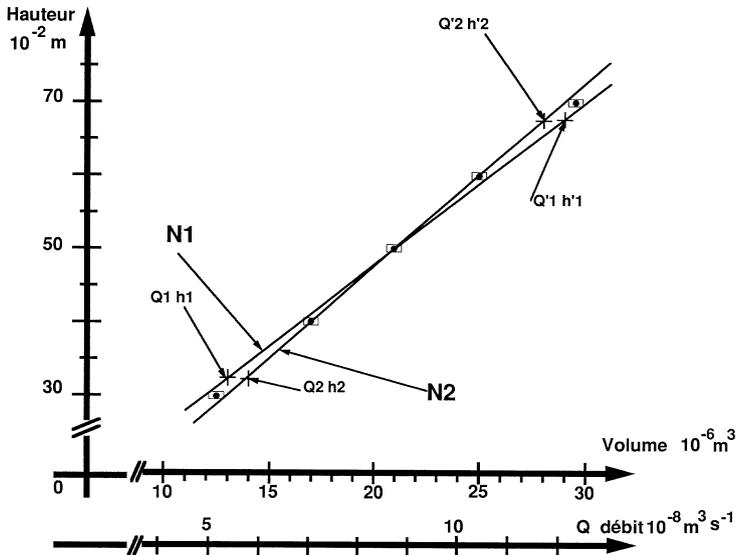


Figure 4

b - Détermination de la pente N du graphe et son incertitude δN . Pente du graphe :

$$N = \frac{N_1 - N_2}{2}$$

en prenant les points sur les droites relatives N_1 et N_2 :

$$N_1 = \frac{Q'_1 - Q_1}{h'_1 - h_1} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{Q'_2 - Q_2}{h'_2 - h_2}$$

$$N = 1,356 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\delta N = \frac{(N_1 - N_2)}{2} \quad \delta N = 1,38 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

c - Calcul de la viscosité η du liquide et son incertitude absolue, préciser les dimensions.

$$N = \frac{Q}{h} = \frac{\pi R^4}{8L\eta} \rho g \qquad \begin{array}{l} r = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ \rho = 1015 \text{ kg m}^3 \\ g = 9,81 \end{array}$$

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho g}{8NL} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} N = 1,356 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\ L = 2 \text{ m} \end{array}$$

$\eta = 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ P a.s}$
--

Rappel : La viscosité de l'eau est d'environ 10^{-3} Pa.s à 18°C .

Valeur de l'erreur ($\partial\eta$) :

$$\text{Ln } \eta = \text{Ln} \left(\frac{\pi \rho g}{8L} \right) + 4 \text{Ln } R - \text{Ln } N$$

$$\partial\eta = \eta \left(\frac{4\partial r}{R} + \frac{\partial N}{N} \right)$$

$$\partial\eta = 8,9 \cdot 10^{-4} \left(4 \times 10^{-2} + \frac{1,38 \cdot 10^{-8}}{1,356 \cdot 10^{-7}} \right)$$

$$\partial\eta = 9,01 \cdot 10^{-4}$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial n}{\eta} = \frac{9,01 \cdot 10^{-4}}{8,09 \cdot 10^{-4}} = 2,25 \%$$

correspondant aux barres d'erreurs.

d - Évaluation du nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$Re = \frac{\rho \bar{V} d}{\eta} \text{ en prenant } \bar{V} = \frac{Q \max}{S} \text{ avec } S = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$Re = \rho \frac{Q \max d}{\eta S} \approx 200$$

e - L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

La valeur du nombre de Reynolds est très inférieure aux seuils de transitions vers la turbulence les plus bas qui ont été obtenus dans cette géométrie et qui sont de l'ordre de deux mille. Les valeurs les plus élevées de la transition à la turbulence qu'on peut obtenir pour des bonnes conditions d'entrée, de traitement de surface et d'absence de vibration peuvent être dix fois plus élevées.

f - Mesuration du diamètre du tuyau de diamètre inconnu :

A l'aide d'une seule mesure de débit judicieusement choisie pour minimiser les erreurs et la viscosité η déterminé précédemment, on peut calculer le diamètre b et l'incertitude sur sa valeur.

Réponse

On prend un volume maximal pour avoir une erreur relative minimale et une hauteur moyenne de 0,6 m.

$$V = 25 \text{ cm}^3 \rightarrow t = 472 \text{ s}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{128 Q \eta L}{\pi \rho g h}}$$

$$Q = \frac{V}{t} \text{ ce qui donne } b = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

(le tuyau est vendu pour un diamètre de $5 \cdot 10^{-4}$ m).

L'incertitude, calculée comme précédemment, vaut $1,15 \cdot 10^{-5}$ m.

g - Calcul de perméabilité

En utilisant la viscosité mesurée précédemment, mesurer la perméabilité K avec son incertitude et ses dimensions.

La formule (5) peut se mettre sous forme :

$$K = \frac{QL\eta}{Spgh}$$

Les conditions expérimentales sont :

$$h = 0,6 \text{ m et un Volume} = 25 \text{ cm}^3.$$

Le temps de mesure est de 156 s, la section du tube est de $3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ce qui nous donne : $K = 2,30 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$. Un calcul d'incertitude identique au précédent donne : $K = 7,82 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$.

La valeur de K est compatible avec celle que l'on peut calculer en utilisant la mesure du diamètre des billes.

$$\bar{d} = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ m et la formule approchée } K = 5,10^{-4} \bar{d}^2$$

On obtient $K = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ ce qui est en accord raisonnable avec le résultat précédent.

5. CONCLUSION

Cette séance de travaux pratiques, mettant en jeu des mesures élémentaires, permet à la fois des mesures caractéristiques de l'écoulement d'un fluide visqueux mais aussi de celle d'un écoulement potentiel, à travers une «loi d'Ohm hydraulique». Elle s'appuie sur des manipulations simples et soignées et s'ouvre vers un secteur important des sciences de la nature - «l'étude des milieux poreux». Il est d'ailleurs possible de prolonger l'étude dans les milieux poreux en considérant le problème très important de milieux poreux partiellement remplis d'un fluide pour lequel les effets dus à la capillarité contrôlent les structures d'équilibre et d'écoulements. Le projet élargi a été proposé dans le cadre de la formation scientifique pour les pays du Sahel ne disposant pas de l'électricité mais de moyens simples et précis de mesure de longueur, de masse et de temps, et concernés par les problèmes du sable et de l'eau.

RENSEIGNEMENTS

Ce travail est directement lié au projet pédagogique expérimental du Deug A d'Orsay. Nous sommes reconnaissants aux membres de ce service. Nous avons bénéficié d'une lecture critique de ce travail par Marc FERMIGIER, Maître de Conférences à l'École Supérieure de Physique et Chimie Industrielle de Paris.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT - Un enseignement de mécanique des fluides par des physiciens, B.U.P. n° 721, p. 185 (1990).
- [2] *Ibid.*, «Hydrodynamique physique» - Interéditions (1991). On pourra trouver dans le chapitre 8 de cet ouvrage une présentation détaillée des écoulements aux faibles nombres de Reynolds.
- [3] Ce film peut être obtenu à la SFRS (96, boulevard Raspail - 75272 PARIS Cedex 06 - Tél. : (1) 42.22.46.44). Il est décrit dans un très intéressant album «Illustrated experiments in fluid mechanics» (MIT Press, 1972).
- [4] La solution non linéaire de l'instabilité de ce problème a été démontrée numériquement à la suite des travaux conduits plus d'un siècle après la découverte expérimentale de la transition à turbulence par Osborne Reynolds en 1861 !
- [5] Henry DARCY a été ingénieur en chef du Corps des Ponts à Dijon entre 1834 et 1842 et a fait de cette ville, la ville la plus propre de France avec une consommation en eau de deux cents litres par habitant et par jour. La loi de Darcy apparaît en annexe d'un article sur «les fontaines publiques de la ville de Dijon».
- [6] P. BINÉTRUY & al à paraître. Cette propriété conduit aussi à des expériences particulièrement simples et élégantes par un écoulement entre deux plaques parallèles proches, dit écoulement de Hele-Shaw (voir [2] chapitre 8). Dans ce cas, la solution de l'écoulement de Poiseuille plan peut être mis sous la forme de la loi de Darcy avec un facteur $\frac{K=D^2}{12}$ où D est la distance entre les plaques. Si on place un obstacle cylindrique d'épaisseur D entre les plaques, l'écoulement moyen perpendiculaire aux plaques est un écoulement potentiel.
- [7] H SCHLICHTING - Boundary-layer theory, Mac Graw Hill, 7^e ed., p. 185.

Annexe

LISTE DU MATÉRIEL FIGURES 2 ET 3

- 1 - Vanne à trois voies GF Ø 16 en PVC.
- 2 - Réservoir (pissettes en polyéthylène (capacité 1000 ml) dans laquelle on a remplacé l'embout par un tube enmanché à force. Percer également le fond de la pissette (réf. 06 611 604 Prolabo).
- 3 - Glissière (profilé tixit).
- 4 - Dispositif de maintien au plafond. Système vis-écrou.
- 5 - Une éprouvette graduée de 50 ml (réf. 00 705 346 Prolabo).
- 6 - Une éprouvette graduée de 25 ml (réf. 00 705 288 Prolabo).
- 7 - Une éprouvette graduée de 10 ml (réf. 00 705 200 Prolabo).
- 8 - Chronomètre de table.
- 9 - Tuyaux souple exacanal Ø int. 12 (réf. 08 130 924 Prolabo).
- 10 - Tuyaux souple Ø int. 1 (réf. 01 914 813 Prolabo).
- 11 - Tuyaux souple Ø int. 0,5 (réf. N 71 174 Bioblock).
- 20 - Tube plexiglas Ø 20 × Ø 30, longueur 300.
- 21 - Bouchon en liège (à percer) (réf. 01 678 920 Prolabo).
- 22 - Tube en cuivre ou en verre Ø 12 × Ø 10.
- 23 - Morceaux de tissu perméables.
- 24 - Billes de verre de broyage (réf. 07 582 505 Prolabo).
- 25 - Pinces à mâchoires (réf. 08 301 322 Prolabo).

MISE EN EAU DU POREUX

On descend au maximum le réservoir, la vanne trois voies est en position fermée. On dépose le poreux que l'on place tête bêche sur un statif, l'entrée se situant au-dessus de la surface libre de l'eau. On ouvre la vanne trois voies et l'on remonte par petits paliers ($\cong 5$ cm) successifs le réservoir (**on attend entre deux paliers cinq à six minutes**) jusqu'à remplissage du poreux. Si le remplissage a lieu trop rapidement on piège de l'air. Fermer la vanne puis replacer l'ensemble.

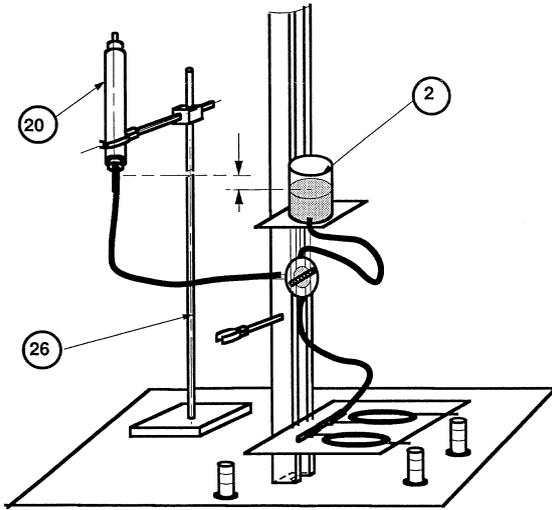


Figure 5