

# Énoncé du concours général

---

SESSION DE 1994

---

## COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classes terminales C, D et E)

DURÉE : 5 heures

---

*Les parties I et II de ce problème sont indépendantes entre elles.*

### I. TRAJECTOIRES DE PHASE

#### A. SYSTÈMES NON DISSIPATIFS

##### 1. Circuit LC.

Soit un circuit électrique constitué d'une bobine supposée parfaite de coefficient d'auto-inductance  $L$  en série avec un condensateur supposé parfait de capacité  $C$  (fig. 1).

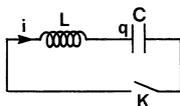


Figure 1

Pour un temps  $t < 0$ , l'interrupteur est ouvert. À l'aide d'un circuit extérieur non représenté, on charge le condensateur à la charge  $q_0$ . Au temps  $t = 0$ , on ferme  $K$ .

- 1.1. Donner, en la justifiant, l'équation différentielle vérifiée par la charge  $q(t)$ . On posera  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .  
Comment appelle-t-on  $\omega$  ?
- 1.2. Tracer la courbe, appelée trajectoire de phase, décrite dans le plan  $(Ox, Oy)$  par le point  $M$  de coordonnées  $x = q$  et  $y = \frac{1}{\omega} \frac{dq}{dt}$  quand  $t$  varie. Préciser le point de départ  $M_0$  et le sens de parcours quand  $t$  augmente.

## 2. Circuit LC et diode.

On considère le circuit de la figure 2 pour lequel on ajoute en série avec les éléments du circuit de la figure 1 une diode à semi-conducteur dont on représente la caractéristique intensité-tension  $i = f(u)$  sur la figure 3.

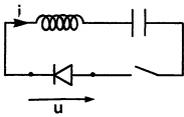


Figure 2

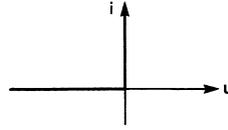


Figure 3

On impose les conditions initiales suivantes :  $q(t = 0) = q_0 < 0$  et  $i(t = 0) = 0$ . On ferme l'interrupteur au temps  $t = 0$ .

- 2.1. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $q(t)$  ?
- 2.2. Montrer que, juste après la fermeture de l'interrupteur, la diode est passante et le reste pendant un intervalle de temps à calculer.
- 2.3. Tracer la trajectoire de phase en précisant le sens de parcours.

## B. SYSTÈMES DISSIPATIFS

### 1. Circuit RLC.

On modélise les défauts de la bobine par un résistor de résistance  $R$  en série avec celle-ci, le condensateur étant toujours supposé parfait. La diode est supprimée. On ferme l'interrupteur au temps  $t = 0$ , les conditions initiales étant connues.

- 1.1. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par  $q(t)$ , en introduisant  $Q = \frac{L\omega}{R}$ .  
Quel est le nom de  $Q$  ?
- 1.2. Vérifier que  $q(t) = A e^{-\frac{\omega}{2Q}t} \cos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \omega t + \varphi\right)$ , où  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes dépendant des conditions initiales, est solution de l'équation précédente, et ceci si  $Q > \frac{1}{2}$  ce qui est supposé vrai.
- 1.3. Comment varie l'amplitude de  $q$  avec  $t$  ?
- 1.4. Comment varie l'énergie  $E$  avec  $t$  ? Exprimer  $E$  en fonction de la distance du point  $M$  à  $O$ .  
Conclusion ?
- 1.5. Tracer la trajectoire de phase en précisant le sens de parcours et en prenant des conditions initiales quelconques.
- 1.6. Justifier le nom d'attracteur donné à  $O$ .

## 2. Circuit RLC en oscillations forcées.

On dispose dans le circuit RLC de la question B.1. (fig. 4) un générateur de tension de f.e.m.  $e(t)$  variant de façon alternative sinusoïdale avec le temps :  $e(t) = E \cos \Omega t$ .

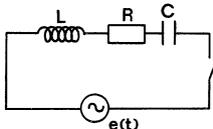


Figure 4

- 2.1. Rappeler, en régime permanent, la *forme* de la solution en  $q(t)$ . De quoi dépend, pour un circuit RLC donné, la valeur maximale  $q_{\max}$  de la charge ?
- 2.2. Pour une valeur donnée de  $q_{\max}$ , tracer la trajectoire de phase en régime permanent.
- 2.3. Si on suppose que l'interrupteur a été fermé à  $t = 0$ , les conditions initiales étant quelconques mais connues, que faut-il ajouter au tracé de la question 2.2. pour représenter tous les points décrits quand  $t > 0$  ?
- 2.4. Quelle est la forme de l'attracteur ?

Cette propriété fondamentale des attracteurs d'être indépendants des conditions initiales est caractéristique des systèmes dissipatifs non chaotiques. Pour des systèmes plus compliqués que ceux étudiés précédemment, c'est-à-dire dont le nombre de degrés de liberté est plus grand, un régime chaotique peut apparaître. On a un « attracteur étrange » présentant la propriété dite de « sensibilité aux conditions initiales ». Deux trajectoires de phases très voisines s'écartent alors toujours l'une de l'autre.

## II. MOUVEMENT DES PLANÈTES

On étudie dans cette partie le mouvement des planètes autour du Soleil. Le référentiel d'étude est le référentiel de Kepler, supposé galiléen, défini par son origine au barycentre du système solaire et trois axes pointés vers trois étoiles supposées fixes. La masse du Soleil étant beaucoup plus grande que celle de toutes les planètes et autres corps constituant le système solaire, nous confondrons le barycentre du système solaire et le centre du Soleil O.

### A. MOUVEMENT DE LA TERRE

Le mouvement de la Terre dans le référentiel de Kepler se décompose en deux mouvements :

- mouvement orbital de la Terre – considérée comme un point matériel – autour du Soleil, dans le plan de l'écliptique. L'orbite terrestre est assimilable en première approximation à un cercle de centre O ;
- mouvement propre de rotation de la Terre sur elle-même, à vitesse constante, autour de l'axe des pôles géographiques.

Les deux mouvements se font dans le même sens, dit sens direct.

La durée de la révolution orbitale de la Terre, ou période de révolution sidérale, vaut  $T = 365,256$  jours. Calculer, en secondes, la durée de rotation propre de la Terre sur elle-même, ou jour sidéral.

### B. MOUVEMENT ORBITAL

Dans la suite, on s'intéresse uniquement au mouvement orbital des planètes. Une planète est assimilée à un point matériel, de masse  $m$ , situé au point M à un instant donné, avec  $OM = r$ . On note  $M_S$  la masse du Soleil et  $G$  la constante de la gravitation universelle. On suppose dans cette partie que la planète n'est soumise qu'à l'action du Soleil.

1. Donner l'expression vectorielle de la force  $\vec{f}$  s'exerçant sur la planète.

On définit le vecteur moment de  $\vec{f}$  par rapport à  $O$  par  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}$  et le vecteur moment cinétique de la planète par rapport à  $O$  par :  $\vec{\sigma}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  désigne le vecteur vitesse de la planète au point  $M$ .

2. Montrer que  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}$ . Quelle propriété vérifie  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f})$ ? Qu'en déduit-on pour  $\vec{\sigma}_O$ ?

Donnée : Si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont des vecteurs dépendant du temps,  $\frac{d(\vec{A} \wedge \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$ .

3. Montrer que la trajectoire de la planète est plane.

Au lieu de travailler en coordonnées cartésiennes pour décrire le mouvement de  $M$ , on utilise les coordonnées dites polaires  $r$  et  $\theta$  définies sur la figure 5.

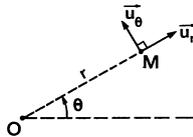


Figure 5

On montre alors que le vecteur vitesse s'écrit  $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ ,  $\vec{u}_r$  désignant le vecteur unitaire radial et  $\vec{u}_\theta$  le vecteur unitaire orthoradial.

4. Calculer  $\vec{\sigma}_O$ . Montrer que le produit  $r^2 \frac{d\theta}{dt}$  est une constante, appelée constante des aires et notée  $C$ .

On donne l'énergie potentielle de la planète dans le champ de gravitation dû au Soleil :

$$E_p(r) = -G \frac{mM_S}{r}.$$

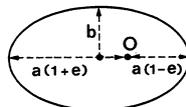
5. Justifier rapidement cette expression, en particulier le signe  $-$ . Calculer l'énergie mécanique totale  $E$  de la planète en fonction de  $r$ ,  $\frac{dr}{dt}$ ,  $m$ ,  $C$  et  $E_p(r)$ . Montrer qu'on est ramené à l'étude du mouvement unidimensionnel d'une particule fictive caractérisée par sa position  $r$  soumise à une énergie potentielle fictive, dite efficace,  $E_{p\text{eff}}(r)$ , qu'on exprimera en fonction de  $r$ ,  $m$ ,  $C$  et  $E_p(r)$ .

6.

- 6.1. Tracer la courbe  $E_{p\text{eff}}(r)$ .

- 6.2. Déterminer le rayon  $r_C$  correspondant à une trajectoire circulaire et l'énergie mécanique totale  $E$  associée. Commenter le signe de  $E$ .

- 6.3. Dans le cas plus général, une trajectoire fermée est une ellipse de foyer  $O$ , caractérisée par son demi-grand axe  $a$  et son excentricité  $e$  (fig. 6).



$$b = a \sqrt{1 - e^2}$$

Figure 6

Comment trouver graphiquement les distances minimale (au point appelé périhélie) et maximale (au point appelé aphélie) de la planète au Soleil ? Quelles sont les valeurs possibles pour  $E$  ?

## C. CARACTÉRISATION D'UNE TRAJECTOIRE FERMÉE

Supposons qu'une planète d'énergie potentielle  $E_p(r)$  (fonction quelconque de  $r$ ), initialement sur une orbite circulaire de rayon  $r_C$ , subisse à un instant donné une petite variation de  $r$  sans changement de  $C$ . Cette variation initiale de  $r$  est à l'origine « d'oscillations radiales » caractérisées par une période  $T_r$ .

1. Montrer que :  $T_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{d^2 E_{\text{peff}}(r)}}$ , où  $\frac{d^2 E_{\text{peff}}(r)}{dr^2}$  est prise en  $r = r_C$ .

On pourra se ramener au modèle de l'oscillateur harmonique d'un point de vue énergétique.

*Donnée* : Pour une fonction  $f$  de la variable  $x$  :  $f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon \left. \frac{df}{dx} \right|_x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_x$  si  $\varepsilon$  est petit devant  $x$ .

2. En supposant que la période orbitale  $T$ , ou période de révolution sidérale, a peu varié par rapport à celle du mouvement circulaire (petite perturbation), montrer que :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mr_C}{dE_p(r)}}$$

où  $\frac{dE_p(r)}{dr}$  est prise en  $r = r_C$ .

3. Une trajectoire fermée est caractérisée par le fait qu'au bout du temps  $T$ , la planète se retrouve au même point de l'espace. Comparer alors  $T_r$  et  $T$ .
4. Étudier le cas où  $E_p(r) = -G \frac{mM_S}{r}$ . Le résultat était-il prévisible ?

## D. PRÉSENTATION DU PÉRIHÉLIE DE MERCURE

On constate expérimentalement que l'orbite de la planète Mercure n'est pas rigoureusement une ellipse. De fait, le grand axe de l'ellipse tourne avec le temps (mouvement de précession) et la trajectoire de la planète n'est plus fermée. On appelle  $\Delta w$  l'angle dont le grand axe tourne lorsque la planète effectue une révolution.

Cette précession peut s'expliquer essentiellement par la présence des autres planètes, présence qui perturbe l'orbite de Mercure par interaction newtonienne, et par une correction relativiste. C'est cette correction que nous allons calculer.

1. Quelle est la dimension du rapport  $\frac{GM_S}{r_C}$  ?
2. L'excentricité de l'orbite de Mercure est  $e = 0,2056$ . Nous supposons dans la suite que cette orbite est proche du cercle, de manière à pouvoir utiliser la méthode introduite dans la partie C. Que pensez-vous de cette approximation ?
3. Supposons que  $\Delta w$  soit fonction uniquement de  $G, M_S, r_C$  et  $c_0$ , vitesse de la lumière dans le vide. Écrire  $\Delta w$  sous la forme d'une fonction monôme de ces quatre grandeurs. On fera intervenir une constante sans dimension que l'analyse dimensionnelle ne permet pas de calculer. Pourquoi fait-on intervenir  $c_0$  ? Que pensez-vous de la dépendance de  $\Delta w$  avec  $c_0$  ?

4. Pour introduire la correction relativiste, nous utiliserons le même formalisme qu'aux B. et C. et nous admettons que tout se passe comme si l'énergie potentielle de la planète s'écrivait maintenant sous la forme :

$$E_p(r) = -G \frac{mM_s}{r} - m \frac{\beta}{r^3}, \quad \text{avec } \beta > 0 \text{ et } \frac{\beta}{r^2} \text{ petit devant } GM_s.$$

4.1. Montrer que  $T_r = T \left( 1 + \frac{3\beta}{GM_s r_C^2} \right)$ .

Donnée :  $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$ , à l'ordre de plus bas, si  $\varepsilon$  est petit devant 1.

- 4.2. Montrer qu'on a une avance du périhélie de Mercure. Calculer  $\Delta w$  en fonction de  $G, M_s, r_C$  et  $c_0$ , sachant que  $\frac{\beta}{GM_s} = \frac{C^2}{c_0^2}$ .
- 4.3. Calculer  $\Delta w$  en radians par révolution, puis en secondes d'arc par siècle. On prendra  $r_C = 5,79 \cdot 10^{10}$  m,  $c_0 = 3 \cdot 10^8$  ms<sup>-1</sup>,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  SI,  $M_s = 2 \cdot 10^{30}$  kg et  $T = 0,241$  an. Comparer à la valeur 43" arc par siècle donnée dans les tables.

### E. LA TROISIÈME LOI DE KEPLER

On suppose de nouveau que la planète n'est soumise qu'à l'action du Soleil.

1. Démontrer la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire.

On peut montrer que cette loi se généralise au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon du cercle par le demi-grand axe de l'ellipse.

2. Imaginons que, du fait d'un événement extérieur tel que choc, la Terre, initialement sur son orbite actuelle, soit brutalement stoppée. Quel temps mettrait-elle pour « tomber » sur le Soleil ?
- 3.

- 3.1. Dans le tableau ci-dessous sont regroupées les valeurs des périodes orbitales des neuf planètes du système solaire.

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
T(an)	0,241	0,615	1	1,881	11,865	29,650	83,744	165,451	247,687

Calculer la valeur du demi-grand axe terrestre en millions de km. Cette valeur est appelée unité astronomique. Calculer les valeurs des demi-grands axes des autres planètes, exprimées en unités astronomiques.

- 3.2. La loi empirique de Titius-Bode exprime le fait que le rapport du demi-grand axe d'une planète sur le demi-grand axe de la planète précédente est *sensiblement* constant, si on ne tient pas compte de Pluton. Donner un encadrement de ce rapport. Que remarquez-vous ?

### III. DU CHAOS DANS LA CEINTURE D'ASTÉROÏDES

La notion de trajectoire de phase introduite dans la partie I à propos de quelques circuits électriques est transposable à des systèmes mécaniques.

1. Quel est l'analogie mécanique du circuit LC de la question I.A.1. ?
2. On a représenté, figure 7, un certain nombre de trajectoires de phases (correspondant à des conditions initiales différentes) pour un pendule simple non amorti.

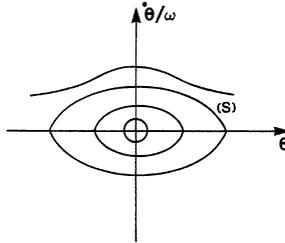


Figure 7

Reconnaître les divers types de mouvement.

3. La trajectoire de phase (S) est appelée séparatrice. Pour un corps isolé gravitant autour du Soleil, quel type de mouvement joue le rôle de séparatrice ?  
Pour qu'un phénomène chaotique apparaisse, il faut perturber le système. La séparatrice peut alors être remplacée par une zone chaotique.
4. Les astéroïdes sont des objets de faible masse gravitant autour du Soleil entre Mars et Jupiter. La distribution de ces objets n'est pas homogène en fonction de la distance au Soleil. Elle présente des lacunes, découvertes en 1867 par Kirkwood. La plus importante de ces lacunes correspond à la « résonance 3/1 » : la période orbitale de Jupiter est le triple de la période orbitale de l'astéroïde.

Pour interpréter ce fait d'expérience, on suppose que l'astéroïde, appartenant à la lacune 3/1, est soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle du Soleil et de Jupiter. L'étude de l'effet de perturbation de Jupiter sur le mouvement de l'astéroïde nécessite l'introduction de nouvelles variables, notées  $x, y$  et  $\varphi$  (angle critique), définies par :

$$x = k e \cos w; \quad y = -k e \sin w; \quad \varphi = 3 \theta_{\text{Jupiter}} - \theta_{\text{astéroïde}}$$

où  $e$  : excentricité de l'orbite de l'astéroïde,  $w$  : angle repérant la position du périhélie de l'astéroïde,  $k$  = constante,  $\theta_{\text{Jupiter}}$  et  $\theta_{\text{astéroïde}}$  : longitudes de Jupiter et de l'astéroïde respectivement. Il faut remarquer que  $x$  et  $y$  ne sont pas les variables cartésiennes usuelles et qu'elles renseignent sur la forme et la situation de l'orbite de l'astéroïde.

4.1. Comment calcule-t-on l'excentricité à partir de  $x$  et  $y$  ?

4.2. Si les orbites de Jupiter et de l'astéroïde étaient circulaires, que vaudrait l'angle critique ?

On peut associer à l'astéroïde une énergie potentielle efficace fonction de  $x, y$  et  $\varphi$ , et une énergie cinétique correspondant aux variations temporelles de  $\varphi$ , l'angle critique oscillant beaucoup plus rapidement que  $e$  et  $w$ . Si on se fixe l'angle  $\varphi$  (système contraint), l'énergie potentielle efficace  $E_{p\text{eff}}(x, y)$ , qui s'identifie à l'énergie totale, est alors de la forme :

$$E_{p\text{eff}}(x, y) = F y^2 + f(x) + g(x, y^2)$$

où  $F$  est une constante,  $f$  une fonction continue de  $x$ ,  $g$  une fonction continue de  $x$  et de  $y^2$ . On remarquera que, la fonction  $E_{p\text{eff}}(x, y)$  étant paire en  $y$ , un extremum de cette fonction ne peut être obtenu qu'en  $y = 0$ .

4.3. Les figures 8 et 9 représentent respectivement  $E_{p\text{eff}}(x, y = 0)$  et  $E_{p\text{eff}}(x_0, y)$ .

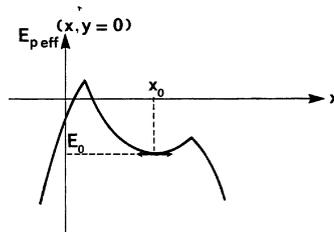


Figure 8

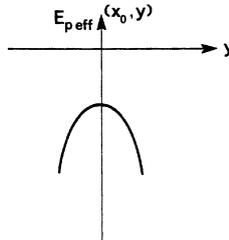


Figure 9

Pourquoi peut-on parler d'un « point d'équilibre » instable en selle de cheval ?

- 4.4. Donner l'allure dans le plan  $x, y$  de la courbe  $E_{p\text{eff}}(x, y) = E_0$ , appelée séparatrice. On admettra que les valeurs extrêmes de l'excentricité sont obtenues pour  $y = 0$ .
- 4.5. Un traitement mathématique moins simplifié montre que la zone au voisinage de la séparatrice est chaotique. Montrer que l'excentricité de l'orbite de l'astéroïde peut subir un « saut ».
- 4.6. En fait, la zone chaotique est plus compliquée que celle décrite à la question précédente et l'excentricité peut passer subitement et de façon aléatoire, pour les orbites proches de la résonance  $3/1$ , d'une valeur de l'ordre de  $0,1$  à une valeur de l'ordre de  $0,35$ . Expliquer alors la présence de la lacune  $3/1$ .
- 4.7. Quelle preuve directe du phénomène précédent peut-on avoir sur terre ?